Miron Niedźwiecki
Mieczysław Rasiukiewicz

Nieliniowe elektroniczne układy analogowe

Wydanie 2



WYDAWNICTWA NAUKOWO-TECHNICZNE
WARSZAWA

Autorzy: MIRON NIEDŹWIECKI — rozdziały 3...8, dodatki 1 i 5...8
MIECZYSŁAW RASIUKIEWICZ — rozdziały 1, 2, dodatki 2, 3 i 4
Redaktor techniczny GRAŻYNA MIAZEK
Opracowanie graficzne TADEUSZ PIETRZYK

681.335
Podręcznik jest przeznaczony dla studentów wydziałów elektroniki, informatyki i telekomunikacji wyższych szkół technicznych. Może być przydatny także dla inżynierów elektroników.

Tytuł dotowany przez Ministra Edukacji Narodowej

ISBN 83-204-1523-3

SPIS TREŚCI

PRZEDMOWA

Rozwój układów elektronicznych, a w szczególności postęp w wytwarzaniu coraz doskonalszych układów scalonych pełniących rolę modułów funkcjonalnych o różnym przeznaczeniu powoduje, że coraz mniej układów budowanych jest z elementów dyskretnych. Niektóre z nich są zestawiane z bloków funkcjonalnych uzupełnionych elementami dyskretnymi, inne wykonywane w całości w postaci scalonej. Stan ten spowodował zmianę ujęcia w prezentowaniu tematyki układowej. Zamiast przedstawiania licznych, typowych rozwiązań szczegółowych stosuje się tak zwane ujęcie systemowe, które polega na przedstawieniu układu w postaci schematu funkcjonalnego złożonego z elementarnych bloków wykonujących ściśle określone operacje na przetwarzanych sygnałach. Bloki te mogą być realizowane w najrozmaitszy sposób w zależności od pożądanego zakresu częstotliwości, poziomu sygnałów i innych czynników. Analiza układu na podstawie schematu funkcjonalnego pozwala określić warunki poprawnej pracy oraz istotne ograniczenia dla całych klas układów, a nie tylko wybranych rozwiązań szczegółowych. Wobec mnogości takich rozwiązań istniejących obecnie i łatwości tworzenia nowych jest to ujęcie, które umożliwia wyrobienie sobie pewnego całościowego poglądu na działanie i właściwości różnych klas układów. Jest to szczególnie ważne w przypadku układów nieliniowych ze względu na zróżnicowanie metod ich analizy oraz stosunkowo złożoną postać przetwarzanych w nich sygnałów. Dlatego przyjęta została następująca koncepcja wykładu. Prawie każdy rozdział składa się z dwu części. W pierwszej z nich przeprowadzana jest analiza różnych klas układów na podstawie ich schematów funkcjonalnych.
W drugiej części są prezentowane wybrane rozwiązania szczegółowe, a przy omawianiu ich właściwości i ustalaniu warunków poprawnej pracy wykorzystuje się uzyskane poprzednio wyniki analityczne oraz wprowadza niezbędne uzupełnienia.

Oprócz właściwego tekstu książka zawiera także dodatki o różnym przeznaczeniu. W dodatkach 1...4 są omówione zagadnienia, które wykorzystuje się wielokrotnie w różnych rozdziałach, co pozwala uniknąć powtórzeń. Dodatek 5 stanowi zwięzłe omówienie właściwości sygnałów z modulacją analogową. Wyłączenie tych rozważań z rozdziałów poświęconych modulatorom i demodulatorom, gdzie są one zwykle prowadzone, pozwoliło z jednej strony uzyskać większą spójność tekstu poświęconego układom, a z drugiej strony — w samym dodatku — zastosować ujęcie bardziej ścisłe i ogólne, niż to byłoby możliwe w przypadku podzielenia materiału pomiędzy kilka rozdziałów. Dodatki 6...8 zawierają prezentację niektórych zagadnień, nie omawianych zwykle w kursie teorii obwodów, a bardzo przydatnych do głębszego zrozumienia zasady działania układów analizowanych głównie w rozdziałach 3...6.

Szybki postęp w rozwoju układów elektronicznych powoduje, że dziedzina ta podlega ciągłym przeobrażeniom. Dlatego trzeba z naciskiem podkreślić, że celem tego podręcznika nie jest prezentacja jak najszerszego wachlarza nieliniowych układów analogowych oraz ich rozwiązań konstrukcyjnych, lecz próba omówienia podstawowych właściwości i metod analizy wybranych klas takich układów. Przy wyborze kierowaliśmy się z jednej strony szybkością ich rozwoju i rozległością zastosowań, z drugiej zaś tym, czy są one omawiane w krajowej literaturze technicznej, zwłaszcza podręcznikowej. Z tych właśnie względów pominęliśmy, dla przykładu, układy zasilające oraz rezonansowe wzmacniacze mocy, gdyż są one szczegółowo traktowane w wielu książkach poświęconych układom elektronicznym, natomiast poświęciliśmy więcej miejsca nieliniowym układom operacyjnym oraz pętlom fazowym, nie omawianym w sposób systematyczny w żadnym ze znanych nam krajowych podręczników czy skryptów.

Jeśli chodzi o zastosowane w książce ujęcie, to autorom trudno jest ocenić, czy osiągnęli zamierzony cel, to znaczy spójność i jasność wykładu. Marian Załucki napisał kiedyś, że „autor ma męczyć się tak długo, żeby czytelnik już nie musiał". Żywimy nieśmiałą nadzieję, że męczyliśmy się dostatecznie długo, aby chociaż niektóre fragmenty książki sprostały temu surowemu wymaganiu.

Na koniec pragniemy wyrazić głęboką wdzięczność Opiniodawcom książki: prof. dr hab. inż. Andrzejowi Filipkowskiemu oraz prof. dr hab. inż. Marianowi Piekarskiemu za trud włożony w opracowanie recenzji i za zamieszczone w nich cenne uwagi krytyczne.

Dziękujemy również serdecznie p. mgr inż. Marii Nowakowskiej za niezwykle staranne opracowanie strony redakcyjnej książki.

AUTORZY

Gdańsk, czerwiec 1989

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

A, A_f, A_L	— wzmocnienia napięciowe: układu otwartego, układu ze sprzężeniem zwrotnym, pętli
AM, $AM\text{-}SC$	— symbole dwuwstęgowej modulacji amplitudy: z nośną, bez nośnej
$a(t)$	— obwiednia chwilowa sygnału, sygnał modulujący
$\hat{a}(t)$	— transformata Hilberta $a(t)$
$\overline{a(t)}$	— wartość średnia $a(t)$
B, b	— baza
B	— szerokość pasma, uogólniona amplituda rzeczywista przebiegu pobudzającego (napięcie, prąd) przy wyznaczaniu funkcji opisującej
B^+	— amplituda w stanie ustalonym generacji
B_{FM}, B_{PM}	— pasmo zajęte przez sygnał: *FM*, *PM*
B_n	— pasmo szumowe
b	— błąd nieliniowości przetwornika napięcie-prąd, wejściowy poziom progowy ogranicznika, parametr obwodu generatora *RC*
C, c	— kolektor
C	— pojemność
D, d	— dren
$D = \Delta\omega/\omega_o$	— dewiacja względna
$D(x)$, $D_r(x)$	— funkcje pomocnicze (przy wyznaczaniu współczynnika zawartości harmonicznych generatora *LC*)
DF	— detektor fazy
DT	— dioda tunelowa
E, e	— emiter
E, e	— wydajność napięciowa źródła: stałoprądowego, zmiennoprądowego
E_R	— normujące napięcie odniesienia układu mnożącego
F	— różnica zwrotna
f	— częstotliwość
$f(t)$	— unormowany sygnał modulujący
FM	— symbol modulacji częstotliwości
f_h, f_l, f_p, f_o, f_s	— częstotliwości: heterodyny, lustrzana, pośrednia, środkowa, sygnału
$f_{3\,\mathrm{dB}}$	— małosygnałowa trzydecybelowa częstotliwość graniczna układu mnożącego
$\mathscr{F}(\cdot)$, $\mathscr{F}^{-1}(\cdot)$	— transformaty Fouriera: prosta, odwrotna
G, g	— bramka

G — konduktancja
g — konduktancja małosygnałowa (dynamiczna, różniczkowa)
G_L, G_O — konduktancja obciążenia
G_a, g_a — konduktancja dwójnika aktywnego: wielkosygnałowa, małosygnałowa
g_d, g_{ds} — konduktancje małosygnałowe: diody, kanału tranzystora polowego
G_m, g_m — transkonduktancje: wielkosygnałowa, małosygnałowa
G_{mr}, g_{mr} — transkonduktancje pary różnicowej: wielkosygnałowa, małosygnałowa
G_p, g_p — konduktancje przemiany: wielkosygnałowa, małosygnałowa
$G(s)$, $G_o(s)$ — transmitancje pętli fazowej: zamkniętej, otwartej
h, h_i — współczynnik zawartości harmonicznych napięciowych, prądowych
$H(s)$ — transmitancja (funkcja przenoszenia)
$H(\omega)$ — transmitancja częstotliwościowa (charakterystyka amplitudowo-fazowa)
$H^*(\omega)$ — wartość zespolona sprzężona z $H(\omega)$
$h(t)$ — odpowiedź impulsowa
$h_d(t)$, $h_p(t)$ — odpowiedzi impulsowe filtrów: dolnoprzepustowego, pasmowego
$H_d(\omega)$, $H_p(\omega)$ — $\mathcal{F}$ — transformaty funkcji: $h_d(t)$, $h_p(t)$
$h_{dI}(t)$, $h_{dQ}(t)$ — składowe odpowiedzi $h_d(t)$: synfazowa, kwadraturowa
$H_{dI}(\omega)$, $H_{dQ}(\omega)$ — $\mathcal{F}$ — transformaty funkcji: $h_{dI}(t)$, $h_{dQ}(t)$
$\mathcal{H}(\cdot)$, $\mathcal{H}^{-1}(\cdot)$ — transformaty Hilberta: prosta, odwrotna
I, i — prąd[1)]
I_S — prąd nasycenia diody
I_{CS}, I_{ES} — prądy nasycenia złączy: kolektorowego, emiterowego
I_{DSS} — prąd nasycenia drenu
i_B, i_C, i_D, i_E — prądy: bazy, kolektora, drenu, emitera
i_R — prąd różnicowy
$I_n(\cdot)$ — zmodyfikowana funkcja Bessela pierwszego rodzaju rzędu n
$\mathrm{Im}(\cdot)$ — składowa urojona
$\mathrm{j} = \sqrt{-1}$ — jednostka urojona
$J_n(\cdot)$ — funkcja Bessela zwyczajna pierwszego rodzaju rzędu n
K — wzmocnienie pętli fazowej
k — stała, stała Boltzmanna, stała nieliniowego układu operacyjnego, współczynnik
k_C — stała układu całkującego
k_d, k_g — nachylenia charakterystyki: detektora fazy, generatora VCO
k_f, k_p — stałe związane z modulacją częstotliwości, fazy
L — indukcyjność; jako symbol w indeksie dolnym oznacza wielkość związaną z obciążeniem
$L(s)$ — transmitancja członu (czwórnika) sprzężenia zwrotnego
$\mathcal{L}(\cdot)$, $\mathcal{L}^{-1}(\cdot)$ — transformata Laplace'a: prosta, odwrotna
M — indukcyjność wzajemna
m — nachylenie charakterystyki odcinkami liniowej, współczynniki głębokości modulacji amplitudy, wykładnik potęgi
$\mathcal{M}[\cdot]$ — operator iloczynowy modulacji
$N(\cdot)$ — funkcja opisująca
n — przekładnia napięciowa transformatora
N_o — jednostronna gęstość widmowa mocy szumów
$N_p(\cdot)$ — funkcja pomocnicza (przy wyznaczaniu funkcji opisującej)
P — średnia moc rzeczywista
$p = \Sigma + \mathrm{j}\Omega$ — unormowana pulsacja zespolona (zmienna bezwymiarowa)

---

1) Prądy i napięcia są oznaczone w następujący sposób: duża litera z dużą literą w indeksie dolnym oznacza wielkość stałą (np. I_A, U_A); duża litera z małą literą w indeksie oznacza amplitudę zespoloną (np. I_a, U_a); mała litera z dużą literą w indeksie oznacza wielkość chwilową, bieżącą (np. i_A, u_A); mała litera z małą literą w indeksie oznacza składową zmienną (np. i_a, u_a).

p	— parametr charakteryzujący pojemność złączową diody
P_b, P_m, P_n, P_u	— moce średnie: wstęg bocznych, sygnału modulującego, nośnej, sygnału zmodulowanego
PLL	— układ z fazową pętlą sprzężenia zwrotnego (pętla fazowa)
PM	— symbol modulacji fazy
Q	— dobroć; jako symbol w indeksie dolnym oznacza wielkość spoczynkową (przy braku zewnętrznego pobudzenia)
q	— ładunek elektronu
Q_R	— dobroć równoważna (obwodu drgań generatora)
Q_T	— wynikowa dobroć obwodu rezonansowego
QAM	— symbol kwadraturowej modulacji amplitudy
R	— rezystancja
r	— rezystancja małosygnałowa (dynamiczna, różniczkowa)
R, r	— jako symbol w indeksie dolnym oznacza wielkość różnicową lub odniesienia (referencyjną)
r, r_d, r_z	— rezystancje małosygnałowe: dwójnika aktywnego, diody, diody Zenera
r_{ds}, r_{we}	— rezystancje małosygnałowe: kanału tranzystora polowego, wejściowa
$\mathrm{Re}(\cdot)$	— składowa rzeczywista
S, s	— źródło
S	— wielkosygnałowa maksymalna szybkość narastania napięcia wyjściowego
$s = \sigma + j\omega$	— pulsacja zespolona
S_F	— współczynnik stabilności (stałości) częstotliwości generatora
SDP	— sterowany dzielnik prądowy (przetwornik Gilberta)
SSB, SSB-SC	— symbole jednowstęgowej modulacji amplitudy: z nośną, bez nośnej
$s(t)$	— sygnał
$s_b(t)$, $s_u(t)$	— funkcje kluczujące: bipolarna (symetryczna), unipolarna (niesymetryczna)
$\mathrm{sgn}(\cdot)$	— funkcja signum
T	— okres, stosunek zwrotny, temperatura bezwzględna
t	— czas, temperatura w skali Celsjusza
t_S	— czas osiągania synchronizacji (chwytania)
U, u	— napięcie[1]
U_D	— napięcie progowe diody
U_P	— napięcie progowe, napięcie przerwania (odcięcia) kanału tranzystora unipolarnego
U_H	— napięcie histerezy
$U_T = kT/q$	— potencjał termiczny
U_Z	— napięcie stabilizacji diody Zenera
U_{BB}, U_{CC}, U_{DD}, U_{EE}	— napięcia zasilania obwodu: bazy, kolektora, drenu, emitera
$U_{o\,max}$, $U_{o\,min}$	— wyjściowe napięcia nasycenia (wzmacniacza, ogranicznika, komparatora): — maksymalne, minimalne
u_I, u_i	— napięcia wejściowe
u_O, u_o	— napięcia wyjściowe
u_R, u_r	— napięcia różnicowe, napięcia odniesienia (referencyjne)
u_X, u_Y, u_Z	— napięcia wejściowe nieliniowego układu operacyjnego (torów X, Y, Z)
u_g, u_h, u_s, ...	— napięcia: generatora, heterodyny, sygnału, ...
v	— unormowany przebieg wejściowy lub wyjściowy (np. prąd wyjściowy pary różnicowej)
$v(t) = v_I(t) + jv_Q(t)$	— chwilowa amplituda zespolona (obwiednia zespolona) sygnału
$V(\omega) = V_I(\omega) + jV_Q(\omega)$ $\mathscr{F}$	— transformata obwiedni zespolonej $v(t)$
VCO	— generator przestrajany napięciem
VSB	— symbol modulacji amplitudy ze szczątkową wstęgą boczną

[1] Sposób oznaczania napięć: patrz I, i — prąd.

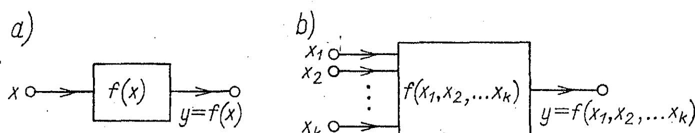
W	— immitancja
W_A, W_P	— immitancje dwójników: aktywnego, pasywnego
WB, WC, WE	— oznaczenie konfiguracji tranzystora: ze wspólną bazą, kolektorem, emiterem
x	— przebieg wejściowy unormowany (napięciowy lub prądowy), unormowana amplituda napięcia
x_h, x_s	— unormowane amplitudy napięcia: heterodyny, sygnału
Y	— admitancja
y	— przebieg wyjściowy unormowany, napięciowy lub prądowy
Z, Z_L	— impedancja, impedancja obciążenia
z	— unormowane napięcie (np. pary różnicowej, modulujące)
$z(t)$	— sygnał analityczny
$z_{AM}(t)$, $z_{FM}(t)$, ...	— sygnał analityczny z modulacją: *AM*, *FM*, ...
α	— prądowe wzmocnienie zwarciowe tranzystora w konfiguracji WB
$\alpha(\omega) = \mathrm{Re}[L(\omega)]$	— składowa rzeczywista transmitancji częstotliwościowej członu sprzężenia zwrotnego
β	— prądowe wzmocnienie zwarciowe tranzystora w konfiguracji WE, współczynnik sprzężenia zwrotnego
$\beta = \Delta\omega/\omega$	— indeks modulacji
$\gamma(\omega) = \mathrm{Im}[L(\omega)]$	— składowa urojona transmitancji częstotliwościowej członu sprzężenia zwrotnego
Δ, δ	— błąd bezwzględny, względny
δ	— współczynnik niezrównoważenia mostka *RC*
δ_0	— wynikowy statyczny błąd względny operacji mnożenia
$\delta(\cdot)$	— dystrybucja Diraca
$\Delta a, \Delta b, \ldots$	— przyrosty wielkości $a, b, \ldots$
$\Delta\phi$	— dewiacja fazy
$\Delta\omega$	— dewiacja pulsacji
$\Delta\omega_C$, $\Delta\omega_L$	— zakresy chwytania (wciągania) pętli fazowej
$\Delta\omega_N$	— nieliniowa poprawka częstotliwości
$\Delta\omega_T$	— zakres trzymania (śledzenia) pętli fazowej
η	— sprawność detekcji
η_{AM}	— współczynnik sprawności energetycznej sygnału *AM*
θ, θ_1	— kąt przepływu, kąt fazowy funkcji opisującej
ξ	— współczynnik tłumienia: filtru, pętli fazowej
τ	— stała czasowa
ϕ	— potencjał kontaktowy
$\phi(\omega)$	— charakterystyka fazowa wzmocnienia pętli
φ	— przesunięcie fazowe
φ_b	— błąd fazy pętli fazowej
φ_{b0}	— stały błąd fazy w stanie synchronizacji pętli fazowej
φ_g, φ_s	— przesunięcia fazowe przebiegów: wytwarzanego w generatorze VCO, synchronizującego pętlę fazową
$\phi_a(s)$, $\phi_b(s)$, ...	— $\mathscr{L}$ — transformaty przebiegów: $\varphi_a(t)$, $\varphi_b(t)$, ...
$\psi(\omega)$	— gęstość widmowa mocy
$\psi_a(\omega)$, $\psi_b(\omega)$, ...	— gęstości widmowe mocy sygnałów: $a(t)$, $b(t)$, ...
Ω	— pulsacja unormowana (zmienna bezwymiarowa)
ω	— pulsacja
ω_c, ω_g	— pulsacje graniczne filtrów
ω_h, ω_n, ω_p	— pulsacje: heterodyny, drgań swobodnych pętli, pośrednia
ω_o	— pulsacja generatora drgań sinusoidalnych, pulsacja nośna, pulsacja środkowa
ω_s	— pulsacja sygnału modulującego, pulsacja przebiegu synchronizującego
ω_M, ω_m	— pulsacje widma sygnału modulującego: maksymalna, minimalna
$\omega_i(t)$	— pulsacja chwilowa
$\mathbf{1}(\cdot)$	— funkcja jednostkowa

1

NIELINIOWE UKŁADY OPERACYJNE

1.1 UWAGI WSTĘPNE

Nieliniowymi układami operacyjnymi są nazywane układy elektroniczne realizujące określone nieliniowe operacje funkcyjne jednej zmiennej $y = f(x)$ bądź też wielu zmiennych $y = f(x_1, x_2, \ldots)$. W ogólnym opisię tych układów przez zmienne niezależne (pobudzenia) rozumie się przebiegi napięciowe lub prądowe, zadawane w postaci unormowanej (zmienne bezwymiarowe). Podobnie jest traktowana zmienna zależna (odpowiedź układu), tzn. w zapisie ogólnym y jest napięciowym lub prądowym przebiegiem wyjściowym, przedstawionym w postaci unormowanej (rys. 1/1).



1/1 Nieliniowe układy operacyjne wytwarzające funkcję jednej zmiennej (a) i wielu zmiennych (b)

Nieliniowe układy operacyjne stanowią elementarne bloki licznych, bardziej złożonych, układów elektronicznych lub urządzeń rozmaitego przeznaczenia. Zadaniem ich jest realizacja określonych nieliniowych operacji na przebiegach (sygnałach) wejściowych; np. nanoszenie informacji na przebieg nośny (modulacja), wydobywanie informacji z sygnału zmodulowanego (demodulacja), przetwarzanie sygnału na napięcie stałe proporcjonalne do jego wartości skutecznej, itd.

Mówiąc inaczej, układy te *generują* pewne funkcje nieliniowe, za pomocą których przebiegi wejściowe są *przetwarzane* na przebiegi wyjściowe o zadanych,

wynikających z określonych potrzeb, właściwościach. Z tego też względu, nieliniowe układy operacyjne są nazywane także *generatorami funkcji nieliniowych*, lub *nieliniowymi przetwornikami funkcyjnymi.*

1.1.1 Klasyfikacja układów

Klasyfikację nieliniowych układów operacyjnych można przeprowadzić z różnego punktu widzenia.

Ze względu na rodzaj realizowanej operacji układy te można podzielić na: podstawowe, wielofunkcyjne i kombinowane.

Podstawowe układy operacyjne realizują podstawowe dla większości praktycznych zastosowań, proste operacje nieliniowe, jak np.: mnożenie, dzielenie, podnoszenie do kwadratu, logarytmowanie, antylogarytmowanie (skrótowa nazwa operacji odwrotnej do logarytmowania). Do tej grupy układów zaliczone są również układy generujące inne elementarne funkcje jednej zmiennej, np. funkcje trygonometryczne, hiperboliczne oraz funkcje względem nich odwrotne.

Wielofunkcyjne układy operacyjne realizują jednocześnie dwie lub kilka nieliniowych operacji podstawowych, np. $y = x_1x_2^m$ lub $y = x_1(x_2/x_3)^m$, gdzie m — stała. Inaczej mówiąc, są to układy realizujące określone operacje wielofunkcyjne, do wypełnienia których należałoby użyć co najmniej dwóch nieliniowych układów podstawowych. Na przykład dla uzyskania operacji $y = x_1(x_2/x_3)^m$ należałoby zastosować trzy układy podstawowe, zestawione w kolejności: układ dzielący, układ potęgujący, układ mnożący.

Kombinowane układy operacyjne realizują różne inne, bardziej lub mniej złożone operacje nieliniowe, będące rozmaitą kombinacją operacji podstawowych. Układy takie są tworzone przez odpowiednie zestawienie podstawowych i wielofunkcyjnych układów operacyjnych, łącznie z wykorzystaniem układów wykonujących operacje liniowe, np.:

$$y = \frac{Ax+Bx^2}{1-Cx}; \quad A, B, C \text{ — stałe} \tag{1/1}$$

$$y = \sqrt{(x_1/x_2)^2+x_3^2} \tag{1/2}$$

Tak więc, zasadniczą różnicą pomiędzy układem kombinowanym a wielofunkcyjnym jest to, że w układzie kombinowanym oprócz nieliniowych występują także liniowe człony operacyjne. Na przykład, przy realizacji operacji (1/1) takimi liniowymi członami będą człony proporcjonalne (mnożenie przez stałą) oraz człony sumujący i odejmujący.

Inna linia podziału nieliniowych układów operacyjnych prowadzi do rozróżnienia układów *specjalizowanych* i *uniwersalnych.* Układy specjalizowane są przewidziane do realizacji tylko jednej, ściśle określonej operacji. Uniwersalnymi są zaś te układy, które można w prosty sposób dostosować (zwykle przez zwarcie odpowiednich i specjalnie w tym celu wyprowadzonych końcówek, podłączenie zewnętrznych rezystorów) do wykonywania także i innych operacji nie-

liniowych. Na przykład, uniwersalny układ mnożący (w swej najprostszej wersji) może wykonywać operację $y = \sqrt{x}$ lub $y = x_1/x_2$; uniwersalny układ logarytmujący może być użyty do generacji funkcji wykładniczej.

1.1.2 Metody generacji funkcji nieliniowych

Metody generacji funkcji nieliniowych można z grubsza podzielić na trzy podstawowe grupy:

1. Generacja funkcji zadanej, uzyskiwana w wyniku bezpośredniego wykorzystania fizycznych właściwości nieliniowych elementów (*metoda bezpośrednia*).

2. Przedstawienie funkcji zadanej w postaci kombinacji innych prostych funkcji, które można łatwo generować, a następnie generacja tych funkcji (*metoda pośrednia*).

3. Aproksymacja (lub interpolacja) funkcji zadanej, a następnie generacja funkcji aproksymującej (*metoda aproksymacyjna*).

Zanim przejdziemy do bliższego omówienia metod, rozpatrzymy tytułem wprowadzenia, kilka możliwości realizacji układu generującego funkcję

$$y = \mathrm{tgh}\, x \qquad (1/3)$$

Funkcję tę można wygenerować metodą bezpośrednią, wykorzystując nieliniowe właściwości pary różnicowej tranzystorów bipolarnych. Jak pokazano w dodatku 3, charakterystyka przejściowa $i_R = f(u_R)$ takiej pary jest opisana równaniem (D 3/9)

$$i_R = \alpha I \mathrm{tgh}\frac{u_R}{2U_T} \qquad (1/3a)$$

Para różnicowa realizuje więc bezpośrednio operację funkcyjną (1/3), przy czym zmienne są unormowane następująco: $x = u_R/2U_T$, $y = i_R/(\alpha I)$, (rys. 1/2a).

Przechodząc do metody pośredniej zapiszemy funkcję (1/3) w postaci jawnej, jako

$$y = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x}) \qquad (1/3b)$$

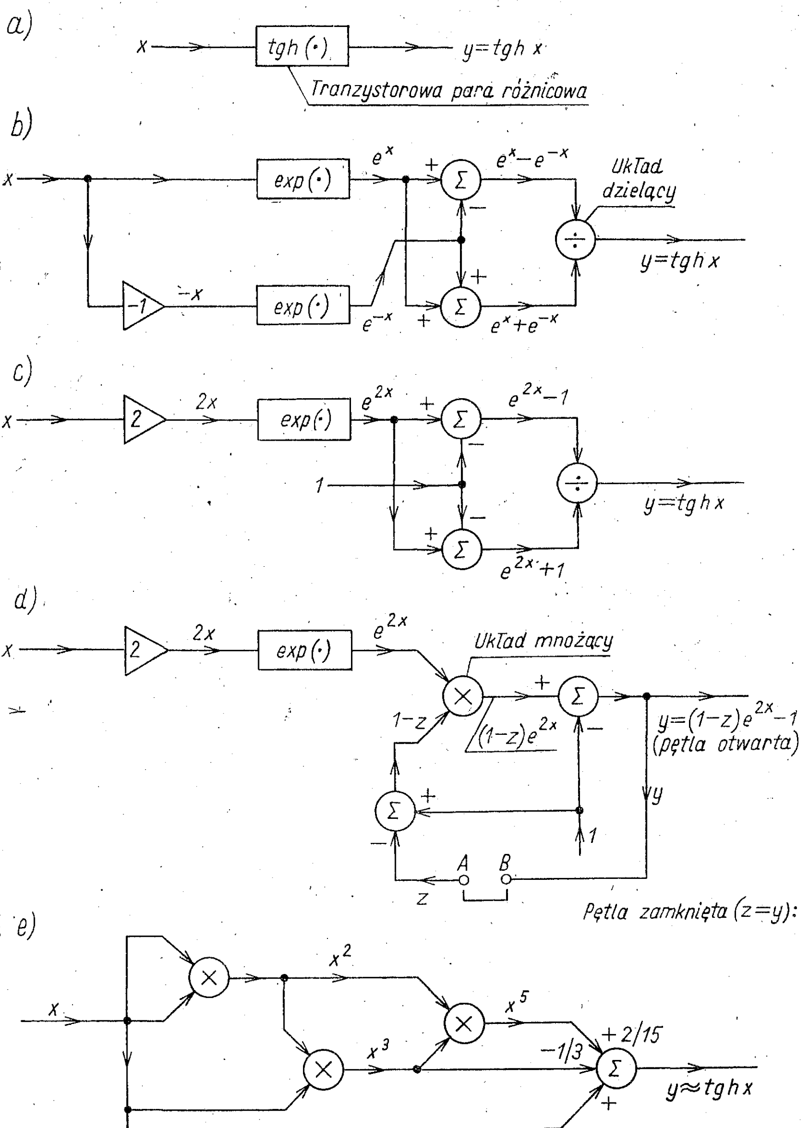
lub

$$y = (e^{2x} - 1)/(e^{2x} + 1) \qquad (1/3c)$$

oraz w postaci uwikłanej

$$y - (1-y)e^{2x} + 1 = 0 \qquad (1/3d)$$

Pierwsza forma zapisu (1/3b) mówi nam, iż operacja powinna być realizowana następującymi kolejnymi etapami: najpierw generacja funkcji e^x (za pomocą członu wykładniczego) oraz funkcji e^{-x} (inwertor znaku plus człon wykładniczy), a następnie realizacja dzielnej, dzielnika i ilorazu (odpowiednio: sumator, sumator, człon dzielący). Ten tok postępowania prowadzi do układu o schemacie funkcjonalnym pokazanym na rys. 1/2b.



1/2 Schematy funkcjonalne układów generujących funkcję tghx: a) metodą bezpośrednią; b), c), d) metodą pośrednią; e) metodą aproksymacyjną

Operując drugą formą zapisu (1/3c) otrzymujemy układ prostszy, z jednym tylko członem eksponencjalnym (człony generujące funkcję e^{-x} zostały zastąpione członem proporcjonalnym, wytwarzającym funkcję $2x$, rys. 1/2c).

Z trzeciej formy zapisu (1/3d) wynika, że zadaną operację można uzyskać w układzie pokazanym na rys. 1/2d. Układ ten, przy otwartej pętli sprzężenia zwrotnego (końcówki A—B rozwarte) generuje funkcję dwu zmiennych $y = f(x, z) = (1-z)\exp(2x)-1$, a po zamknięciu pętli (końcówki A—B zwarte, tzn. $z = y$) — funkcję o postaci uwikłanej (1/3d).

Porównując schematy funkcjonalne z rys. 1/2c i rys. 1/2d widzimy, że operację dzielenia można zastąpić operacją mnożenia, realizowaną w pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego.

Ilustrując metodę aproksymacyjną, przyjmijmy dla uproszczenia, że funkcję tgh$x$ przybliżamy szeregiem potęgowym

$$\mathrm{tgh}\,x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \ldots$$

w którym zostaną uwzględnione tylko 3 pierwsze wyrazy. Funkcja aproksymująca jest więc wielomianem piątego stopnia

$$y = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \qquad (1/3e)$$

Można ją wygenerować w układzie zestawionym z trzech układów mnożących i sumatora (rys. 1/2e). Aproksymacja funkcji wielomianem wyższego stopnia zmniejsza co prawda błąd przybliżenia, prowadzi jednak do dalszej komplikacji układu (uwzględnienie każdego kolejnego wyrazu szeregu wymaga zastosowania dodatkowego układu mnożącego).

Rozpatrzyliśmy kilka sposobów generacji funkcji tgh$x$. Każdy z nich prowadzi do innej struktury układu. Z rozważań tych wynikają m.in. wnioski ogólniejsze, dotyczące także realizacji licznych innych nieliniowych operacji funkcyjnych.

Wybór danej metody zależy od rodzaju realizowanej operacji oraz od dodatkowych wymagań stawianych układowi operacyjnemu (najistotniejsze to: prosta konstrukcja, szybkość działania, dynamika przebiegów wejściowych, dopuszczalne błędy realizowanej operacji).

Metoda bezpośrednia polega na bezpośrednim wykorzystaniu nieliniowych charakterystyk elementów elektronicznych i prowadzi do układów o najprostszej konstrukcji. Z prostą konstrukcją układu wiążą się na ogół także i inne jego zalety, zwłaszcza szybkość działania oraz dokładność realizowanej operacji. Można więc bez obawy popełnienia większego błędu stwierdzić, że metoda bezpośrednia prowadzi do najkorzystniejszego rozwiązania układu. Jednakże możliwości wytwarzania funkcji nieliniowych opierające się na bezpośrednim wykorzystaniu charakterystyk nieliniowych elementów półprzewodnikowych są dość ograniczone. W konsekwencji, metodą tą można realizować jedynie niektóre operacje podstawowe.

Znacznie szersze możliwości generacji funkcji nieliniowych stwarza metoda pośrednia. W oparciu o tę metodę działa dominująca większość układów operacyjnych.

W metodzie pośredniej generowaną funkcję wyrażamy przez inne funkcje, dające się łatwiej generować. Funkcja jest więc wytwarzana pośrednio, pewnymi kolejnymi etapami, wynikającymi z przyjętego sposobu jej przedstawienia.

W wielu przypadkach zadaną funkcję można generować za pomocą kilku układów o różnych strukturach. Jeśli takie możliwości występują, to wybór rozwiązania powinien

opierać się na szczegółowej analizie właściwości poszczególnych wersji układowych (np. wynikowy błąd operacji, koszt układu, itp.). Wyniki takiej analizy zazwyczaj prowadzą do wniosku, że preferowanym rozwiązaniem jest to, które zawiera najmniejszą liczbę podstawowych nieliniowych członów operacyjnych (na ogół operacje nieliniowe są dokonywane z większym błędem a także są bardziej kosztowne, aniżeli operacje liniowe).

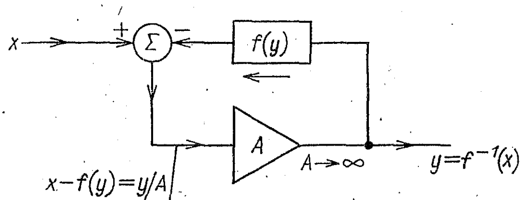
W metodzie aproksymacyjnej generowana funkcja jest, z założenia, tylko pewnym przybliżeniem funkcji zadanej. Dobierając funkcję aproksymującą należy mieć na względzie zarówno błąd przybliżenia, jak i łatwość jej realizacji.

W zastosowaniach praktycznych jako funkcje aproksymujące przyjmowane są: funkcja przedziałami prostoliniowa, wielomian potęgowy oraz funkcja będąca liniową kombinacją charakterystyk przejściowych tranzystorowych par różnicowych.

Inna linia podziału metod generacji funkcji nieliniowych prowadzi do wyróżnienia metod z zastosowaniem: funkcji jawnej, funkcji odwrotnej oraz funkcji uwikłanej.

Kryterium podziału jest wyjściowa postać funkcji, na podstawie której poszukujemy struktury układu.

Metoda funkcji jawnej została już objaśniona na przykładach (rys. 1/2b, c), nie wymaga więc dodatkowego komentarza.



1/3 Metoda funkcji odwrotnej

Metoda funkcji odwrotnej została przedstawiona na schemacie z rys. 1/3. Jeśli dany jest człon nieliniowy generujący funkcję $x = f(y)$, monotoniczną i jednowartościową, to funkcję odwrotną $y = f^{-1}(x)$ można uzyskać umieszczając człon ten w pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego wzmacniacza o dostatecznie dużym wzmocnieniu A. Zapisując równanie dla węzła sumacyjnego mamy

$$x - f(y) = y/A$$

Zatem układ realizuje zamierzoną operację z dokładnością y/A, a jeśli $A \to \infty$, to na jego wyjściu otrzymujemy

$$y = f^{-1}(x)$$

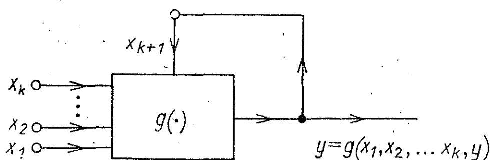
Metoda funkcji uwikłanej, przedstawiona na schemacie blokowym z rys. 1/4, może być stosowana wówczas, gdy zadaną funkcję $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ można przedstawić w postaci

$$y - g(x_1, x_2, \ldots, x_k, y) = 0 \qquad (1/4)$$

Jak widać, generacja funkcji k-zmiennych, $y = f(\cdot)$, odbywa się przez wykorzystanie członu nieliniowego wytwarzającego funkcję $(k+1)$ zmiennych $y = g(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1})$, objętego pętlą sprzężenia zwrotnego w taki sposób, że

$$x_{k+1} = y$$

Metoda funkcji uwikłanej jest szczególnie użyteczna przy generacji funkcji wymiernej, bądź też innych funkcji o postaci ułamkowej. Pozwala ona wymaganą w takich przypadkach operację dzielenia zrealizować za pomocą sprzężenia zwrotnego.



1/4 Generacja funkcji nieliniowej metodą funkcji uwikłanej

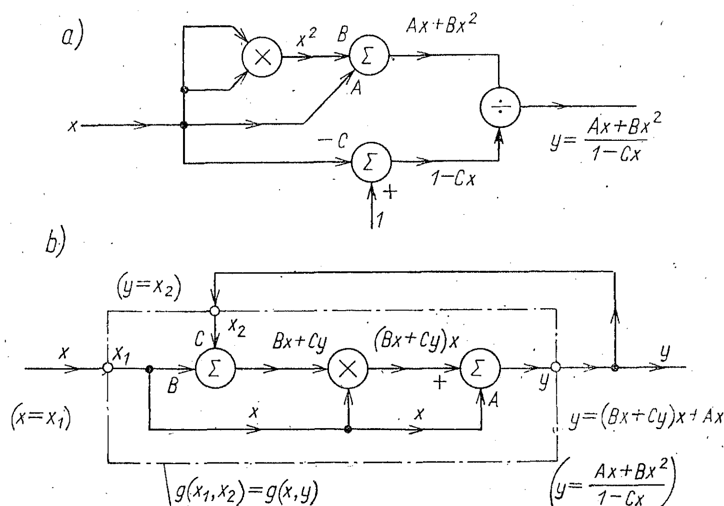
Z metodą tą mieliśmy już do czynienia przy omawianiu możliwości generacji funkcji tgh$x$ (por. układ z rys. 1/2d, gdzie $k = 2$, oraz $x_1 = x$, $x_2 = z$, $g(x_1, x_2) = g(x, z) = (1-z)\exp(2x)-1$).

W celu bliższego objaśnienia tej metody, rozpatrzmy jeszcze jeden przykład: poszukajmy układu generującego funkcję

$$y = \frac{Ax+Bx^2}{1-Cx}; \quad |Cx| < 1 \tag{1/5}$$

gdzie A, B, C — stałe.

Stosując metodę funkcji jawnej, tzn. dobierając i odpowiednio zestawiając



1/5 Układy generujące funkcję $y = (Ax+Bx^2)/(1-Cx)$ uzyskane w wyniku zastosowania: a) metody funkcji jawnej; b) metody funkcji uwikłanej

człony realizujące licznik, mianownik i iloraz, otrzymujemy układ pokazany na rys. 1/5a. Jeśli jednak zadaną funkcję przedstawimy w postaci uwikłanej

$$y = x(Bx+Cy)+Ax$$

to natychmiast widzimy, że funkcję tę można wytworzyć w układzie z rys. 1/5b, nie wymagającym stosowania członu dzielącego.

1.1.3 Błędy operacji nieliniowej

Rzeczywiste układy realizują nieliniowe operacje w sposób przybliżony, tzn. z pewnym błędem, i to jedynie tylko w pewnych ograniczonych przedziałach wartości przebiegów wejściowych. Błąd operacji nieliniowej zależy, i to na ogół w sposób bardzo złożony, od wielu czynników. Zależy on nie tylko od rodzaju realizowanej operacji, konkretnego sposobu rozwiązania układu, zakresu zmian wpływających na układ czynników zewnętrznych, jak zmiany temperatury, napięć zasilających itd., lecz także od rodzaju zastosowanych pobudzeń. Rodzaj zastosowanych pobudzeń może mieć nawet dominujący wpływ na wartość błędu operacji. Przykładem dwóch jakościowo odmiennych pobudzeń, mających skrajnie różny wpływ na wartość błędu, mogą być napięcia stałe oraz napięcia szybkozmienne o dużej dynamice poziomów i bogatych widmach częstotliwościowych.

Dlatego też, charakteryzując wstępnie jakość nieliniowego układu operacyjnego, przyjmuje się ściśle określone pobudzenia. Są one dobierane w taki sposób, aby można było uzyskać jak najwięcej informacji o praktycznej przydatności układu.

Jednym z parametrów powszechnie stosowanych do oceny właściwości układu jest wynikowy statyczny błąd względny operacji (oznaczany dalej symbolem δ_0). Jest on rozumiany jako błąd maksymalny, występujący przy sterowaniu zacisków wejściowych układu napięciami stałymi o wartościach zawartych w całym dopuszczalnym ich przedziale. Zakłada się zwykle przy tym, że układ pracuje w temperaturze normalnej (25°C), przy stałym napięciu zasilania.

Co się zaś tyczy błędów dynamicznych, których źródłem jest zależność różnych parametrów układu od częstotliwości, to są one wyznaczane przy przyjęciu ściśle sprecyzowanych dla danego układu pobudzeń (np. jedno wejście jest sterowane przebiegiem sinusoidalnym o ustalonej amplitudzie i częstotliwości, zaś pozostałe wejścia są polaryzowane napięciami stałymi).

Niektóre miary charakteryzujące błędy statyczne i dynamiczne operacji zostaną omówione przy rozpatrywaniu konkretnych układów.

Podsumowując część wstępną, należy stwierdzić, że wielka różnorodność nieliniowych układów operacyjnych utrudnia ich systematyczne i wyczerpujące omówienie. Dlatego też w dalszych rozważaniach będziemy uwzględniać jedynie układy znajdujące najszersze zastosowania. Główną uwagę poświęcimy podstawowym nieliniowym układom operacyjnym. Stanowią one bowiem elementarne bloki, umożliwiające — wraz z zastosowaniem liniowych członów ope-

racyjnych — tworzenie układów generujących rozmaite inne funkcje nieliniowe, jednej bądź też wielu zmiennych.

1.2 UKŁADY MNOŻĄCE

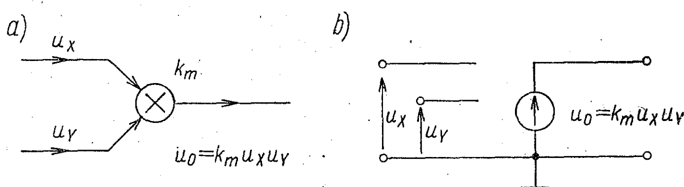
Wśród nieliniowych układów operacyjnych znaczącą rolę odgrywają układy mnożące. Dlatego też układy te rozpatrzymy najpierw, poświęcając im więcej uwagi aniżeli omawianym dalej układom innych rodzajów.

Zadaniem układu mnożącego (nazywanego także w skrócie *mnożnikiem*) jest wytworzenie napięcia wyjściowego u_O proporcjonalnego do iloczynu dwóch wejściowych napięć sterujących u_X i u_Y

$$u_O = k_m u_X u_Y = \frac{u_X u_Y}{E_R} \tag{1/6}$$

przy czym $k_m = 1/E_R$ jest stałą mnożenia, E_R — normującym napięciem odniesienia, zazwyczaj równym $+10$ V lub -10 V.

Na rysunku 1/6 pokazano oznaczenie graficzne idealnego układu mnożącego oraz jego model zastępczy.



1/6 Symbol graficzny (a) oraz schemat zastępczy (b) idealnego układu mnożącego

Układ dokonujący operacji mnożenia przy dowolnych znakach napięć u_X i u_Y jest nazywany *czterokwadrantowym* (lub czteroćwiartkowym). Jeśli dopuszczalne są napięcia wejściowe tylko o jednej biegunowości tzn. u_X, u_Y — unipolarne, to układ nosi nazwę *jednokwadrantowego*. W przypadku pośrednim, tzn. gdy ustalona jest biegunowość tylko jednego napięcia wejściowego, układ jest określany jako *dwukwadrantowy*.

Rzeczywisty (nieidealny) układ mnożący realizuje operację iloczynową z pewnym błędem, tzn.

$$u_O = \frac{u_X u_Y}{E_R} + \Delta = \frac{u_X u_Y}{E_R}(1+\delta) \tag{1/7}$$

gdzie: Δ, δ oznaczają odpowiednio bezwzględny i względny błąd mnożenia.

Jakość układu rzeczywistego jest określona wieloma parametrami charakteryzującymi statyczne i dynamiczne błędy mnożenia. W dalszym ciągu, dla scharakteryzowania właściwości układów mnożących, będziemy — z braku

miejsca — posługiwali się tylko trzema następującymi parametrami (wyznaczanymi doświadczalnie)[1]:

δ_0 — wynikowym statycznym błędem względnym;
f_{3dB} — małosygnałową trzydecybelową częstotliwością graniczną;
S — wielkosygnałową maksymalną szybkością narastania napięcia wyjściowego.

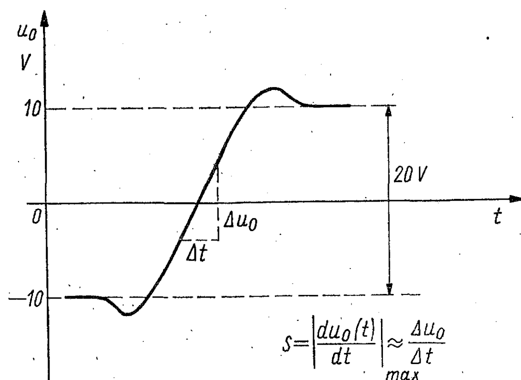
Błąd δ_0 jest maksymalną odchyłką względną δ operacji (1/7), występującą przy sterowaniu obu wejść napięciami stałymi o wartościach mieszczących się w przedziałach przyjętych jako zakresy dopuszczalne (w układzie czterokwadrantowym, przy $|E_R| = 10$ V, jako standardowe zakresy przyjmowane są: $|u_X|, |u_Y| \leqslant 10$ V).

Częstotliwość f_{3dB} jest określona podobnie jak trzydecybelowa częstotliwość graniczna układu liniowego. Do jednego wejścia układu mnożącego przykłada się napięcie stałe (np. w warunkach standardowych, tzn. dla $|E_R| = 10$ V oraz $|u_X|, |u_Y| \leqslant 10$ V, napięcie to jest równe +10 V lub −10 V). W tej sytuacji, z punktu widzenia zacisków: wejście drugie — wyjście, układ mnożący może być traktowany jako wzmacniacz napięciowy. Taki „wzmacniacz" steruje się napięciem sinusoidalnym i wyznacza częstotliwość trzydecybelowego spadku modułu wzmocnienia. Standardowa amplituda pobudzenia wynosi 0,5 V (jest to wartość równa 2,5% wartości pełnego standardowego zakresu wysterowania, przyjmowana umownie w znaczeniu „sygnał mały").

Maksymalna szybkość narastania napięcia wyjściowego S jest definiowana podobnie, jak dla wzmacniaczy. Dla układów mnożących standardowe warunki pomiaru parametru S są następujące. Na jedno wejście przykłada się napięcie stałe równe +10 V lub −10 V, wejście drugie jest sterowane symetrycznym napięciem prostokątnym o wartości międzyszczytowej 20 V. Wielkość S, zdefiniowaną jako

$$S = \left|\frac{du_O(t)}{dt}\right|_{max} \tag{1/8}$$

wyznacza się na podstawie przebiegu czasowego odpowiedzi (rys. 1/7).



1/7 **Odpowiedź układu mnożącego na standardowe pobudzenie testujące parametr S**

[1] Bardziej szczegółowe omówienie błędów można znaleźć np. w pracach [2, 15].

1.2.1 Metody realizacji

Układy mnożące mogą być realizowane kilkoma różnymi metodami, spośród których najczęściej stosowane są metody następujące:

1) metoda modulacji szerokości i amplitudy impulsów;
2) metoda z zastosowaniem operacji logarytmicznej i wykładniczej;
3) metoda z zastosowaniem kwadratorów;
4) metoda sterowanego podziału prądu (zmiennej transkonduktancji).

Poniżej podamy krótką charakterystykę układów realizowanych tymi metodami.

Układy z modulacją szerokości i amplitudy impulsów

W układach tego rodzaju jest lokalnie wytwarzany impulsowy przebieg nośny, okresowy, na ogół trójkątny. Przebieg ten jest modulowany dwukrotnie w taki sposób, że szerokość impulsów jest proporcjonalna do jednego napięcia wejściowego, a amplituda impulsów — do drugiego napięcia wejściowego. W wyniku tych operacji otrzymuje się przebieg wyjściowy, którego wartość średnia jest proporcjonalna do iloczynu obu sygnałów wejściowych $u_X u_Y$.

Na rysunku 1/8a pokazano schemat funkcjonalny typowego układu realizującego operację mnożenia metodą dwukrotnej modulacji. Do komparatora jest doprowadzane napięcie u_X oraz symetryczne napięcie trójkątne $u_T(t)$ o amplitudzie E_R i zerowej wartości średniej. Z wyjścia komparatora otrzymujemy przebieg $u_S(t)$ (rys. 1/8b), sterujący kluczem elektronicznym K, przy czym

$$u_S(t) = \begin{cases} U_{SM}, & u_T < u_X \\ U_{Sm}, & u_T > u_X \end{cases}$$

gdzie U_{SM}, U_{Sm} są napięciami nasycenia komparatora, odpowiednio maksymalnym i minimalnym.

Jak to można z łatwością sprawdzić na podstawie rys. 1/8b, dla napięcia u_X zachodzi związek

$$\frac{u_X}{E_R} = \frac{2\tau}{T} - 1 \tag{1/9}$$

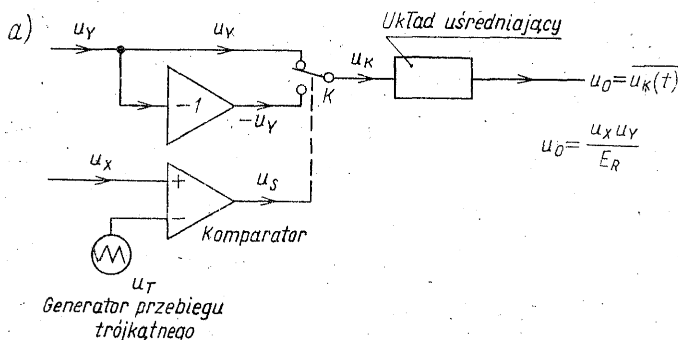
w którym τ/T jest współczynnikiem wypełnienia impulsu, T — okresem przebiegu trójkątnego.

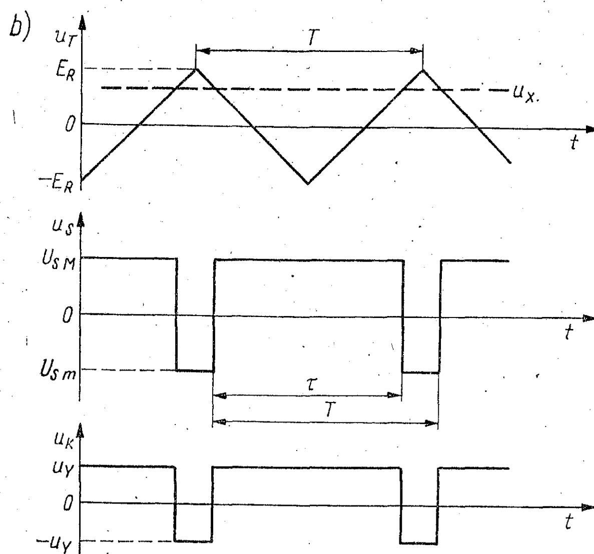
W wyniku symetrycznego kluczowania napięcia u_Y, uzyskujemy napięcie $u_K(t)$, którego wartość średnia — wydzielona za pomocą filtru dolnopasmowego — wynosi

$$\overline{u_K(t)} = u_O = \left(\frac{2\tau}{T} - 1\right) u_Y \tag{1/10}$$

Wobec tego, po podstawieniu (1/9) do (1/10) otrzymujemy

$$u_O = \frac{u_X u_Y}{E_R} \tag{1/11}$$





1/8 Mnożenie metodą modulacji szerokości i amplitudy impulsów: a) schemat funkcjonalny; b) przebiegi czasowe

co świadczy o realizacji operacji mnożenia, przy napięciu normującym E_R, równym amplitudzie lokalnego przebiegu trójkątnego.

Dokładność tej metody mnożenia może być bardzo duża (np. błąd statyczny δ_0 w zakresie 0,01...0,1%). Krytycznym czynnikiem, decydującym o poprawnej pracy układu, jest czas przełączania klucza. Czas ten powinien być pomijalnie mały w porównaniu z okresem T. Występuje też ograniczenie bezpośrednio związane ze sposobem modulacji. Częstotliwość sygnałów wejściowych musi być znacznie mniejsza od częstotliwości uśrednienia, aby czas uśrednienia był dostatecznie duży.

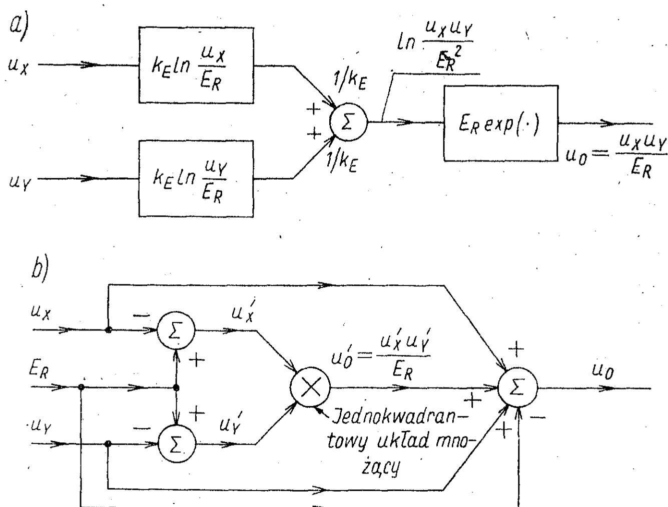
Ograniczenia te powodują, że układy z podwójną modulacją są stosowane jedynie w przypadku mnożenia sygnałów stosunkowo wolnozmiennych (praktycznie: $f_{3\,dB} < 1$ kHz, $S < 0{,}7$ V/ms). Należy przy tym podkreślić, że są to układy dość rozbudowane i przez to kosztowne.

Układy z zastosowaniem operacji logarytmicznej i wykładniczej

Zasada działania tego rodzaju układów mnożących jest oparta na schemacie funkcjonalnym z rys. 1/9a i polega na wykorzystaniu zależności

$$E_R \exp\left(\ln \frac{u_X}{E_R} + \ln \frac{u_Y}{E_R}\right) = \frac{u_X u_Y}{E_R} = u_O \tag{1/12}$$

Jak widać, operację mnożenia uzyskuje się w wyniku zastosowania trzech, kolejno dokonywanych operacji pośrednich. Sygnały wejściowe u_X i u_Y są najpierw logarytmowane, następnie jest realizowana suma logarytmów, a w końcu sygnał wyjściowy podlega delogarytmowaniu w układzie wykładniczym (układy logarytmiczne i wykładnicze są omówione w p. 1.4).



1/9 Mnożenie z zastosowaniem operacji logarytmicznej i wykładniczej: a) schemat funkcjonalny układu jednokwadrantowego; b) zasada działania układu czterokwadrantowego

Jest oczywiste, że układy z pośrednim logarytmowaniem realizują jednokwadrantową operację mnożenia.

Istnieje kilka rozwiązań, umożliwiających dostosowanie jednokwadrantowych układów mnożących do wykonywania czterokwadrantowej operacji mnożenia. Schemat funkcjonalny najprostszego konstrukcyjnie układu spełniającego to zadanie podano na rys. 1/9b. Z układem jednokwadrantowym, który realizuje funkcję

$$u'_O = \frac{u'_X u'_Y}{E_R}; \quad E_R > 0 \tag{1/13}$$

współpracują trzy dodatkowe sumatory. Do sumatorów tych jest doprowadzane stałe napięcie kompensujące o wartości równej E_R, przy czym

$$\begin{aligned} u'_X &= E_R - u_X > 0 \\ u'_Y &= E_R - u_Y > 0 \end{aligned} \tag{1/14}$$

Wobec tego napięcie wyjściowe układu jednokwadrantowego wynosi

$$u'_O = \frac{(E_R-u_X)(E_R-u_Y)}{E_R} = E_R-u_X-u_Y+\frac{u_X u_Y}{E_R} \qquad (1/15)$$

Ponieważ sumator wyjściowy realizuje operację

$$u_O = u'_O-E_R+u_X+u_Y$$

zatem, po uwzględnieniu (1/15) otrzymujemy

$$u_O = \frac{u_X u_Y}{E_R}$$

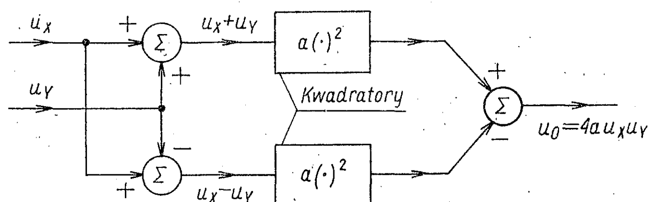
Przyjmijmy dla przykładu, że dopuszczalne wartości napięć u'_X i u'_Y zawierają się w zakresie 0,01...20 V. Wprowadzając $E_R = 10$ V umożliwiamy stosowanie napięć wejściowych u_X i u_Y o wartościach mieszczących się w zakresie -10 V ... ... $+9{,}99$ V. Jest to więc układ czterokwadrantowy.

Charakteryzując ogólnie czterokwadrantowe układy mnożące z zastosowaniem operacji logarytmiczno-wykładniczej, można powiedzieć, że są to układy o umiarkowanym stopniu złożoności konstrukcyjnej, względnie małym wynikowym statycznym błędzie mnożenia ($\delta_0 = 0{,}1 ... 0{,}5\%$), pozwalające przetwarzać sygnały niezbyt szybkozmienne (orientacyjnie: $f_{3\,dB} < 250$ kHz, $S < 0{,}5$ V/µs).

Układy z zastosowaniem kwadratorów

Kwadratorem jest nazywany przetwornik nieliniowy generujący funkcję kwadratową $y = ax^2$. W układzie z takimi przetwornikami (rys. 1/10) mnożenie sygnałów u_X i u_Y przebiega zgodnie z relacją

$$a(u_X+u_Y)^2-a(u_X-u_Y)^2 = 4au_X u_Y = u_O$$



1/10 Mnożenie z zastosowania kwadratorów

Otrzymujemy zatem

$$u_O = \frac{u_X u_Y}{E_R}; \qquad E_R = 1/(4a)$$

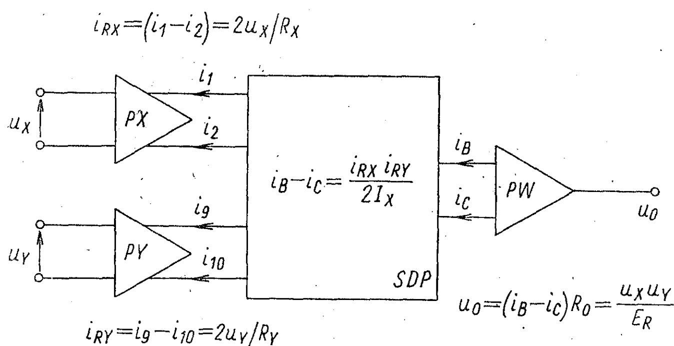
Dokładność mnożenia zależy głównie od jakości kwadratorów i może być dość duża (np. $\delta_0 = 0{,}25 ... 0{,}5\%$). Jednakże precyzyjne szerokopasmowe kwadratory są układami kosztownymi. Realizuje się je za pomocą sieci zesta-

wionej z diod półprzewodnikowych i rezystorów. Diody pracują jako klucze, sterujące rozpływem prądu w sieci. Klucze są włączane po przekroczeniu odpowiedniej wartości progowej napięcia wejściowego. Tworzy się w ten sposób charakterystykę odcinkami liniową, aproksymującą charakterystykę paraboliczną $y = ax^2$. Ponieważ błąd aproksymacji maleje ze wzrostem liczby odcinków liniowych, precyzyjne kwadratory są więc układami konstrukcyjnie złożonymi (duża liczba diod i rezystorów, dokładne ustawienie napięć progowych i ich temperaturowa kompensacja, dokładna realizacja nachylenia poszczególnych odcinków liniowych charakterystyki).

Ogólnie można stwierdzić, że precyzyjne szerokopasmowe układy mnożące tego typu cechują się małym statycznym błędem mnożenia ($\delta_0 < 0{,}5\%$) oraz dobrymi parametrami dynamicznymi: $f_{3dB} < 2$ MHz, $S < 3$ V/μs, znacznie przewyższającymi parametry układów omawianych poprzednio.

Układy ze sterowanym podziałem prądu

Schemat funkcjonalny układu mnożącego ze sterowanym rozpływem prądu (zwanego też transkonduktancyjnym) przedstawiono na rys. 1/11. Układ składa się z dwóch przetworników wejściowych *PX* (toru *X*) i *PY* (toru *Y*), sterowanego dzielnika prądowego *SDP* oraz przetwornika wyjściowego *PW*. Przetworniki *PX*, *PY* i *PW* dokonują operacji liniowych. Kluczowym podzespołem układu jest sterowany dzielnik prądowy.



1/11 Schemat funkcjonalny układu mnożącego ze sterowanym podziałem prądu

Zadaniem przetworników *PX* i *PY* jest przekształcenie napięć wejściowych na prądy różnicowe wg relacji

$$i_{RX} = i_1 - i_2 = \frac{2}{R_X} u_X \tag{1/16a}$$

$$i_{RY} = i_9 - i_{10} = \frac{2}{R_Y} u_Y \tag{1/16b}$$

gdzie: $2/R_X$, $2/R_Y$ — stałe przetwarzania.

Dzielnik prądowy *SDP* jest sterowany prądami (1/16) i wytwarza wyjściowy prąd różnicowy i_R opisany zależnością

$$i_R = i_B - i_C = \frac{i_{RX} i_{RY}}{2I_X} \tag{1/17}$$

gdzie I_X jest wydajnością lokalnego źródła stałoprądowego. Podstawiając (1/16) do (1/17) otrzymujemy związek

$$i_R = \frac{2}{R_X R_Y I_X} u_X u_Y \tag{1/18}$$

świadczący o realizacji iloczynu dwóch sygnałów wejściowych.

Prąd różnicowy i_R jest przekształcany za pomocą liniowego przetwornika *PW* na napięcie u_O. Jeśli — jak to przyjęto na rys. 1/11 — przetwornik wyjściowy realizuje operację

$$u_O = (i_B - i_C) R_0 = i_R R_0 \tag{1/19}$$

to po uwzględnieniu (1/18) otrzymujemy

$$u_O = \frac{u_X u_Y}{E_R} \tag{1/20}$$

gdzie normujące napięcie odniesienia E_R

$$E_R = \frac{R_X R_Y I_X}{2R_0} \tag{1/21}$$

Jak widać, metoda mnożenia — zgodnie z przypisywaną jej nazwą — opiera się na wykorzystaniu specyficznego podzespołu określanego mianem sterowanego dzielnika prądu. Inne podzespoły układu mnożącego realizują proste operacje liniowe. Koncepcję tej metody mnożenia opracował Gilbert [1], wykazując, że sterowany dzielnik prądowy (określany dziś już nazwą przetwornika Gilberta) można realizować za pomocą zestawu sześciu tranzystorów bipolarnych o odpowiednio wysymetryzowanych charakterystykach (w p. 1.2.2 omówimy to bliżej).

Główną zaletą metody sterowanego podziału prądu jest łatwość i taniość realizacji układów techniką scaloną. Układy mnożące w wersji scalonej zapewniają stosunkowo małe statyczne błędy mnożenia ($\delta_0 = 0{,}5...2\%$) i cechują się dużą szybkością działania (np. $f_{3\,dB} = 10$ MHz, $S = 120$ V/μs).

W podsumowaniu przedstawionego powyżej skrótowego przeglądu typowych metod mnożenia, należy stwierdzić, że rozwiązania ze sterowaniem podziałem prądu odznaczają się najkorzystniejszymi cechami użytkowymi. Stanowią one obecnie najbardziej rozpowszechnioną, a przy tym prostą i stosunkowo dokładną realizację operacji mnożenia. W związku z tym, będziemy omawiali dalej tylko takie rozwiązania[1]. Rozpatrzymy najpierw podstawowy czterokwadrantowy układ mnożący, którego zasadę działania przedstawiono na schemacie funkcjonalnym z rys. 1/11, a następnie omówimy niektóre jego zmodyfikowane wersje.

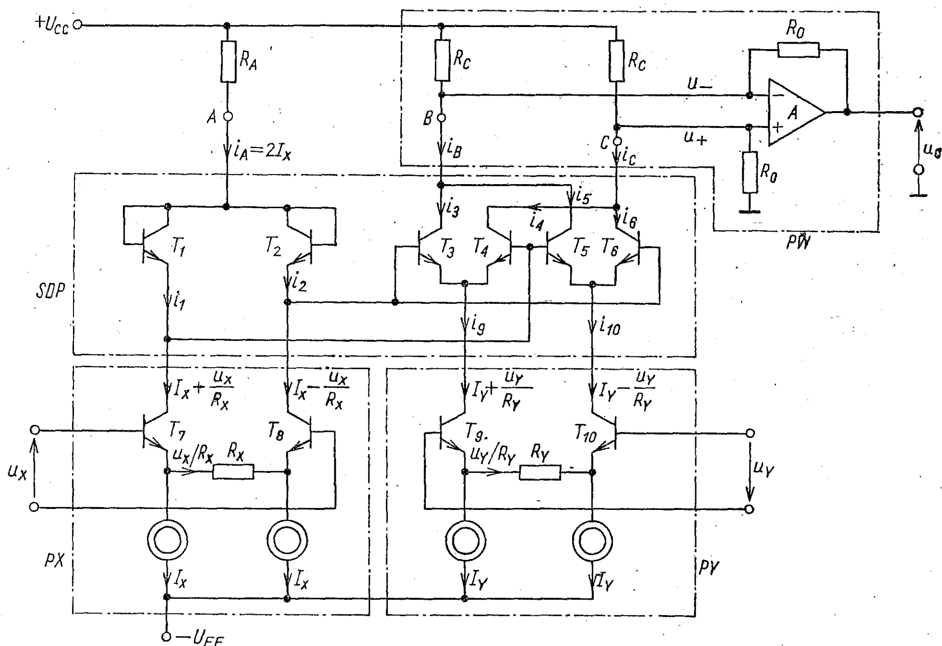
---

[1] Szersze omówienie innych rozwiązań można znaleźć np. w pracach [3, 5...7, 9...12].

1.2.2 Podstawowy układ transkonduktancyjny

Na rysunku 1/12 przedstawiono uproszczony schemat ideowy układu mnożącego o schemacie funkcjonalnym z rys. 1/11.

W analizie układu, którą przeprowadzimy poniżej, przyjmiemy, że wszystkie tranzystory pracują w normalnym obszarze aktywnym i mają bardzo duże wzmocnienie prądowe ($\alpha = 1$).



1/12 Schemat ideowy czterokwadrantowego układu mnożącego

Liniowymi przetwornikami napięcie-prąd, *PX* oraz *PY*, są wzmacniacze różnicowe z silnym sprzężeniem zwrotnym, zrealizowanym w obwodzie emiterów (rezystancje R_X oraz R_Y). Wzmacniacze takie działają jak opisany w dodatku D3 układ z rys. D3/7a. Możemy więc wykorzystać wyniki przeprowadzonej tam analizy, uaktualniając jedynie oznaczenia.

Przy spełnieniu warunków

$$I_X R_X \gg 2U_T; \qquad |u_X| < I_X R_X \tag{1/22a}$$

oraz

$$I_Y R_Y \gg 2U_T; \qquad |u_Y| < I_Y R_Y \tag{1/22b}$$

(wg (D3/31)) wzmacniacze mają małosygnałowe transkonduktacje o wartościach równych odpowiednio $1/R_X$ i $1/R_Y$ (wg (D3/32)), z błędem nieliniowości b określonym zależnością (D3/37).

Na tej podstawie możemy napisać, że wyjściowymi prądami przetworników są:

$$i_1 = I_X + u_X/R_X \tag{1/23a}$$

$$i_2 = I_X - u_X/R_X \tag{1/23b}$$

oraz

$$i_9 = i_3 + i_4 = I_Y + u_Y/R_Y \tag{1/24a}$$

$$i_{10} = i_5 + i_6 = I_Y - u_Y/R_Y \tag{1/24b}$$

A zatem różnicowe prądy przetworników i_{RX} i i_{RY} są określone wzorem (1/16), podanym dla schematu funkcjonalnego z rys. 1/11.

Przejdźmy teraz do analizy sterowanego dzielnika prądowego *SDP* (przetwornika Gilberta). Jest on utworzony z tranzystorów $T_1 ... T_6$, przy czym T_1 i T_2 pracują w połączeniu diodowym. Przyjmować będziemy, że tranzystory są identyczne, znajdują się w tej samej temperaturze, a napięcie baza-emiter j-tego elementu wyraża się wzorem

$$u_{BEj} = U_T \ln \frac{i_j}{I_{ES}}; \quad j = 1, 2, ..., 6 \tag{1/25}$$

Dla pętli obejmującej kolejno tranzystory T_1, T_4, T_3, T_2, równanie bilansu napięć jest następujące:

$$u_{BE1} + u_{BE4} = u_{BE3} + u_{BE2} \tag{1/26}$$

co po uwzględnieniu (1/25) daje

$$\ln i_1 + \ln i_4 = \ln i_3 + \ln i_2$$

lub

$$i_1 i_4 = i_3 i_2 \tag{1/27}$$

Postępując podobnie przy rozpatrywaniu pętli obejmującej tranzystory T_1, T_5, T_6, T_2, otrzymujemy

$$i_1 i_5 = i_6 i_2 \tag{1/28}$$

Zdefiniujmy wyjściowy prąd dzielnika *SDP* jako

$$i_R = i_B - i_C \tag{1/29}$$

czyli

$$i_R = i_3 + i_5 - (i_4 + i_6) \tag{1/30}$$

Na podstawie (1/27) i (1/28), prąd różnicowy i_R możemy wyrazić następująco:

$$i_R = i_3 + \frac{i_2 i_6}{i_1} - \frac{i_2 i_3}{i_1} - i_6 = i_3\left(1 - \frac{i_2}{i_1}\right) - i_6\left(1 - \frac{i_2}{i_1}\right) =$$

$$= (i_1 - i_2)\frac{i_3 - i_6}{i_1} \tag{1/31}$$

Znajdźmy teraz ilorazy i_3/i_1 oraz i_6/i_1, występujące w tym wzorze.

Z zależności (1/27) i (1/24a) wynika, że

$$i_4 = \frac{i_2 i_3}{i_1} = I_Y + \frac{u_Y}{R_Y} - i_3$$

Wyznaczając stąd i_3 mamy

$$i_3 = \frac{i_1}{i_1 + i_2}\left(I_Y + \frac{u_Y}{R_Y}\right)$$

a po uwzględnieniu (1/23) dostajemy

$$i_3 = \frac{i_1}{2I_X}\left(I_Y + \frac{u_Y}{R_Y}\right) \tag{1/32}$$

Podobnie, z zależności (1/28) i (1/24b) wynika, że

$$i_5 = \frac{i_2 i_6}{i_1} = I_Y - \frac{u_Y}{R_Y} - i_6$$

i dlatego

$$i_6 = \frac{i_1}{2I_X}\left(I_Y - \frac{u_Y}{R_Y}\right) \tag{1/33}$$

A zatem na podstawie (1/32) i (1/33) możemy napisać, że

$$\frac{i_3 - i_6}{i_1} = \frac{u_Y}{I_X R_Y} \tag{1/34}$$

Podstawiając (1/34) do (1/31), po uwzględnieniu (1/23), dostajemy zależność

$$i_R = \frac{2}{R_X R_Y I_X} u_X u_Y \tag{1/35}$$

wskazującą, że przetwornik Gilberta realizuje operację (1/18).

W rozwiązaniu z rys. 1/12 rolę przetwornika wyjściowego *PW*, przekształcającego prąd różnicowy i_R na napięcie wyjściowe u_O, spełnia wzmacniacz operacyjny. Zapisując równania bilansu prądów dla węzłów *B* i *C* układu, mamy

$$\frac{U_{CC} - u_-}{R_C} = \frac{u_- - u_O}{R_0} + i_B$$

$$\frac{U_{CC} - u_+}{R_C} = \frac{u_+}{R_0} + i_C$$

Z równań tych dostajemy

$$u_O = i_R R_0 \frac{A}{A + 1 + R_0/R_C} \tag{1/36}$$

a jeśli $A \gg 1 + R_0/R_C$, to możemy zastosować przybliżenie

$$u_O = i_R R_0 \tag{1/37}$$

Podstawiając równanie (1/35) do (1/37) mamy ostatecznie

$$u_O = \frac{u_X u_Y}{E_R} \tag{1/38}$$

gdzie E_R jest normującym napięciem odniesienia, określonym jako

$$E_R = \frac{R_X R_Y I_X}{2R_0} \tag{1/39}$$

Dowiedliśmy zatem, że układ realizuje zadaną operację mnożenia.

Zauważmy, że w analizie układu, dającej wynik końcowy (1/38), nie wystąpiła potrzeba określania dopuszczalnych znaków napięć wejściowych. Oznacza to, że napięcia u_X oraz u_Y mogą być zarówno dodatnie, jak i ujemne — jest to więc układ czterokwadrantowy.

Zakres dopuszczalnych poziomów sygnałów u_X i u_Y zależy od rezystancji R_X i R_Y, wprowadzających ujemne sprzężenie zwrotne w różnicowych wzmacniaczach wejściowych. Wartości tych rezystancji dobiera się zwykle tak, aby dopuszczalne poziomy wysterowania zawierały się w zakresie -10 V...$+10$ V, przy błędzie nieliniowości $b \leqslant 0{,}2\%$. Dobór wartości R_X i R_Y przeprowadza się na podstawie nierówności (1/22), natomiast błąd nieliniowości b wyznaczany jest ze wzoru (D3/37), lub na podstawie wykresu z rys. D3/7b (dodatek D3).

Przy ustalonych R_X i R_Y, wartość napięcia normującego E_R (typowa 10 V) jest dobierana przez określenie wartości I_X i R_0, zgodnie z wzorem (1/39).

Dobór napięć zasilających U_{CC} i U_{EE} zależy już od konkretnego sposobu rozwiązania obwodów polaryzacji tranzystorów. Projektując obwód polaryzacji należy pamiętać o przyjętym na wstępie założeniu, że tranzystory pracują aktywnie w warunkach transmisji normalnej.

Na rysunku 1/13 przedstawiono kompletny schemat czterokwadrantowego układu mnożącego, zawierający źródła stałoprądowe zrealizowane przy użyciu tranzystorów T_{11}...T_{14}.

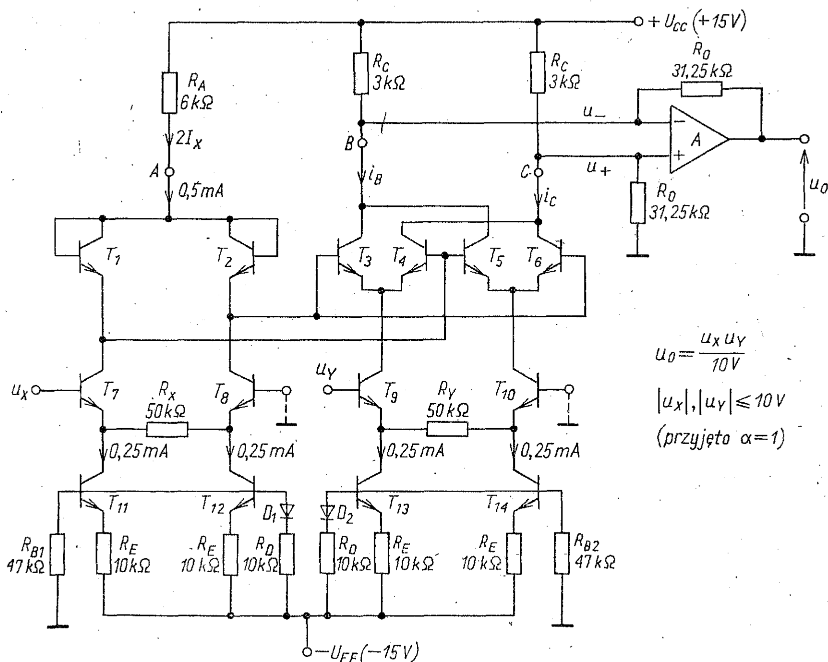
Przyjmijmy, że granice normalnego obszaru aktywnego tranzystora są określone następująco:

$$u_{BE} > U_D; \qquad u_{CB} > -U_D \tag{1/40}$$

(dla tranzystorów krzemowych $U_D = 0{,}70...0{,}75$ V) i wyznaczmy wynikające stąd warunki dotyczące napięć zasilania. Dodatkowo założymy, że bazy tranzystorów T_8 i T_{10} są uziemione, co zaznaczono na rys. 1/13.

Tranzystory T_{11} i T_{12}, wraz z elementami D_1, R_{B1}, R_D i R_E, tworzą źródła polaryzujące (skompensowane temperaturowo za pomocą diody D_1). Przy założeniu, że tranzystory są identyczne i mają $\alpha = 1$, wydajności prądowe obu źródeł są jednakowe i wynoszą

$$I_X = \frac{U_{EE} - U_D}{R_E(1 + R_{B1}/R_D)} \tag{1/41a}$$



1/13 Kompletny schemat czterokwadrantowego układu mnożącego (przykład z podaniem wartości liczbowych)

Podobną rolę spełniają tranzystory T_{13} i T_{14}. Realizują one dwa źródła prądowe o jednakowej wydajności

$$I_Y = \frac{U_{EE} - U_D}{R_E(1+R_{B2}/R_D)} \tag{1/41b}$$

Analizując układ z rys. 1/13 można wykazać, że warunek (1/40) zachodzi wówczas, gdy są spełnione warunki:

$$-U_{EE}+U_D < u_X < U_A \tag{1/42}$$

(dla zapewnienia normalnej pracy aktywnej tranzystora T_7);

$$-U_{EE}+U_D < u_Y < U_A - U_D \tag{1/43}$$

(dla zapewnienia normalnej pracy aktywnej tranzystora T_9);

$$\frac{U_{CC}-2I_Y R_C}{1+R_C/R_0} > U_A - 2U_D \tag{1/44}$$

(dla wyeliminowania pracy tranzystorów T_3, T_4, T_5 i T_6 w stanie nasycenia), przy czym

$$U_A = U_{CC} - 2I_X R_A \tag{1/45}$$

jest napięciem stałym, panującym na końcówce A układu.

Sposób dojścia do warunku (1/44) może wymagać pewnego komentarza. Warunkiem nienasycenia się tranzystorów T_3 i T_5 jest, aby

$$u_- > U_A - 2U_D \tag{1/46a}$$

Podobnie, warunkiem nienasycenia się tranzystorów T_4 i T_6 jest

$$u_+ > U_A - 2U_D \tag{1/46b}$$

Ponieważ przy dostatecznie dużym wzmocnieniu A na wejściu wzmacniacza $u_+ \approx u_-$, można więc dalej rozpatrywać tylko jedną nierówność, np. nierówność (1/46b). Napięcie na nieodwracającym wejściu wzmacniacza wynosi

$$u_+ = \frac{U_{CC} - i_C R_C}{1 + R_C/R_0} \tag{1/46c}$$

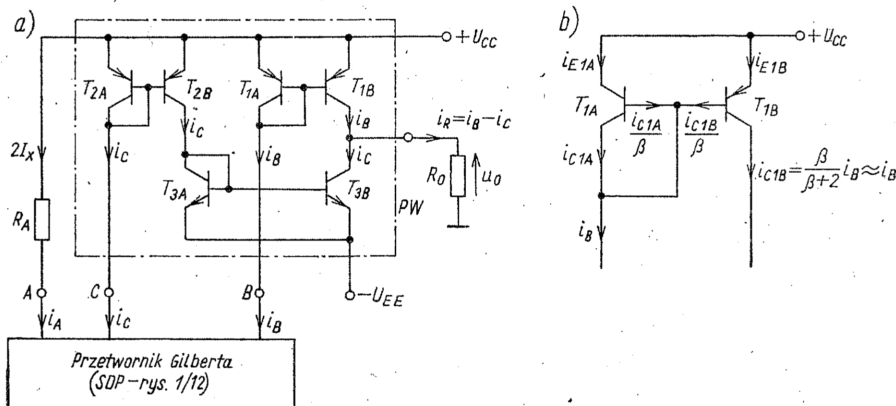
A zatem przybiera ono minimalną wartość dla maksymalnej wartości prądu $i_C = i_4 + i_6$, tzn. dla wartości $i_{C,\max} = 2I_Y$. Uwzględnienie tego faktu w (1/46b) prowadzi wprost do warunku (1/44).

Jak widać, zależności (1/41)...(1/45) pozwalają ustalić wszystkie dalsze parametry układu związane z polaryzacją tranzystorów.

Na rysunku 1/13 podano, w formie liczbowego przykładu, wartości elementów układu realizującego operację mnożenia

$$u_O = \frac{u_X u_Y}{E_R}$$

przy dopuszczalnych poziomach napięć wejściowych: $|u_X| \leqslant 10$ V, $|u_Y| \leqslant 10$ V oraz dopuszczalnym błędzie nieliniowości przetworników wejściowych $b \approx 0{,}2\%$ (w obliczeniach przyjmowano $U_D = 0{,}75$ V).



1/14 Układ szerokopasmowego przetwornika wyjściowego ze sterowanymi źródłami prądowymi (a) oraz schemat pojedynczego źródła lustrzanego (b)

Przetworniki wejściowe (*PX*, *PY*) oraz przetwornik Gilberta (*SDP*) są układami o potencjalnie bardzo dużej szybkości działania. Są one bowiem konstruowane przy użyciu prostych zestawów tranzystorów bipolarnych. Jest więc rzeczą oczywistą, że zastosowany w przetworniku wyjściowym (*PW*) niezbyt szybki wzmacniacz operacyjny może w głównej mierze ograniczać zakres częstotliwości pracy układu mnożącego.

Na rysunku 1/14a przedstawiono inne rozwiązanie przetwornika wyjściowego, polegające na użyciu zespołu prądowych źródeł lustrzanych. Występują

tu trzy pary identycznych tranzystorów (pary A—B). Każda taka para tworzy pojedyncze źródło lustrzane. Rozpatrując na przykład źródło z tranzystorami T_{1A} i T_{1B} (rys. 1/14b) widzimy, że w wyniku zastosowanego sposobu połączeń $u_{BE1A} = u_{BE1B}$ i wobec tego emiterowe prądy obu tranzystorów są takie same. Między prądem kolektorowym tranzystora T_{1B} a prądem sterującym i_B zachodzi zatem związek

$$i_{C1B} = \frac{\beta}{\beta+2} i_B \approx i_B$$

Widzimy więc, że przy dostatecznie dużym wzmocnieniu prądowym β, prąd wyjściowy i_{C1B} jest prawie dokładną repliką prądu sterującego i_B[1].

Ponieważ dwa dalsze źródła prądowe (T_{2A} — T_{2B} i T_{3A} — T_{3B}) działają podobnie, możemy więc przyjąć, że rozpływ prądu w przetworniku wyjściowym jest taki, jak to oznaczono na rys. 1/14a.

Jak już wspomniano, główną zaletą metody sterowanego podziału prądu jest łatwość jej wykorzystania w układach scalonych.

Obecnie produkuje się wiele typów scalonych układów mnożących opartych na tej metodzie. Można je z grubsza sklasyfikować w dwie grupy, różniące się zakresem scalania.

W układach pierwszej grupy, nowocześniejszych, scalaniem są objęte wszystkie podzespoły układu blokowego z rys. 1/11. Parametry tak rozwiązanych układów mnożących są więc z góry ustalone i nie podlegają regulacji. Co najwyżej przewidziana jest możliwość zmiany wartości E_R, dokonywana (za pośrednictwem I_X) przez włączenie zewnętrznego rezystora między odpowiednie końcówki. Do najbardziej rozpowszechnionych układów tej grupy można zaliczyć układy opracowane i produkowane przez firmę Analog Devices, np.: AD 429 (szerokopasmowy o parametrach: $\delta_0 = 0{,}5\%$, $f_{3\,dB} = 10$ MHz, $S = 120$ V/μs), AD 435 (precyzyjny — 0,1%, 0,25 MHz, 2 V/μs), a także układy oznaczane kolejnymi numerami od AD 530 do AD 533 (ogólnego przeznaczenia — 0,5...2%, 1 MHz, 45 V/μs).

W układach drugiej grupy scaleniu podlegają wejściowe wzmacniacze różnicowe (wraz z zespołem stabilizowanych termicznie źródeł prądowych) oraz przetwornik Gilberta. Układy takie nie zawierają zatem przetwornika wyjściowego. Popularnymi przedstawicielami tej grupy układów mnożących są, np. układy: MC 1595 — Motorola, μA 795 — Faurchild lub 525πCl — produkcji ZSRR. Mają one źródła prądowe I_X i I_Y rozwiązane w sposób pokazany na rys. 1/13, a ponadto wyprowadzone odpowiednie końcówki do dołączenia elementów: R_A, R_{B1}, R_{B2}, R_C, R_X i R_Y. Dostosowanie takiego układu scalonego do wykonywania operacji mnożenia polega na doborze wartości wymienionych rezystancji, ustaleniu napięć zasilania (U_{CC}, U_{EE}) oraz — o ile zachodzi taka potrzeba — zastosowaniu przetwornika wyjściowego. Zadanie to można rozwiązać postępując w sposób omówiony poprzednio.

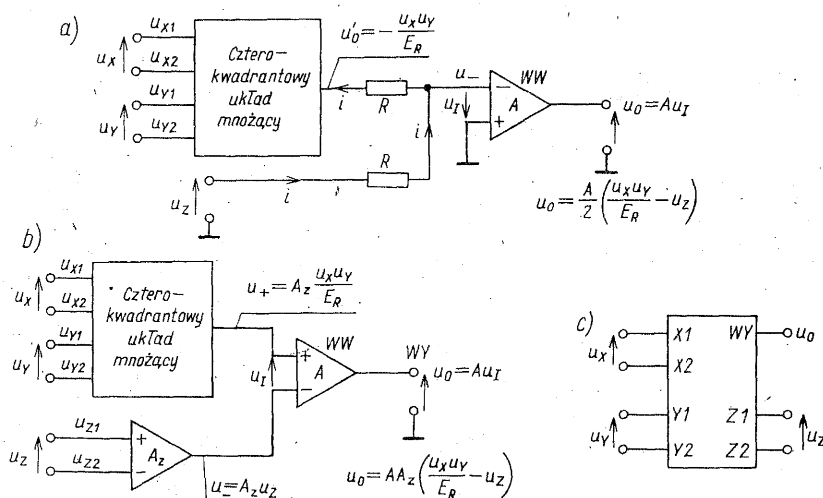
1.2.3 Układy uniwersalne

Uniwersalnymi nazwiemy układy mnożące konstruowane z myślą łatwego ich dostosowania (zaprogramowania) do wykonania także pewnych innych operacji nieliniowych (np. dzielenia, pierwiastkowania).

---

[1] Stąd też układ o takich właściwościach jest nazywany prądowym źródłem lustrzanym lub powtarzającym (ang. *current mirror, current repeater*).

Obecnie są produkowane dwie odmiany scalonych uniwersalnych układów mnożących. Zasadę ich działania ilustrują schematy funkcjonalne pokazane na rys. 1/15. W obu rozwiązaniach zaprogramowanie układu do realizacji określonej operacji nieliniowej polega, najogólniej mówiąc, na połączeniu wyjścia



1/15 Uniwersalne układy mnożące: a) z niesymetrycznym wejściem *Z*; b) z symetrycznym wejściem *Z*; c) oznaczenie schematowe układu b)

wzmacniacza operacyjnego z odpowiednim wejściem, tzn. na odpowiednim zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego. Wzmacniacze mają dostatecznie duże wzmocnienie A, dobierane tak, aby po zamknięciu pętli można było uzyskać stan bliski tzw. bezprądowemu zwarciu wejścia wzmacniacza ($u_I \approx 0$).

W rozwiązaniu prostszym (rys. 1/15a) słuszne są zależności

$$i = \frac{u_Z - u_-}{R} = \frac{u_- + u_X u_Y/E_R}{R}; \quad u_- = -u_O/A$$

na podstawie których dostajemy

$$u_O = \frac{A}{2}\left(\frac{u_X u_Y}{E_R} - u_Z\right) \tag{1/47}$$

Przyjmując, że $A \to \infty$ otrzymujemy prostą zależność opisującą pracę układu zamkniętego

$$u_X u_Y = E_R u_Z \tag{1/48a}$$

Dla podkreślenia, że układ ma dwa wejścia symetryczne i jedno wejście niesymetryczne, zależność tę można zapisać w równoważnej postaci

$$(u_{X1} - u_{X2})(u_{Y1} - u_{Y2}) = E_R u_Z \tag{1/48b}$$

Stosowane są trzy następujące sposoby zamknięcia pętli sprzężenia zwrotnego.

Przy połączeniu wyjścia wzmacniacza z wejściem Z, tzn. $u_Z = u_O$, układ realizuje operację mnożenia: $u_O = u_X u_Y / E_R$ (w tym przypadku wzmacniacz operacyjny spełnia rolę inwertora znaku).

Łącząc wyjście z wejściem Y, w taki sposób, że $u_Y = u_O$ (tzn. $u_{Y1} = u_O$, $u_{Y2} = 0$), na podstawie (1/48) otrzymujemy

$$u_O = E_R \frac{u_Z}{u_X}; \quad u_X < 0 \tag{1/49}$$

Układ realizuje więc operację dzielenia dwóch napięć wejściowych u_Z i u_X. Zauważmy przy tym, że znak napięcia u_Z jest dowolny, natomiast znak napięcia u_X musi być ujemny (dla $u_X > 0$ w układzie powstaje dodatnie sprzężenie zwrotne, o czym będziemy mówić szerzej w p. 1.3.2). W celu uzyskania możliwości dzielenia przez napięcie $u_X > 0$ należy dokonać połączenia dającego: $u_Y = -u_O$.

Zamykając pętlę w taki sposób, że: $u_X = -u_Y = u_O$, uzyskujemy realizację operacji pierwiastkowania

$$u_O = \sqrt{-E_R u_Z}; \quad u_Z < 0 \tag{1/50}$$

Jak widać, układ, zależnie od ustawienia, może realizować operację: mnożenia, dzielenia lub pierwiastkowania.

Układ z symetrycznym wejściem toru Z (rys. 1/15b) cechuje się znacznie większą uniwersalnością, aniżeli rozwiązanie poprzednie. Wytworzony w tym torze sygnał u_-, proporcjonalny do napięcia wejściowego u_Z, steruje odwracające wejście wzmacniacza wyjściowego *WW*. W rezultacie, dla układu z otwartą pętlą mamy

$$u_O = Au_I = AA_z \left(\frac{u_X u_Y}{E_R} - u_Z \right) \tag{1/51}$$

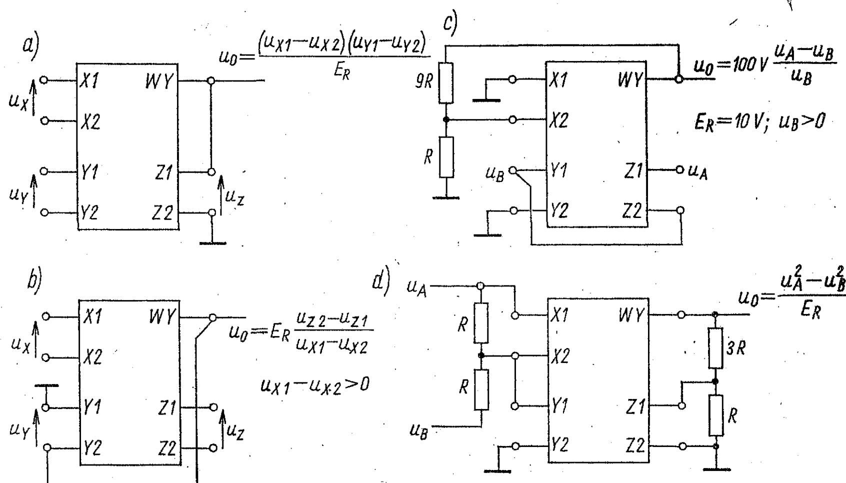
gdzie A_z jest wzmocnieniem napięciowym toru Z. Przy $A \to \infty$ pracę układu zamkniętego opisuje zatem zależność

$$(u_{X1} - u_{X2})(u_{Y1} - u_{Y2}) = E_R(u_{Z1} - u_{Z2}) \tag{1/52}$$

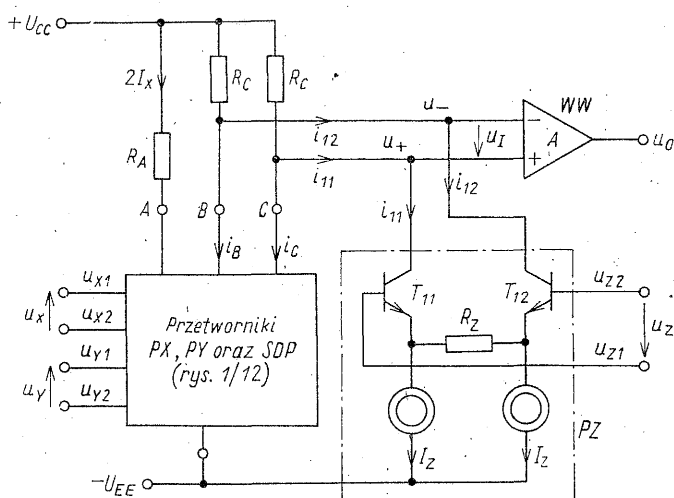
Tego rodzaju rozwiązanie zastosowano w monolitycznym układzie scalonym typu AD 534. Na rysunku 1/16 pokazano przykłady wykorzystania układu do wykonywania operacji: mnożenia, dzielenia, wyznaczania procentowej odchyłki oraz wyznaczania różnicy kwadratów. Oprócz tych operacji układ może wykonywać wiele innych funkcji jak np.: pierwiastkowanie, podwajanie częstotliwości ze 100 procentową sprawnością napięciową, realizację operacji typu $ax/(1-x)$, wzmacnianie napięcia z automatyczną regulacją wzmocnienia [13].

Fragment schematu ideowego układu generującego funkcję (1/51) przedstawiono na rys. 1/17. Przetwornik wejściowy *PZ* (toru Z), rozwiązany podobnie jak omawiane wcześniej przetworniki *PX* i *PY* układu podstawowego (p. 1.2.2), wytwarza prąd różnicowy i_{RZ} proporcjonalny do napięcia u_Z

$$i_{RZ} = i_{11} - i_{12} = \frac{2u_Z}{R_Z} \tag{1/53}$$



1/16 Przykłady wykorzystania uniwersalnego układu mnożącego typu AD 534: a) mnożenie; b) dzielenie; c) wyznaczanie procentowej odchyłki; d) obliczanie różnicy kwadratów. Realizowane operacje wynikają bezpośrednio z relacji podstawowej: $(u_{X1}-u_{X2})(u_{Y1}-u_{Y2}) = E_R(u_{Z1}-u_{Z2})$, obowiązującej dla układu zamkniętego



1/17 Uproszczony schemat ideowy uniwersalnego układu mnożącego o trzech symetrycznych wejściach

Natomiast przedstawiony w postaci bloku zespół przetworników ($PX+PY+SDP$) generuje funkcję (1/35), tzn.

$$i_R = i_B - i_C = \frac{2}{R_X R_Y I_X} u_X u_Y \tag{1/54}$$

Aby wyznaczyć napięcie u_O zapiszemy równania prądów dla węzłów B i C układu

$$(U_{CC} - u_-)/R_C = i_B + i_{12}$$

$$(U_{CC} - u_+)/R_C = i_C + i_{11}$$

Po odjęciu stronami, dostajemy wzór na napięcie wejściowe wzmacniacza

$$u_+ - u_- = u_I = R_C(i_R - i_{RZ}) \tag{1/55}$$

Wykorzystując związki (1/53)...(1/55), po pewnych przekształceniach otrzymujemy ostatecznie, że

$$u_O = Au_I = \frac{2AR_C}{R_Z}\left[\frac{u_X u_Y}{E_R} - u_Z\right] \tag{1/56}$$

gdzie

$$E_R = \frac{R_X R_Y I_X}{R_Z}. \tag{1/57}$$

Otrzymaliśmy zatem zależność o postaci (1/51), w której $A_z = 2R_C/R_Z$.

Jak widać, przez stosunkowo prostą modyfikację podstawowego układu mnożącego uzyskaliśmy uniwersalny układ mnożący z symetrycznym torem Z.

1.2.4 Modulatory zrównoważone

Do wykonywania operacji mnożenia stosuje się również układy nazywane modulatorami zrównoważonymi. Układy takie można traktować jako pewną odmianę podstawowego układu transkonduktancyjnego (p. 1.2.2). Odmienność rozwiązania polega głównie na wyeliminowaniu przetwornika toru X. Modulatory zrównoważone są przewidziane do pracy w szerokim zakresie częstotliwości (nawet do ok. 100 MHz), co jednakże osiąga się jedynie przy małych poziomach sygnałów wejściowych (dotyczy to zwłaszcza wejścia X, o czym będzie mowa dalej).

Schemat ideowy modulatora zrównoważonego przedstawiono na rys. 1/18.

Modulatory wykonywane w wersji scalonej mają źródła prądowe I_Y rozwiązane zazwyczaj w sposób pokazany na rys. 1/13 (np. MC 1496 — Motorola, N 5596 — Sygnetics). Mają one wówczas wyprowadzone odpowiednie końcówki do dołączenia rezystora R_{B2} (regulacja wartości prądu I_Y, wg wzoru (1/41b)) i rezystora R_Y (wprowadzenie sprzężenia zwrotnego w obwodzie emiterów tranzystorów wzmacniacza toru Y).

Przechodząc do analizy układu z rys. 1/18, zauważmy, że jeśli przetwornik

1/18 Modulator zrównoważony (wersje scalone nie zawierają na ogół elementów R_C i R_Y)

PY pracuje z dostatecznie silnym sprzężeniem zwrotnym, to jego prądy wyjściowe są określone zależnością (1/24). Przy obecnych oznaczeniach mamy więc

$$i_1 = I_Y + u_Y/R_Y; \quad i_2 = I_Y - u_Y/R_Y \tag{1/58}$$

Prądy pozostałych tranzystorów możemy wyznaczyć na podstawie związków (D3/6) i (D3/7), podanych w dodatku 3. Przyjmując, że tranzystory T_3... ... T_6 są identyczne, pracują w tej samej temperaturze i mają $\alpha = 1$, otrzymujemy

$$i_3 = \frac{i_1}{2}\left(1+\text{tgh}\frac{u_X}{2U_T}\right); \quad i_4 = \frac{i_1}{2}\left(1-\text{tgh}\frac{u_X}{2U_T}\right) \tag{1/59a}$$

$$i_5 = \frac{i_2}{2}\left(1-\text{tgh}\frac{u_X}{2U_T}\right); \quad i_6 = \frac{i_2}{2}\left(1+\text{tgh}\frac{u_X}{2U_T}\right) \tag{1/59b}$$

Niech wyjściowy prąd różnicowy i_R układu będzie zdefiniowany jako

$$i_R = i_B - i_C = i_3 + i_5 - (i_4 + i_6) \tag{1/60}$$

Wówczas, na podstawie (1/59), dostajemy

$$i_R = (i_1 - i_2)\,\text{tgh}\frac{u_X}{2U_T} \tag{1/61}$$

a po uwzględnieniu (1/58) otrzymujemy, że

$$i_R = 2\frac{u_Y}{R_Y}\,\text{tgh}\frac{u_X}{2U_T} \tag{1/62}$$

Jeśli do końcówek B i C układu dołączymy jednakowe rezystory R_C, to napięcie wyjściowe będzie określone wzorem

$$u_O = i_R R_C = 2\frac{R_C}{R_Y} u_Y \operatorname{tgh} \frac{u_X}{2U_T} \tag{1/63}$$

Z właściwości funkcji tgh$x$ wynika, że

$$\operatorname{tgh} x \approx x \quad \text{dla} \quad |x| \ll 1 \tag{1/64a}$$

$$\operatorname{tgh} x \approx \operatorname{sgn}(x) \quad \text{dla} \quad |x| \gg 1 \tag{1/64b}$$

Przykładowo, biorąc jako kres górny jednoprocentowy błąd przybliżenia (1/64)[1], mamy odpowiednio: $|x| \gtrsim 0{,}17$ oraz $|x| \lesssim 2{,}67$. Ze związków (1/63) i (1/64a) wynika więc, że układ realizuje operację mnożenia jedynie przy odpowiednim ograniczeniu poziomu wysterowania wejścia X. Zakładając, że zachodzi związek (1/64a), wzór (1/63) możemy przybliżyć zależnością

$$u_O = \frac{R_C}{R_Y}\frac{u_X u_Y}{U_T}; \quad |u_X| \ll 2U_T \tag{1/65}$$

Konieczność ograniczenia poziomu napięcia wejściowego u_X nie jest jedyną wadą układu. Dodatkową niedogodnością jest silne uzależnienie współczynnika mnożenia $k_m = R_C/(R_Y U_T)$ od temperatury (za pośrednictwem U_T). W otoczeniu $t = 25°C$ zmiany k_m wynoszą ok. $-0{,}33\%/1°C$.

Podstawową zaletą układu jest natomiast potencjalna możliwość szybkiego jego działania. Układy scalone, zawierające szerokopasmowe pary różnicowe (np. modulatory oznaczone symbolami przytoczonymi na wstępie), przy dodatkowym ograniczeniu dynamiki sygnału u_Y (orientacyjnie: $|u_Y| < 0{,}5...1{,}0$ V) mogą pracować w zakresie częstotliwości do ok. 100 MHz.

Zrównoważone modulatory transkonduktancyjne znajdują również zastosowanie jako niekonwencjonalne układy mnożące, a także jako układy przełącznikowe. Dotyczy to przetwarzania niektórych sygnałów zmiennych. Mogą one pracować z wyjściem symetrycznym, jak to przyjmowano poprzednio, wówczas

$$i_R(t) = \frac{2u_Y(t)}{R_Y} \operatorname{tgh} \frac{u_x(t)}{2U_T} \tag{1/66}$$

względnie z wyjściem niesymetrycznym, pobieranym z końcówki B lub C i wtedy

$$i_B(t) = I_Y + \frac{1}{2} i_R(t) \tag{1/67a}$$

$$i_C(t) = I_Y - \frac{1}{2} i_R(t) \tag{1/67b}$$

Rozpatrzmy wstępnie trzy praktycznie interesujące przypadki pracy układu (bliższe omówienie niektórych zastosowań w rozdz. 3, 6 i 8).

---

[1] Błąd definiowany jest jako $(\operatorname{tgh}x - x)/\operatorname{tgh}x$ oraz jako $[\operatorname{tgh}x - \operatorname{sgn}(x)]/\operatorname{tgh}x$.

Przypadek 1. Wejście X jest sterowane napięciem $|u_X(t)| \ll 2U_T$, a składową I_Y odpowiedzi (1/67) można wyeliminować za pomocą filtracji. W takim przypadku

$$i_R(t) = 2i_B(t) = -2i_C(t) = \frac{u_X(t)u_Y(t)}{R_Y U_T} \tag{1/68}$$

A zatem realizowana jest operacja mnożenia, niezależnie od sposobu pobierania sygnału wyjściowego (wyjście symetryczne lub niesymetryczne).

Przypadek 2. Wejście X jest sterowane napięciem $|u_X(t)| \gg 2U_T$. Wówczas na podstawie zależności (1/64b) i (1/66) możemy napisać, iż

$$i_R(t) = \frac{2u_Y(t)}{R_Y}\,\mathrm{sgn}[u_X(t)] \tag{1/69}$$

Modulator działa więc jako układ przełącznikowy. Znak sygnału $u_Y(t)$ jest sterowany znakiem chwilowej wartości $u_Y(t)$.

Przypadek 3. W przetworniku PY wyeliminowane jest sprzężenie zwrotne, tzn. $R_Y = 0$. W takim przypadku przetwornik pracuje jako układ nieliniowy, gdyż (D3)

$$i_1(t) - i_2(t) = 2I_Y \,\mathrm{tgh}\,\frac{u_Y(t)}{2U_T} \tag{1/70}$$

Podstawiając (1/70) do (1/61) otrzymujemy

$$i_R(t) = 2I_Y \,\mathrm{tgh}\,\frac{u_X(t)}{2U_T}\,\mathrm{tgh}\,\frac{u_Y(t)}{2U_T} \tag{1/71}$$

Jeśli oba sygnały wejściowe spełniają warunek (1/64b), to wszystkie tranzystory układu pracują jako dwustanowe klucze, sterujące przepływem prądu stałego $2I_Y$

$$i_R(t) = 2I_Y \mathrm{sgn}[u_X(t)]\,\mathrm{sgn}[u_Y(t)] \tag{1/72}$$

Ten rodzaj pracy układu znajduje m.in. zastosowanie w detektorach fazy.

1.3 UKŁADY POTĘGUJĄCE, DZIELĄCE I PIERWIASTKUJĄCE

Operacje potęgowania, dzielenia i pierwiastkowania mogą być zrealizowane przy użyciu układów mnożących, a także za pomocą układów logarytmicznych i wykładniczych.

1.3.1 Układy potęgujące

Układ potęgujący generuje funkcję potęgową o postaci

$$u_O = k_{pt}\left(\frac{u_X}{U_N}\right)^m \tag{1/73}$$

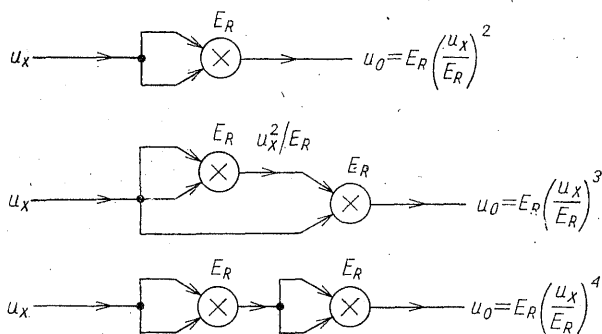
gdzie k_{pt} jest stałą skalowania, u_X — napięciem wejściowym, a U_N — napięciem normującym.

Funkcję (1/73) można wytworzyć metodą pośrednią, przez logarytmowanie, mnożenie przez stałą i antylogarytmowanie, tzn. zestawiając układ działający wg algorytmu

$$\exp(m \ln x) = x^m \tag{1/74}$$

Układy generujące funkcję logarytmiczną i wykładniczą omówiono w p. 1.4.

W przypadku, gdy wykładnik potęgi m jest liczbą naturalną, co podkreślimy zmianą oznaczenia: $m = n$, to operację podnoszenia do n-tej potęgi można zrealizować za pomocą układu zestawionego z L mnożników, gdzie $L \geqslant \log_2 n$.



1/19 Układy potęgujące

Na rysunku 1/19 podano schematy funkcjonalne takich układów, dla $n = 2$, 3 i 4. Przyjęto, że wszystkie mnożniki są identyczne i realizują idealną operację mnożenia przy napięciu odniesienia równym E_R, tzn. operację (1/6). (Zauważmy, że w tym szczególnym przypadku $k_{pt} = U_N = E_R$).

1.3.2 Układy dzielące

Zadaniem układu dzielącego jest wytworzenie napięcia wyjściowego u_O proporcjonalnego do ilorazu dwóch wejściowych sygnałów sterujących u_Z i u_X, tzn. generacja funkcji

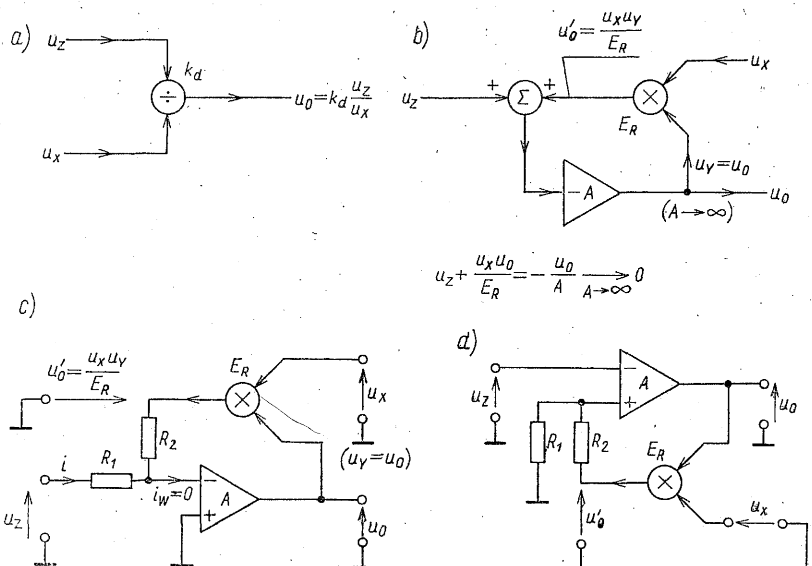
$$u_O = k_d \frac{u_Z}{u_X} \tag{1/75}$$

gdzie k_d jest stałą skalowania.

Operację dzielenia realizuje się na ogół dwiema metodami. Jedną z nich już poznaliśmy (p. 1.2.3). Polega ona na umieszczeniu układu mnożącego w pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego wzmacniacza o dostatecznie dużym wzmocnieniu. Metoda druga, o mniejszym znaczeniu praktycznym, polega na zastosowaniu operacji logarytmiczno-wykładniczej. Opiera się ona na schemacie blokowym z rys. 1/10a, z tą tylko różnicą, że sumator realizuje operację odejmowania, a nie sumowania, jak to ma miejsce w układzie mnożącym.

Niezależnie od rozwiązania układu dzielącego, sygnał dzielnika u_X, jest

zawsze unipolarny. Musi być on również ograniczony $|u_X| \geqslant u_{X\min}$, gdyż przy obniżaniu jego poziomu szybko rośnie błąd operacji dzielenia. Sygnał dzielnej, u_Z, może być uni- lub bipolarny, co zależy już od konkretnego sposobu rozwiązania układu. Istnieją więc dwa rodzaje układów dzielących, jedno- i dwukwadrantowe.



1/20 Układy dzielące: a) oznaczenie schematowe; b) schemat funkcjonalny; c, d) typowe rozwiązania z zastosowaniem wzmacniaczy operacyjnych

Na rysunku 1/20b przedstawiono schemat funkcjonalny układu dzielącego z zastosowaniem mnożnika umieszczonego w pętli sprzężenia zwrotnego wzmacniacza. Jak widać, dla węzła sumacyjnego obowiązuje równanie

$$u_Z + \frac{u_X u_O}{E_R} = -\frac{u_O}{A} \tag{1/76}$$

które, w granicznym przypadku $A \to \infty$, możemy zapisać w postaci

$$u_O = -E_R \frac{u_Z}{u_X}; \quad u_X > 0 \tag{1/77}$$

wskazującej, że układ wykonuje operację dzielenia (1/75), przy czym $k_d = -E_R$.

Na rysunku 1/20c i d przedstawiono dwie realizacje tej metody dzielenia z zastosowaniem wzmacniaczy operacyjnych.

Przeprowadźmy analizę układu z rys. 1/20c, przy uwzględnieniu skończonej wartości wzmocnienia A. Zakładając zerowy prąd wejściowy i_W wzmacniacza, możemy napisać

$$i = \frac{u_Z + u_O/A}{R_1} = \frac{u_Z - u_X u_O/E_R}{R_1 + R_2} \tag{1/78}$$

Stąd otrzymujemy

$$u_O = -\frac{R_2}{R_1} E_R \frac{u_Z}{u_X} \frac{1}{1+1/(A\beta)} \tag{1/79}$$

gdzie

$$\beta = \frac{R_1}{R_1+R_2} \frac{u_X}{E_R} \tag{1/80}$$

Zauważmy, że przy u_X = const, parametr β można traktować jako współczynnik sprzężenia zwrotnego wzmacniacza o napięciu wejściowym u_Z i wyjściowym u_O. W takim wzmacniaczu znak sprzężenia zwrotnego zależy od znaku napięcia u_X. Widzimy więc, że znak napięcia u_Z może być dowolny, natomiast znak napięcia u_X musi być dodatni, aby sprzężenie zwrotne było ujemne.

Przy spełnieniu warunku

$$A\beta \gg 1 \tag{1/81}$$

zależność (1/79) możemy przybliżyć równaniem

$$u_O = -\frac{R_2}{R_1} E_R \frac{u_Z}{u_X}; \quad u_X > 0 \tag{1/82}$$

świadczącym o realizacji operacji dzielenia.

W wyniku podobnego postępowania, można w równie prosty sposób wykazać, że dla układu z rys. 1/20d napięcie wyjściowe

$$u_O = \frac{R_1+R_2}{R_1} E_R \frac{u_Z}{u_X} \frac{1}{1+1/(A\beta)} \tag{1/83}$$

gdzie β jest określone wzorem (1/80). Zapewniając dostatecznie silne sprzężenie zwrotne, tzn. spełniając warunek (1/81), otrzymujemy

$$u_O = \left(1+\frac{R_2}{R_1}\right) E_R \frac{u_Z}{u_X}; \quad u_X > 0$$

Obydwie realizacje układów dzielących (rys. 1/20c i d) zawierały mnożniki nie odwracające znaku napięć wejściowych. W konsekwencji, dla zapewnienia ujemnego sprzężenia zwrotnego znak napięcia u_X mógł być tylko dodatni. Jest więc rzeczą oczywistą, że w razie potrzeby uzyskanie operacji dzielenia z napięciem $u_X < 0$, należy zastosować mnożnik odwracający znak jednego napięcia wejściowego (u_X lub u_Y).

W dotychczasowych rozważaniach przyjmowaliśmy idealny układ mnożący. Aby zbadać w jaki sposób błąd operacji dzielenia zależy od dokładności mnożnika, powróćmy do schematu funkcjonalnego z rys. 1/20b, zakładając, że mnożnik realizuje operację

$$u'_O = \frac{u_X u_Y}{E_R} + \Delta_0 \tag{1/84}$$

gdzie Δ_0 jest statycznym błędem operacji mnożenia (por. wzór (1/7)). W takim przypadku zależność (1/77) modyfikuje się do postaci

$$u_O = -E_R\frac{u_Z}{u_X} - \Delta_0\frac{E_R}{u_X}$$

Błąd układu dzielącego rośnie więc szybko przy zmniejszaniu wartości $|u_X|$. Z tej też przyczyny w układach praktycznych są dopuszczalne co najwyżej dwudekadowe zmiany wartości u_X.

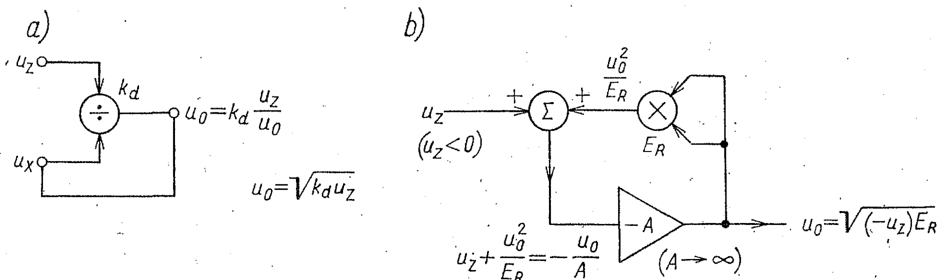
1.3.3 Układy pierwiastkujące

Układem pierwiastkującym jest nazywany układ generujący funkcję pierwiastka kwadratowego

$$u_O = \sqrt{k_p u_Z}\,; \quad k_p u_Z > 0 \tag{1/85}$$

gdzie k_p jest stałą skalowania, u_Z — unipolarnym napięciem wejściowym (układ jednokwadrantowy).

Funkcję pierwiastkową (1/85) można wytworzyć metodą funkcji uwikłanej, metodą funkcji odwrotnej bądź też metodą pośrednią z zastosowaniem operacji logarytmicznej i wykładniczej. Dwie pierwsze metody są przedstawione na schematach funkcjonalnych na rys. 1/21. Metoda trzecia, praktycznie mniej użyteczna, polega na zastosowaniu algortymu: $\exp[(1/2)\ln z] = z^{1/2}$.



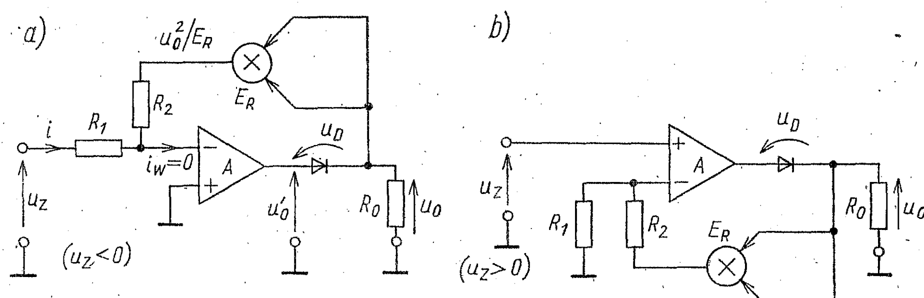
1/21 Schematy funkcjonalne układów pierwiastkujących: a) metoda funkcji uwikłanej; b) metoda funkcji odwrotnej

Do wykonywania operacji pierwiastkowania można dostosować każdy układ dzielący. W tym celu należy zewrzeć pętlę sprzężenia zwrotnego, łącząc wyjście układu z wejściem sygnałowym dzielnika (rys. 1/21a). Przypomnijmy, że metodę funkcji uwikłanej, w ujęciu ogólnym, przedstawiono m.in. na rys. 1/4.

Inne rozwiązanie układu pierwiastkującego polega na zastosowaniu kwadratora, który jest umieszczony w obwodzie sprzężenia zwrotnego wzmacniacza. W układzie pokazanym na rys. 1/21b rolę kwadratora spełnia mnożnik. Jeśli wzmacniacz ma dostatecznie duże wzmocnienie, to — zgodnie z ogólną koncepcją metody funkcji odwrotnej, zilustrowaną m.in. na rys. 1/3 — generuje on funkcję pierwiastkową.

W związku z metodami funkcji uwikłanej i funkcji odwrotnej warto w tym miejscu poczynić uwagę następującą. W przypadku, gdy układ dzielący jest utworzony z mnożnika i wzmacniacza operacyjnego (rys. 1/20b), to połączenie wyjścia takiego układu z wejściem X (tzn. zapewnienie $u_O = u_X$) jest równoważne umieszczeniu kwadratora w obwodzie sprzężenia zwrotnego wzmacniacza. Mamy więc układ pokazany na rys. 1/21b. Inaczej mówiąc, w takim przypadku obydwie metody, funkcji uwikłanej i funkcji odwrotnej, prowadzą do identycznej konfiguracji układu pierwiastkującego.

W układach praktycznych (rys. 1/22) pętla sprzężenia zwrotnego jest zamykana za pośrednictwem diody. Przyczyny tego są następujące. W przypadku niewłaściwej polaryzacji sygnału wejściowego u_Z, wzmacniacz operacyjny jest



1/22 Schematy ideowe układów pierwiastkujących: a) dla $u_Z < 0$; b) dla $u_Z > 0$

wprowadzany w nasycenie, co zwykle powoduje zablokowanie układu. Jego normalne działanie można wówczas przywrócić jedynie po rozwarciu pętli sprzężenia zwrotnego[1]. Zablokowaniu układu zapobiega dioda, przerywająca pętlę, gdy wystąpi nieodpowiednia polaryzacja napięcia u_Z.

Przejdźmy teraz do analizy układu z rys. 1/22a. Przy uwzględnieniu skończonej wartości wzmocnienia A, działanie układu opisują równania:

$$i = \frac{u_Z + u_O'/A}{R_1} = \frac{u_Z - u_O'/E_R}{R_1 + R_2}$$

$$u_O' = u_D + u_O; \quad u_Z < 0$$

z których dostajemy

$$u_O = -\frac{\frac{R_2}{R_1}\frac{u_Z}{u_O}E_R}{1+1/(A\beta)} - \frac{u_D}{1+A\beta} \tag{1/86}$$

gdzie

$$\beta = \frac{R_1}{R_1+R_2}\frac{u_O}{E_R} \tag{1/87}$$

[1] Stąd też taki stan zablokowania jest określany obrazowo jako „zatrzaśnięcie się" układu (ang. *latch up*).

W przypadku dostatecznie silnego sprzężenia zwrotnego (dostatecznie duże $A\beta$), równanie (1/86) można przybliżyć zależnością

$$u_O = \frac{R_2}{R_1} E_R \frac{(-u_Z)}{u_O} \tag{1/88}$$

Ponieważ napięcie u_Z jest ujemne, zaś napięcie u_O zawsze dodatnie, dostajemy więc

$$u_O = \sqrt{\frac{R_2}{R_1} E_R(-u_Z)}\,; \quad u_Z < 0 \tag{1/89}$$

Jak widać, układ realizuje operację pierwiastkowania o postaci (1/85).

Postępując podobnie, można łatwo wykazać, że w układzie z nieodwracającym wzmacniaczem operacyjnym (rys. 1/22b) napięcie wyjściowe jest określone zależnością

$$u_O = \frac{\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{u_Z}{u_O}E_R}{1+1/(A\beta)} - \frac{u_D}{1+A\beta}$$

gdzie β jest dane wzorem (1/87), przy czym u_Z, u_O — napięcia dodatnie. Przy dostatecznie silnym sprzężeniu zwrotnym, napięcie u_O można więc przybliżyć równaniem

$$u_O = \sqrt{\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)E_R u_Z}\,; \quad u_Z > 0$$

Jak widać, układ realizuje operację pierwiastkowania (1/85) przy napięciu wejściowym $u_Z > 0$.

Zbadajmy jeszcze jaki jest wpływ nieidealnej operacji mnożenia na dokładność operacji pierwiastkowania. Posłużmy się w tym celu schematem funkcjonalnym z rys. 1/21b, przyjmując, że układ mnożący wytwarza funkcję (1/84). Analizując tę sytuację otrzymujemy

$$u_O = \sqrt{(-u_Z)E_R(1+\Delta_0/u_Z)}\,; \quad u_Z < 0$$

Zależność ta wskazuje, że największe błędy operacji pierwiastkowania powstają przy małych poziomach sygnału wejściowego u_Z.

1.4 UKŁADY LOGARYTMICZNE I WYKŁADNICZE

1.4.1 Układy logarytmiczne

Układ logarytmiczny powinien wytwarzać napięcie wyjściowe o wartości proporcjonalnej do logarytmu wartości unormowanego napięcia wejściowego u_I, np.

$$u_O = -k_D \lg\frac{u_I}{U_L} = -k_E \ln\frac{u_I}{U_L} \tag{1/90}$$

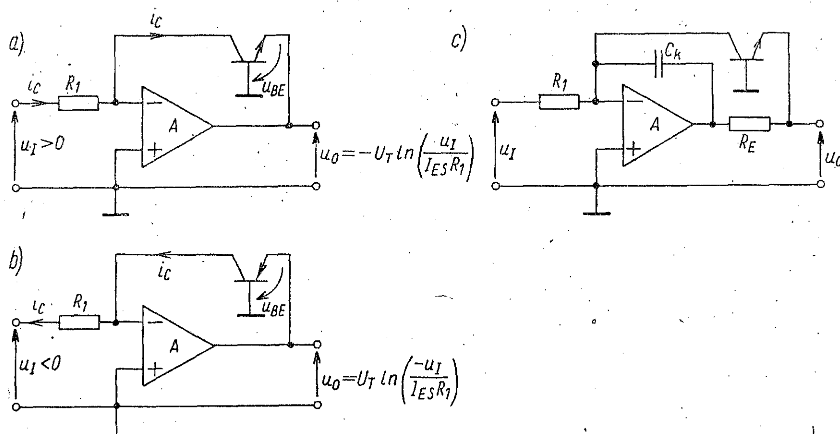
gdzie: k_D, k_E — stałe skalowania ($k_D = k_E \ln 10$), U_L — napięcie normujące.

Napięcie wejściowe jest zawsze unipolarne, dodatnie (i wówczas $U_L > 0$) lub ujemne ($U_L < 0$). Natomiast napięcie wyjściowe może mieć dowolną polaryzację. Przybiera ono wartość zerową, przy $u_I = U_L$.

Układ podstawowy

Funkcję logarytmiczną (1/90) można wygenerować umieszczając element o charakterystyce eksponencjalnej w pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego wzmacniacza operacyjnego (metoda funkcji odwrotnej).

Na rysunku 1/23a i b pokazano najprostsze realizacje układów logarytmicznych z wykorzystaniem tranzystora bipolarnego.



1/23 Proste układy logarytmiczne: a) z tranzystorem *npn*; b) z tranzystorem *pnp*; c) układ z kompensacją częstotliwościową

Jeśli przyjmie się, że prąd kolektorowy tranzystora jest opisany zależnością

$$i_C = I_{ES}\exp(u_{BE}/U_T) \tag{1/91}$$

to przy założeniu idealnego wzmacniacza operacyjnego, dla układu z tranzystorem *npn*, mamy

$$u_O = -u_{BE} = -U_T\ln\frac{i_C}{I_{ES}} = -U_T\ln\frac{u_I}{I_{ES}R_1} \tag{1/92a}$$

lub

$$u_O = (-U_T\ln 10)\lg\frac{u_I}{I_{ES}R_1} \tag{1/92b}$$

przy czym $u_I > 0$. Otrzymaliśmy zatem charakterystykę logarytmiczną o postaci (1/90). W temperaturze normalnej, $T = 298$ K (25°C), nachylenie charakterystyki wynosi $-U_T\ln 10 \approx -60$ mV/dekadę.

Dla wysokiej jakości krzemowych tranzystorów planarnych przy $u_{BE} > 4U_T$, zależność (1/91) jest spełniona w szerokim zakresie zmian prądu (od

setek pikoamperów do kilku miliamperów). Oznacza to, że stosując odpowiednie tranzystory oraz wzmacniacze operacyjne (małe wejściowe prądy polaryzacji, małe wejściowe napięcie niezrównoważenia) można otrzymać charakterystykę logarytmiczną w zakresie napięć wejściowych obejmującym nawet 6...8 dekad.

Zamiana tranzystora *npn* na tranzystor *pnp* (rys. 1/23b) pozwala realizować charakterystykę logarytmiczną dla $u_I < 0$.

Układ logarytmiczny z tranzystorem umieszczonym w pętli sprzężenia zwrotnego wzmacniacza może być niestabilny. Tranzystor modyfikuje wzmocnienie pętli o wartość własnego wzmocnienia napięciowego. Aby ograniczyć wzmocnienie tranzystora wprowadza się do obwodu emitera rezystor R_E, co pokazano na rys. 1/23c. Dodatkowa pojemność C_k zapewnia kompensację wpływu pojemności wejściowej wzmacniacza operacyjnego. (Szczegółowe omówienie — patrz np. [2], p. 6.2).

Główną wadą rozpatrywanego tu prostego układu logarytmicznego jest silna zależność jego charakterystyki przejściowej od temperatury, spowodowana zmianami U_T oraz I_{ES}. W związku z tym, w większości przypadków praktycznych zachodzi potrzeba zapewnienia stabilizacji temperaturowej układu.

Układy z kompensacją termiczną

Wpływ zmian temperatury na napięcie wyjściowe układu można dość skutecznie skompensować stosując rozwiązanie o schemacie funkcjonalnym pokazanym na rys. 1/24a. Zmiany prądu nasycenia są tu kompensowane przez wprowadzenie dwóch symetrycznych układów logarytmicznych, z których każdy realizuje funkcję o postaci (1/92). Napięcie na wyjściu sumatora jest zatem równe

$$u'_O = u_{O1} - u_{O2} = U_T \left(\ln \frac{R_1 u_2}{R_2 u_1} + \ln \frac{I_{ES1}}{I_{ES2}} \right)$$

i przy zastosowaniu symetrycznych tranzystorów ($I_{ES1} = I_{ES2}$), przybiera wartość niezależną od temperaturowych zmian prądów nasycenia

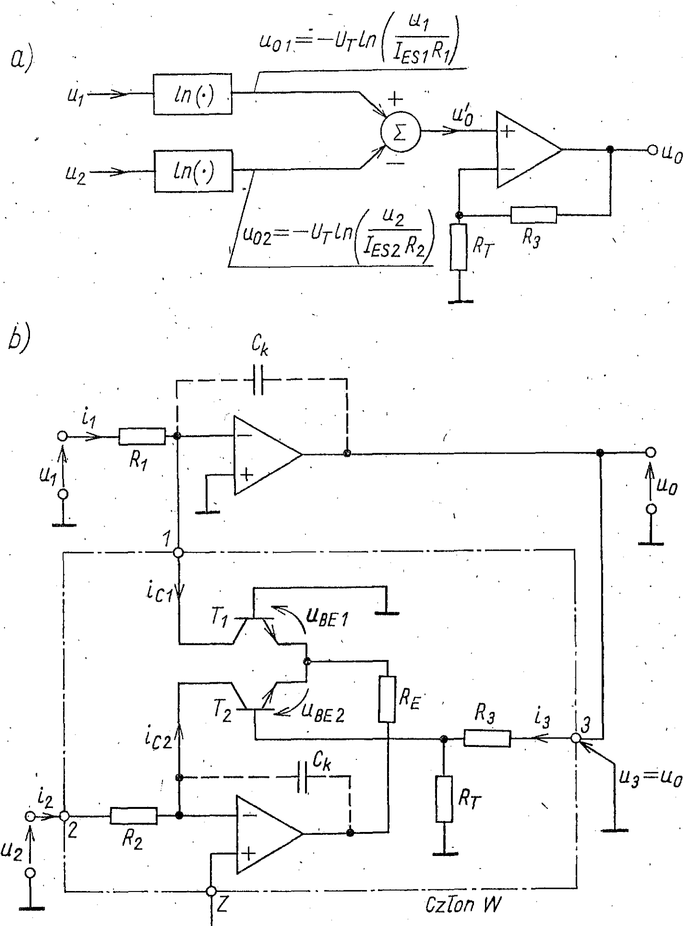
$$u'_O = U_T \ln \frac{R_1 u_2}{R_2 u_1} \tag{1/93}$$

Wpływ zmian U_T kompensuje się za pomocą napięciowego dzielnika $R_3 - R_T$, zawierającego rezystor R_T o odpowiednio dobranym temperaturowym współczynniku rezystancji. Napięcie wyjściowe układu jest wówczas określone zależnością

$$u_O = \left(1 + \frac{R_3}{R_T}\right) U_T \ln \frac{R_1 u_2}{R_2 u_1} \tag{1/94}$$

W otoczeniu temperatury normalnej (25°C) zmiany U_T zachodzą z szybkością 0,33% na 1°C, a zatem pełną kompensację temperaturową napięcia u_O (1/94), uzyskuje się zapewniając zmiany czynnika $(1 + R_3/R_T)$ wynoszące $-0{,}33\%/1°C$.

Na rysunku 1/24b przedstawiono schemat ideowy układu logarytmicznego



1/24 Układy logarytmiczne z kompensacją temperaturową: a) zasada kompensacji; b) przykład rozwiązania układu

o omówionej powyżej zasadzie działania. Jest to rozwiązanie dość typowe, stosowane również w przypadku, gdy zachodzi potrzeba wyznaczenia logarytmu z wartości stosunku napięć u_2/u_1. Tranzystory T_1 i T_2 powinny być stosowane w postaci pary symetrycznej w jednej obudowie, co zapewnia równość prądów $I_{ES1}(T) = I_{ES2}(T)$ w szerokim zakresie zmian temperatury.

W układzie tym obowiązują zależności:

$$i_1 = \frac{u_1}{R_1} = i_{C1} = I_{ES1}\exp\left(\frac{u_{BE1}}{U_T}\right)$$

$$i_2 = \frac{u_2}{R_2} = i_{C2} = I_{ES2}\exp\left(\frac{u_{BE2}}{U_T}\right)$$

$$u_{BE2} - u_{BE1} = \frac{R_T}{R_3 + R_T} u_O$$

Wyznaczając z tych zależności napięcie u_O, dostajemy równanie (1/94).

Jeśli układ ma realizować operację (1/90), to do jednego jego wejścia należy doprowadzić napięcie stałe (np. stabilizowane napięcie zasilania). Zapewniając: $u_1 = u_I$, $u_2 = U_{2R} = U_L R_2/R_1$ oraz $R_3/R_T = 15{,}90$, na podstawie (1/94) dostajemy

$$u_O = -k_D \lg \frac{u_I}{U_L}$$

gdzie

$$k_D = \left(1+\frac{R_3}{R_T}\right) U_T \ln 10 = 1{,}00 \text{ V}$$

Otrzymaliśmy zatem charakterystykę logarytmiczną (1/90) o nachyleniu wynoszącym -1 V/dekadę.

Powróćmy na chwilę do rys. 1/24b, aby zauważyć, że człon W (wyodrębniony linią kreskowaną) można opisać zależnością

$$i_{C1} = \frac{u_2}{R_2} \exp\left[\frac{-u_3}{(1+R_3/R_T)\,U_T}\right] \tag{1/95}$$

Wynika stąd, że przy $u_2 = U_{2R} = \text{const}$, człon W realizuje skompensowaną temperaturowo charakterystykę $i_{C1} = f(u_3)$ o postaci wykładniczej. Rozwiązanie to jest wykorzystywane także w układach formujących napięciowo-napięciowe charakterystyki wykładnicze (p. 1.4.2).

Istotnym parametrem układu logarytmicznego, charakteryzującym szybkość jego działania, jest małosygnałowa trzydecybelowa częstotliwość graniczna $f_{3\text{dB}}$. Ogólnie można powiedzieć, że układy realizowane metodą przedstawioną na schemacie funkcjonalnym z rys. 1/24a mają $f_{3\text{dB}} < 0{,}2...0{,}3$ MHz.

Układy szerokopasmowe

Szerokopasmowe układy logarytmiczne można utworzyć przez odpowiednie zestawienie par różnicowych tranzystorów bipolarnych. Układy takie generują funkcję $y = f(x)$

$$y = \sum_{j=1}^{n} b_j \operatorname{tgh}(a_j x) \tag{1/96}$$

aproksymującą funkcję logarytmiczną $y_a = g(x)$

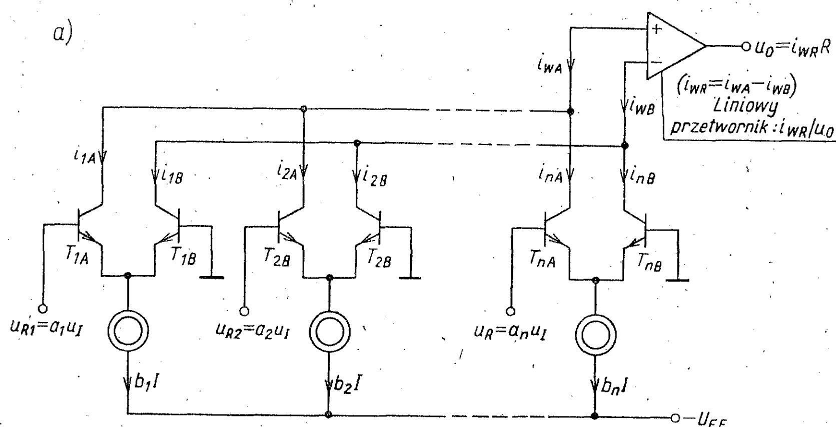
$$y \approx y_a = a + b \lg x$$

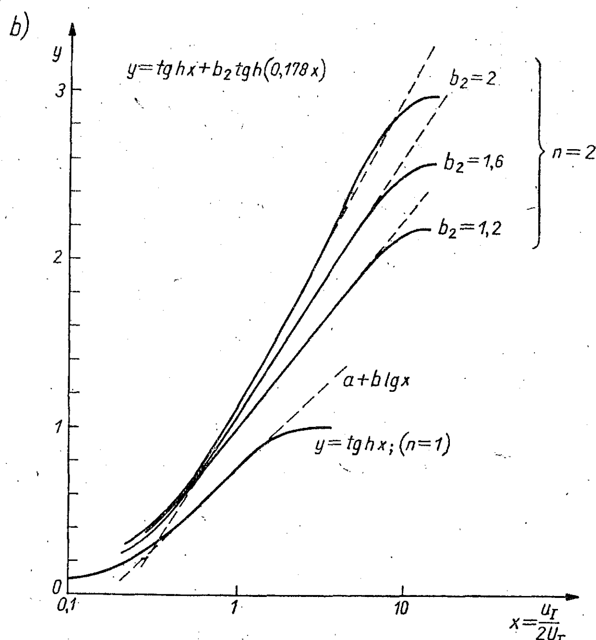
z założoną dokładnością, przy czym x, y — zmienne unormowane.

Na rysunku 1/25a przedstawiono układ generujący funkcję o postaci (1/96). Aby to wykazać odwołamy się do D3, gdzie pokazano [wzór (D3/9)], że dla pojedynczej pary różnicowej ze źródłem stałoprądowym I zachodzi związek

$$i_R = \alpha I \operatorname{tgh}\left(\frac{u_R}{2U_T}\right)$$

przy czym i_R jest różnicowym prądem kolektorowym, u_R — napięciem wejścio-





1/25 Szerokopasmowy układ logarytmiczny: a) uproszczony schemat ideowy; b) przykład realizowanej charakterystyki

wym doprowadzonym do baz tranzystorów. Na tej podstawie dla zestawu n par różnicowych (rys. 1/25a) możemy wynikowy prąd różnicowy i_{WR} opisać zależnością

$$i_{WR} = i_{WA} - i_{WB} = \sum_{j=1}^{n} i_{Rj} = \alpha I \sum_{j=1}^{n} b_j \text{tgh}\left(a_j \frac{u_I}{2U_T}\right)$$

Jak widać, wprowadzając zmienne unormowane

$$y = \frac{i_{WR}}{\alpha I}; \qquad x = \frac{u_I}{2U_T}$$

otrzymujemy funkcję aproksymującą o postaci (1/96).

Wykres funkcji (1/96) pokazano na rys. 1/25b. Przyjęto $n = 2$ oraz $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = 0{,}178$, tzn.

$$y = \mathrm{tgh}x + b_2 \mathrm{tgh}(0{,}178x)$$

Zauważmy, że przy takich wartościach liczbowych stosunek napięć sterujących dwie pary różnicowe wynosi $u_{R2}/u_{R1} = a_2/a_1 = a_2$ (w mierze logarytmicznej: $20\lg a_2 = -15$ dB). Na rysunku naszkicowano też charakterystykę $y = \mathrm{tgh}x$, odpowiadającą przypadkowi $n = 1$. Jak widać, jedna para różnicowa przybliża charakterystykę logarytmiczną w dość wąskim zakresie napięć wejściowych (orientacyjnie: ok. 15 dB, z błędem $\pm 0{,}5$ dB). Wprowadzenie dodatkowej pary różnicowej, przy $b_2 = 1{,}6...1{,}8$, pozwala ten zakres rozszerzyć do ok. 28...30 dB.

Można wykazać, że przez zwiększenie liczby n uzyskuje się dalsze rozszerzenie zakresu dynamicznego napięć wejściowych.

Przykładem układu działającego wg omówionej powyżej zasady może być układ monolityczny SN 76502 (Texas Instruments). Zawiera on w jednej obudowie dwa układy logarytmiczne, z których każdy jest skonstruowany z czterech par różnicowych ($n = 4$) i zawiera własny szerokopasmowy przetwornik, przekształcający wynikowy prąd różnicowy i_{WR} na napięcie wyjściowe u_O (rys. 1/25a). Układ realizuje charakterystykę logarytmiczną (z dokładnością $\pm 0{,}5$ dB) w zakresie napięć wejściowych ok. 60 dB. Jego częstotliwość graniczna wynosi $f_{3dB} = 40$ MHz.

1.4.2 Układy wykładnicze

Układ wykładniczy (nazywany również antylogarytmującym) generuje funkcję

$$u_O = k_W 10^{-(u_I/U_W)} = k_W \mathrm{e}^{-(u_I/U_E)} \tag{1/97}$$

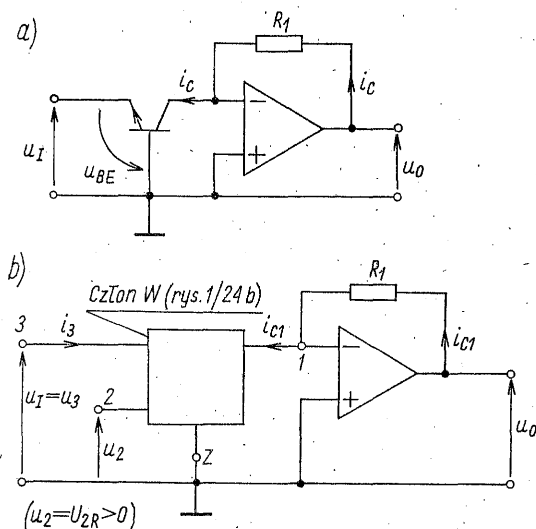
gdzie: k_W — stała skalowania, U_W i U_E — napięcia normujące ($U_W = U_E \ln 10$). W typowych realizacjach układowych napięcie wejściowe u_I może mieć dowolny znak. Natomiast napięcie wyjściowe u_O jest zawsze unipolarne. Przyjmuje ono wartość $u_O = k_W$, dla $u_I = 0$.

W najprostszym układzie (rys. 1/26a) wzmacniacz operacyjny spełnia rolę liniowego przetwornika prądu i_C na napięcie u_O i wobec tego, po uwzględnieniu (1/91), mamy

$$u_O = I_{ES} R_1 \exp\left(\frac{-u_I}{U_T}\right) \tag{1/98}$$

przy czym $u_I < 0$ (praktycznie: $u_I < -4U_T$, aby można było przyjąć słuszność wzoru (1/91)).

Widoczną wadą takiego układu jest silna zależność jego charakterystyki przejściowej od temperatury. Zależność tę można skompensować zastępując tranzystor członem wykładniczym W, pokazanym na rys. 1/24b. Człon taki realizuje funkcję (1/95) i może być sterowany bipolarnym napięciem u_3. Odpada więc ograniczenie co do znaku napięcia wejściowego, występujące w prostym układzie wykładniczym.



1/26 Układy wykładnicze: a) rozwiązanie proste; b) wersja z kompensacją zmian termicznych

Na rysunku 1/26b pokazano schemat układu wykładniczego z kompensacją zmian termicznych charakterystyki. Uwzględniając, że zastosowany sposób połączeń zapewnia $u_3 = u_I$ oraz $u_2 = U_{2R}$, na podstawie równania (1/95) otrzymujemy

$$u_O = \frac{R_1}{R_2} U_{2R} \exp\left[\frac{-u_I}{(1+R_3/R_T)U_T}\right] = k_W 10^{-(u_I/U_W)} \tag{1/99}$$

gdzie

$$k_W = \frac{R_1}{R_2} U_{2R}; \qquad U_W = (1+R_3/R_T)U_T \ln 10$$

A zatem układ generuje funkcję wykładniczą o parametrach, których wartości można zmieniać przez dobór wartości napięcia odniesienia U_{2R} oraz stosunku odpowiednich rezystancji.

1.5 UKŁADY WIELOFUNKCYJNE

Napięcie wyjściowe typowego układu wielofunkcyjnego wyraża się zależnością

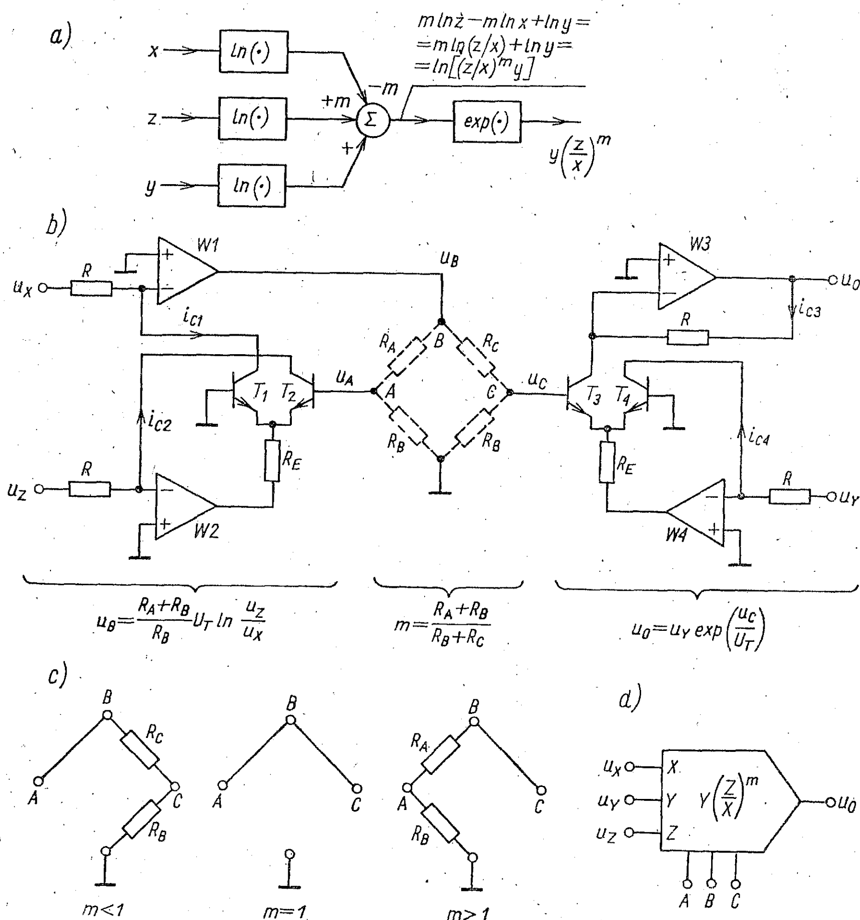
$$u_O = u_Y \left[\frac{u_Z}{u_X}\right]^m \tag{1/100}$$

przy czym: u_X, u_Y, u_Z są napięciami wejściowymi, m — wykładnikiem potęgi, którego wartość może być dowolnie dobierana w zakresie $0 < m_{\min} \leqslant m \leqslant m_{\max}$ (na ogół $0{,}2 \leqslant m \leqslant 5$).

Zasadę działania takiego układu objaśnia schemat z rys. 1/27a. Ze względu

na stosowanie operacji logarytmicznych polaryzacja wszystkich trzech napięć wejściowych musi być dodatnia.

Typowe rozwiązanie układu wielofunkcyjnego pokazano na rys. 1/27b. Para symetrycznych tranzystorów T_1—T_2 oraz wzmacniacze operacyjne W_1 i W_2 tworzą układ dający napięcie u_B proporcjonalne do logarytmu stosunku



1/27 Układ wielofunkcyjny: a) schemat funkcjonalny; b) schemat ideowy; c) sposób łączenia końcówek układu przy różnych wartościach wykładnika potęgi m; d) oznaczenie schematowe

napięć u_Z/u_X. Dzielniki rezystancyjne R_A—R_C spełniają rolę sumatora o programowanym (za pomocą odpowiedniego doboru rezystancji) współczynniku wagowym m. Natomiast symetryczna para T_3—T_4 oraz pozostałe wzmacniacze stanowią układ wykładniczy o napięciu sterującym u_C, napięciu wyjściowym u_O i stałej skalowania uzależnionej liniowo od napięcia u_Y. Rozpatrzmy to nieco bliżej, zakładając idealne wzmacniacze operacyjne.

Niech prądy kolektorowe tranzystorów $T_1 \dots T_4$ będą określone wzorem (1/91). Wówczas napięcia u_A i u_C możemy wyrazić następująco:

$$u_A = u_{BE2} - u_{BE1} = U_T \ln \frac{i_{C2}}{i_{C1}} = U_T \ln \frac{u_Z}{u_X} \tag{1/101}$$

$$u_C = u_{BE3} - u_{BE4} = U_T \ln \frac{i_{C3}}{i_{C4}} = U_T \ln \frac{u_O}{u_Y} \tag{1/102}$$

gdyż:

$$i_{C1} = u_X/R, \quad i_{C2} = u_Z/R, \quad i_{C3} = u_O/R, \quad i_{C4} = u_Y/R$$

Napięcie u_B

$$u_B = \frac{R_A + R_B}{R_B} u_A$$

i wobec tego, po uwzględnieniu (1/101), mamy

$$u_B = \frac{R_A + R_B}{R_B} U_T \ln \frac{u_Z}{u_X} \tag{1/103}$$

Dowiedliśmy zatem, że układ realizuje operację logarytmiczną z ilorazu dwóch napięć wejściowych. Zapisując zależność (1/102) w równoważnej postaci

$$u_O = u_Y \exp\left(\frac{u_C}{U_T}\right) \tag{1/104}$$

widzimy, że układ realizuje również sygnalizowaną wcześniej operację wykładniczą. Zauważmy nadto, że w układzie zachodzi związek

$$u_C = \frac{R_B}{R_B + R_C} u_B$$

na podstawie którego, po uwzględnieniu wzoru (1/103), dostajemy

$$u_C = \frac{R_A + R_B}{R_B + R_C} U_T \ln \frac{u_Z}{u_X} \tag{1/105}$$

Podstawiając równanie (1/105) do (1/104) otrzymujemy ostatecznie, że

$$u_O = u_Y \left[\frac{u_Z}{u_X}\right]^m \tag{1/106}$$

gdzie

$$m = \frac{R_A + R_B}{R_B + R_C} \tag{1/107}$$

Na rysunku 1/27c pokazano sposób łączenia końcówek A, B i C układu, umożliwiający zaprogramowanie różnych wartości wykładnika potęgi m.

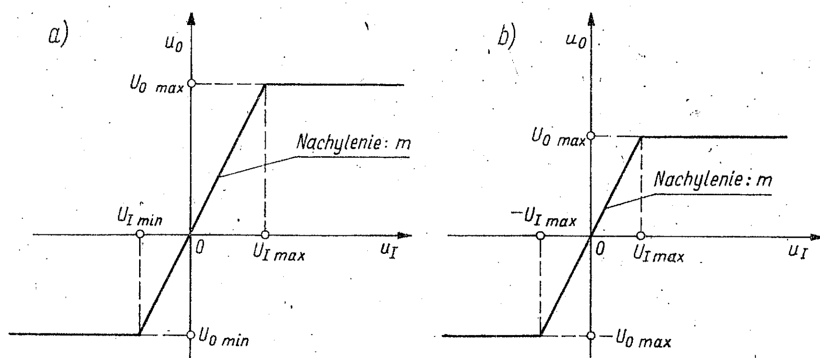
1.6 UKŁADY KSZTAŁTUJĄCE FUNKCJE PRZEDZIAŁAMI PROSTOLINIOWE

1.6.1 Ograniczniki napięcia

Zadaniem idealnego ogranicznika napięcia jest wytworzenie funkcji $u_O = f(u_I)$ o postaci

$$u_O = \begin{cases} U_{O\,\mathrm{min}}, & \text{jeśli} \quad u_I < U_{I\,\mathrm{min}} \\ mu_I, & \text{jeśli} \quad U_{I\,\mathrm{min}} \leqslant u_I \leqslant U_{I\,\mathrm{max}} \\ U_{O\,\mathrm{max}}, & \text{jeśli} \quad u_I > U_{I\,\mathrm{max}} \end{cases} \tag{1/108}$$

Charakterystykę przejściową takiego układu, przy $m > 0$, pokazano na rys. 1/28a. Jak widać, między progami ograniczania (od $U_{I\,\mathrm{min}}$ do $U_{I\,\mathrm{max}}$) charakterystyka jest liniowa, a po przekroczeniu wartości progowych jest stała (u_O = const).



1/28 Charakterystyki idealnych ograniczników napięcia: a) niesymetrycznego; b) symetrycznego

W przypadku symetrycznego ograniczania, tzn. gdy $U_{I\,\mathrm{max}} = -U_{I\,\mathrm{min}}$, ogranicznik jest nazywany symetrycznym, a jego charakterystykę przejściową (rys. 1/28b) można opisać funkcją o prostszej postaci

$$u_O = \begin{cases} mu_I, & |u_I| \leqslant U_{I\,\mathrm{max}} \\ U_{O\,\mathrm{max}}\,\mathrm{sgn}(u_I), & |u_I| > U_{I\,\mathrm{max}} \end{cases} \tag{1/109}$$

Charakterystyki ograniczników rzeczywistych wykazują odchylenia od przebiegu idealnego, głównie w otoczeniu progów (stopniowe przejście z zakresu liniowego do zakresu ograniczenia).

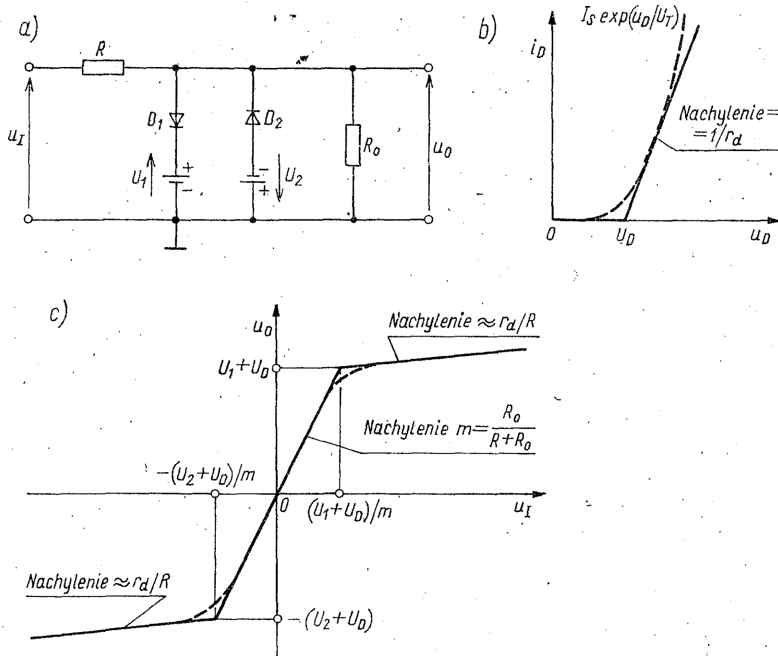
Prosty układ ogranicznika diodowego pokazano na rys. 1/29a. W układzie tym poziomy ograniczenia są ustalane za pomocą napięć U_1 i U_2, polaryzujących diody w kierunku zaporowym. Przyjmijmy, że charakterystyka diody może być aproksymowana linią łamaną, jak to pokazano na rys. 1/29b, gdzie U_D jest progowym napięciem diody, a r_d jest rezystancją dynamiczną w zakresie przewodzenia. Przy tym założeniu otrzymujemy charakterystykę pokazaną na rys. 1/29c, co można objaśnić następująco.

Dla małych napięć wejściowych obie diody nie przewodzą i wobec tego układ zachowuje się jak liniowy rezystancyjny dzielnik napięciowy

$$u_O = \frac{R_0}{R+R_0} u_I = m u_I \tag{1/110}$$

Rozpatrzmy zakres napięć $u_I > 0$. Dioda D_1 zostaje włączona z chwilą, gdy napięcie wyjściowe osiągnie wartość $U_1 + U_D$. Stan taki odpowiada wejściowemu napięciu progowemu o wartości (wg (1/110))

$$U_{O\max} = U_1 + U_D = \frac{R_0}{R+R_0} u_{I\max} = m u_{I\max}$$



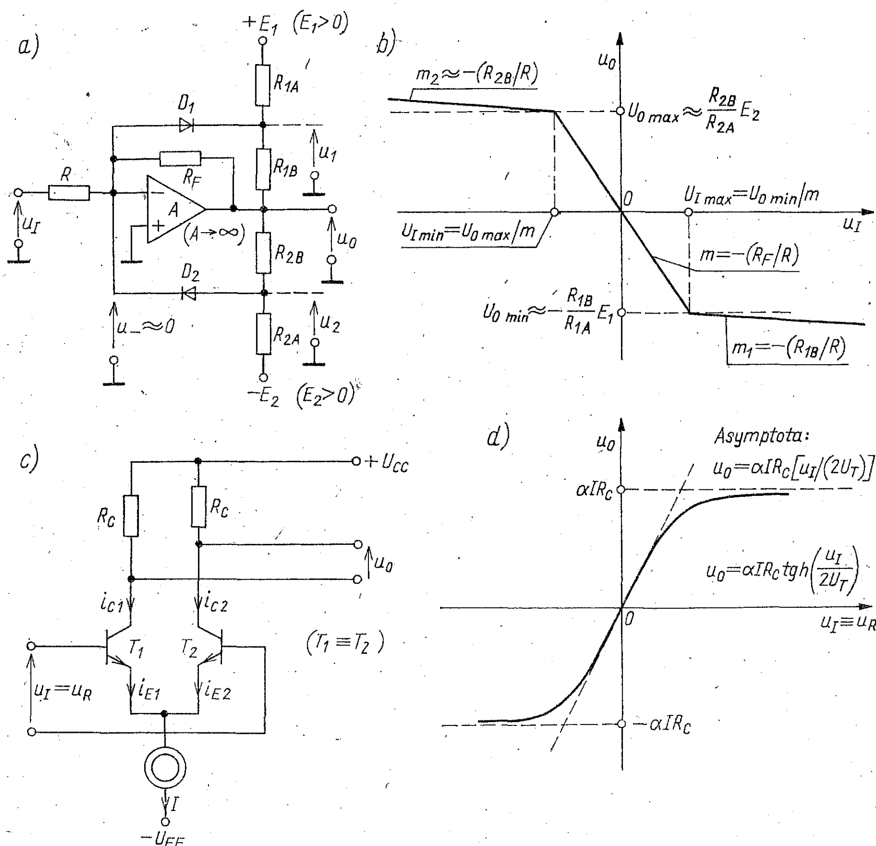
1/29 Ogranicznik diodowy: a) schemat; b) charakterystyka diody i przyjęta jej aproksymacja; c) charakterystyka ogranicznika

Przy dalszym wzroście napięcia wejściowego, $u_I > u_{I\max}$, następuje już ograniczanie napięcia u_O. W zakresie ograniczania nachylenie charakterystyki wynosi $(r_d||R_0)/(R+r_d||R_0)$, a jeśli $r_d \ll R||R_0$, to nachylenie przybiera wartość równą r_d/R.

W podobny sposób można wyznaczyć parametry ogranicznika dla zakresu napięć $u_I < 0$ (rys. 1/29c).

Ponieważ rzeczywista charakterystyka diody (linia przerywana na rys. 1/29b) nie ma ściśle określonego punktu załamania (progu), dlatego też rzeczywiste ograniczniki diodowe mają charakterystyki zaokrąglone w pobliżu założonej wartości progowej (linie przerywane na rys. 1/29c).

Ograniczniki napięcia są często konstruowane przy użyciu diod i wzmacniaczy operacyjnych. Proste rozwiązanie tego typu pokazano na rys. 1/30a. Jak widać, w pętli sprzężenia zwrotnego wzmacniacza są umieszczone diody D_1 i D_2. Przy $u_I = 0$ diody są spolaryzowane wstecznie napięciami $u_1 = U_1$



1/30 Przykłady ograniczników. Schemat (a) i charakterystyka (b) układu ze wzmacniaczem operacyjnym oraz schemat (c) i charakterystyka (d) układu z parą różnicową

i $u_2 = U_2$, uzyskiwanymi z odpowiednich dzielników rezystancyjnych zasilanych ze źródeł zewnętrznych E_1 i E_2 (zwykle są to napięcia zasilania wzmacniacza operacyjnego). W początkowym zakresie charakterystyki (rys. 1/30b), tzn. dla dostatecznie małych wartości $|u_I|$, obie diody są wyłączone. Ogranicznik zachowuje się więc jak liniowy wzmacniacz odwracający, a jego wzmocnienie napięciowe wynosi $m = -(R_F/R)$. Wchodzi on w zakres ograniczania dopiero wówczas, gdy dioda D_1 lub D_2 zostaje włączona.

Aby wyznaczyć napięcia progowe rozpatrzmy najpierw zakres napięć wejściowych $u_I > 0$. Przy wzroście u_I maleje napięcie u_O, a tym samym napięcie u_1, gdyż

$$u_1 = \frac{E_1 - u_O}{R_{1A}+R_{1B}} R_{1B} + u_O = \frac{R_{1B}}{R_{1A}+R_{1B}} \left[E_1 + \frac{R_{1A}}{R_{1B}} u_O \right] \qquad (1/111)$$

Jeśli u_1 osiągnie wartości $u_1 \leqslant -U_D$, to zostaje włączona dioda D_1 i następuje ograniczenie napięcia wyjściowego. Podstawiając $u_1 = -U_D$ do wzoru (1/111) otrzymujemy wartość progową u_O

$$U_{O\,\min} = -\frac{R_{1B}}{R_{1A}} E_1 - \left(1+\frac{R_{1B}}{R_{1A}}\right) U_D \tag{1/112a}$$

Stąd

$$U_{I\max} = \frac{U_{O\,\min}}{m} = -\frac{R}{R_F} U_{O\,\min} \tag{1/112b}$$

Jak to można z łatwością sprawdzić, nachylenie odcinka charakterystyki w zakresie ograniczania

$$m_1 = -(R_F||R_{1B})/R \underset{R_F \gg R_{1B}}{\approx} -(R_{1B}/R)$$

Rozpatrując podobnie zakres napięć $u_I < 0$ otrzymujemy wyniki następujące. Dioda D_2 przewodzi, gdy $u_I \geqslant U_D$. Stąd

$$U_{O\max} = \frac{R_{2B}}{R_{2A}} E_2 + \left(1+\frac{R_{2B}}{R_{2A}}\right) U_D \tag{1/113a}$$

$$U_{I\min} = \frac{U_{O\max}}{m} = -\frac{R}{R_F} U_{O\max} \tag{1/113b}$$

$$m_2 = -(R_F||R_{2B})/R \underset{R_F \gg R_{2B}}{\approx} -(R_{2B}/R)$$

Charakterystyczne parametry ogranicznika zamieszczono na rys. 1/30b.

Rolę symetrycznego ogranicznika może również spełniać układ z parą różnicową o schemacie pokazanym na rys. 1/30c. Jak wykazano w dodatku D3, w takim układzie różnicowy prąd kolektorowy i_R wyraża się wzorem (D3/9), wobec czego otrzymujemy

$$u_O = i_R R_C = IR_C \operatorname{tgh}\left(\frac{u_I}{2U_T}\right)$$

Charakterystykę ogranicznika pokazano na rys. 1/30d.

1.6.2 Układy progowe

Idealnym układem progowym nazwiemy układ, którego przebieg wyjściowy dla jednej polaryzacji sygnału wejściowego zmienia się liniowo, zaś dla polaryzacji odwrotnej przybiera wartości zerowe. Układ progowy realizuje funkcję $y = f(x)$, którą możemy zapisać w postaci[1]

$$y = \pm\max(mx, 0) \tag{1/114}$$

---

[1] $\max(a, b) = \begin{cases} a & \text{jeśli } a \geqslant b \\ b & \text{jeśli } b > a \end{cases}$

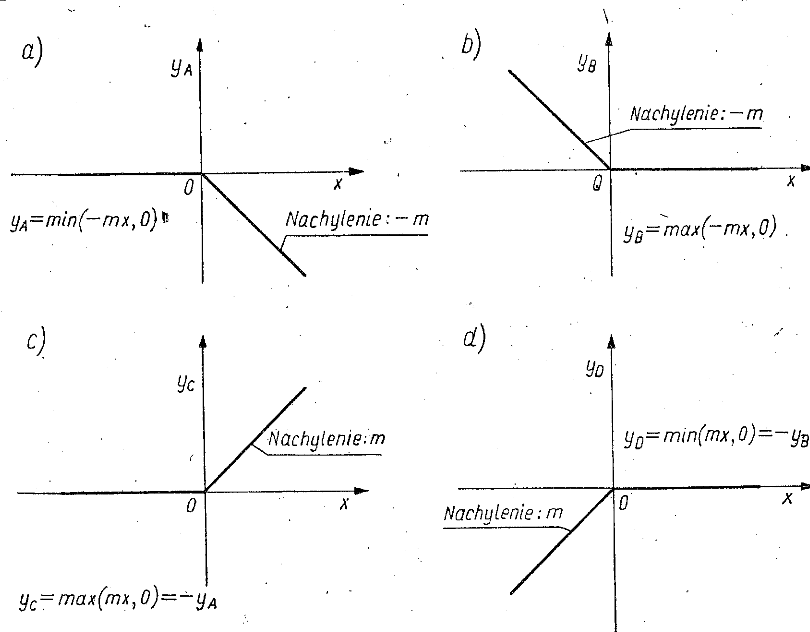
$\min(a, b) = \begin{cases} a & \text{jeśli } a \leqslant b \\ b & \text{jeśli } b < a \end{cases}$

lub

$$y = \pm \min(mx, 0) \qquad (1/115)$$

gdzie m jest stałą dodatnią, natomiast znak „±" oznacza, że polaryzacja przebiegu wyjściowego może być zarówno dodatnia, jak i ujemna.

Charakterystyka przejściowa idealnego układu progowego ma więc punkt załamania (próg) ulokowany w początku układu osi współrzędnych i może przebiegać w sposób pokazany na rys. 1/31.

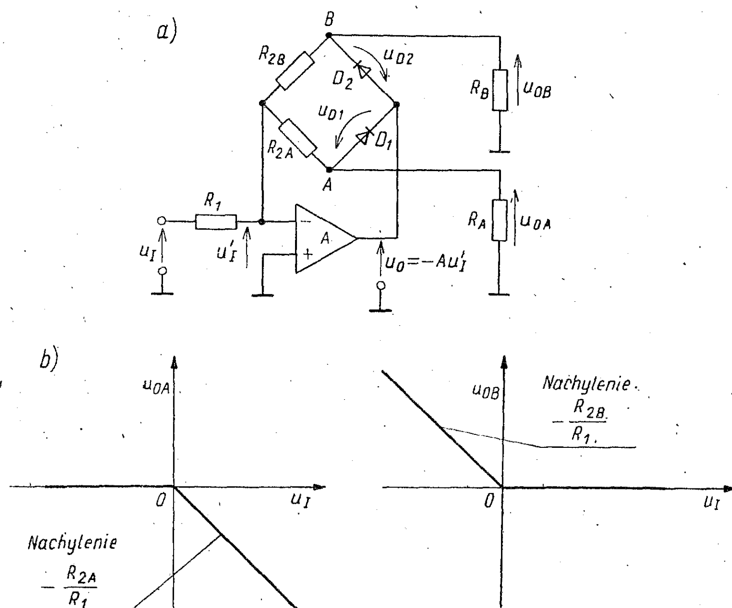


1/31 Rodzaje charakterystyk idealnego układu progowego

Najprostszym układem progowym, realizującym charakterystykę prądowo-napięciową, jest układ zestawiony z szeregowego połączenia diody półprzewodnikowej i rezystora. Dioda ma tu spełniać rolę klucza, włączanego z chwilą przekroczenia napięcia progowego. Jednakże nieidealność diody powoduje, że charakterystyka takiego prostego układu znacznie odbiega od idealnej. Najogólniej mówiąc, wytwarzana charakterystyka jest zaokrąglona w pobliżu założonej wartości progowej, a przy tym zależna od temperatury; nie ma więc ściśle określonego progu. (W dodatku D1 omawiamy to bardziej szczegółowo).

Układ, którego charakterystyki przejściowe są w dużym stopniu zbliżone do charakterystyk idealnych (rys. 1/31a, c) jest przedstawiony na rys. 1/32a. Układ realizuje charakterystyki napięciowo-napięciowe. Są tu dostępne dwa wyjścia: wyjście A i wyjście B. Jeśli układ pracuje jako progowy, to wykorzystywane jest tylko jedno wyjście, zależnie od pożądanego przebiegu charakterystyki przejściowej (rys. 1/32b). Natomiast dwa wyjścia mogą być jednocześnie wykorzystane przy realizacji innych układów, np. układu wyznaczającego bezwzględną wartość napięcia wejściowego u_I (p. 1.6.3).

Działanie układu jest następujące. Jeśli napięcie wejściowe u_I jest dodatnie, to napięcie wyjściowe wzmacniacza u_O jest ujemne i wobec tego przewodzi dioda D_1, zaś dioda D_2 znajduje się w stanie odcięcia (tzn. jest wyłączona). Jeśli $u_I < 0$, to $u_O > 0$ i przewodzi dioda D_2, natomiast dioda D_1 jest wyłączona. W układzie jest więc realizowane ujemne sprzężenie zwrotne o różnej głębokości, uwarunkowanej stanem przewodzenia diod, zależnym od polaryzacji napięcia wejściowego.



1/32 Dwuwyjściowy układ progowy: a) schemat; b) charakterystyki w przypadku $A \to \infty$

Wyniki analizy układu, otrzymane przy założeniu, że wzmacniacz operacyjny może być traktowany jako idealne różnicowe źródło napięciowe sterowane napięciem, przedstawiają się następująco:

$$u_{OA} = \begin{cases} \dfrac{R_A}{R_A+R_{2A}} \dfrac{\beta_B}{1+\beta_B A}\left(\dfrac{R_{2B}}{R_1}u_I - u_{D2}\right), & \text{jeśli} \quad u_I < 0 \\ 0 & \text{jeśli} \quad u_I = 0 \\ -\dfrac{R_{2A}}{R_1}\dfrac{\beta_A A}{1+\beta_A A}u_I + \dfrac{u_{D1}}{1+\beta_A A}, & \text{jeśli} \quad u_I > 0 \end{cases} \qquad (1/116)$$

$$u_{OB} = \begin{cases} -\dfrac{R_{2B}}{R_1}\dfrac{\beta_B}{1+\beta_B A}u_I - \dfrac{u_{D2}}{1+\beta_B A}, & \text{jeśli} \quad u_I < 0 \\ 0 & \text{jeśli} \quad u_I = 0 \\ \dfrac{R_B}{R_B+R_{2B}}\dfrac{\beta_A}{1+\beta_A A}\left(\dfrac{R_{2A}}{R_1}u_I + u_{D1}\right), & \text{jeśli} \quad u_I > 0 \end{cases} \qquad (1/117)$$

gdzie

$$\beta_A = \frac{1}{1+\frac{R_{2A}}{R_1}\left(1+\frac{R_1}{R_B+R_{2B}}\right)} \tag{1/118}$$

$$\beta_B = \frac{1}{1+\frac{R_{2B}}{R_1}\left(1+\frac{R_1}{R_A+R_{2A}}\right)} \tag{1/119}$$

przy czym A jest wzmocnieniem napięciowym wzmacniacza z otwartą pętlą sprzężenia zwrotnego.

Jak z przytoczonych zależności widać, w danym zakresie napięć wejściowych, napięcia wyjściowe u_{OA} i u_{OB} zawierają składniki liniowe (proporcjonalne do u_I) oraz składniki nieliniowe, proporcjonalne do spadku napięcia u_{D1} lub u_{D2} odkładającego się na przewodzących diodach[1]. Składniki nieliniowe, powodujące rozmycie progu charakterystyk przejściowych, mogą być skutecznie zredukowane przez zastosowanie odpowiednio silnego sprzężenia zwrotnego (odpowiednio duże wartości $\beta_A A$ i $\beta_B A$). Układ z dostatecznie silnym sprzężeniem zwrotnym zapewnia więc dobrą aproksymację idealnych charakterystyk progowych. W granicznym przypadku: $A \to \infty$, nieliniowe składniki są całkowicie wyeliminowane i układ realizuje idealne charakterystyki progowe, opisane następującymi zależnościami:

$$u_{OA} = \begin{cases} -\frac{R_{2A}}{R_1} u_I & \text{przy} \quad u_I > 0 \\ 0 & \text{przy} \quad u_I \leqslant 0 \end{cases} \tag{1/120}$$

$$u_{OB} = \begin{cases} -\frac{R_{2B}}{R_1} u_I & \text{przy} \quad u_I < 0 \\ 0 & \text{przy} \quad u_I \geqslant 0 \end{cases} \tag{1/121}$$

Sytuację tę zilustrowano na rys. 1/32b.

Charakterystyka idealnego elementu progowego ma punkt załamania P_z (próg) ulokowany w początku układu osi współrzędnych. W zastosowaniach praktycznych zachodzi niekiedy potrzeba realizacji charakterystyk z progiem przesuniętym, np. z punktem załamania $P_z(U_P, 0)$. Schemat układu dającego możliwość formowania takich charakterystyk pokazano na rys. 1/33. Jak widać, napięcia wyjściowe układu są określone następująco:

$$u_{OA} = \begin{cases} -\frac{R_{2A}}{R_1}(u_I - U_P) & \text{dla} \quad u_I > U_P \\ 0 & \text{dla} \quad u_I \leqslant U_P \end{cases} \tag{1/122a}$$

$$u_{OB} = \begin{cases} -\frac{R_{2B}}{R_1}(u_I - U_P) & \text{dla} \quad u_I < U_P \\ 0 & \text{dla} \quad u_I \geqslant U_P \end{cases} \tag{1/122b}$$

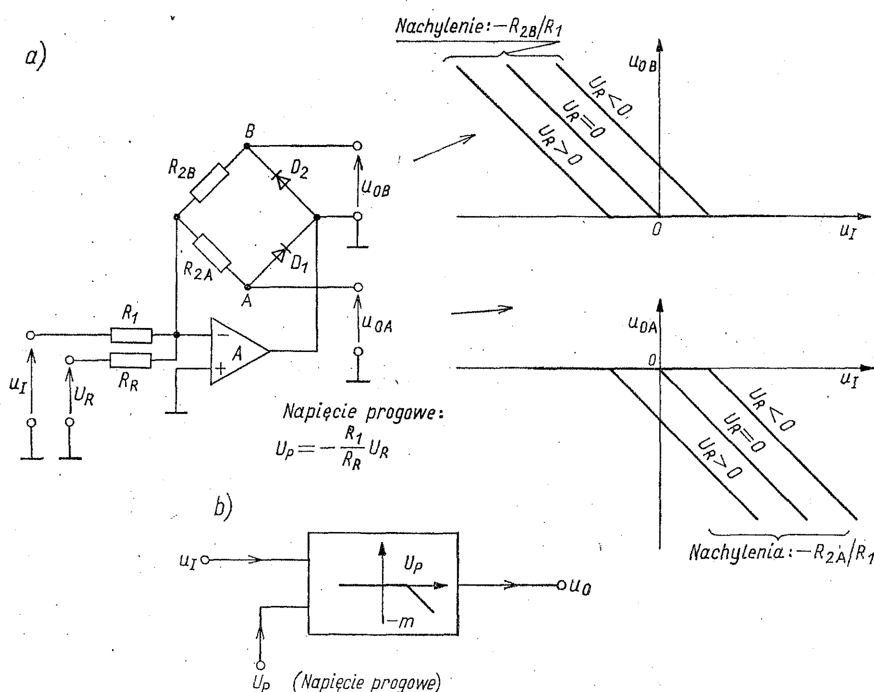
---

[1] Dla oszacowania wpływu składników nieliniowych, jako maksymalne wartości u_{D1} i u_{D2} można przyjąć ok. 220 mV dla diod germanowych i ok. 650 mV dla diod krzemowych.

przy czym U_P jest wejściowym napięciem progowym

$$U_P = -\frac{R_1}{R_R} U_R \tag{1/123}$$

Warto na koniec poczynić uwagę dotyczącą terminologii. Idealne układy progowe (z progiem ulokowanym w początku układu osi współrzędnych) są również nazywane *idealnymi prostownikami jednopołówkowymi* lub przetwor-



1/33 Układ z regulacją progu charakterystyk (a) oraz jego oznaczenie schematowe (b)

nikami typu *superdioda* (wzg. *idealna dioda*). Układ z rys. 1/32a jest określany niekiedy mianem *selektora polaryzacji sygnału*, gdyż umożliwia on rozeznanie znaku sygnału wejściowego, w myśl zasady: jeśli $u_{OA} \neq 0$, to $u_I > 0$; jeśli natomiast $u_{OB} \neq 0$, to $u_I < 0$.

1.6.3 Układy realizujące wartość bezwzględną

Układy tego rodzaju, znane również pod nazwą *idealnych prostowników dwupołówkowych*, realizują operację

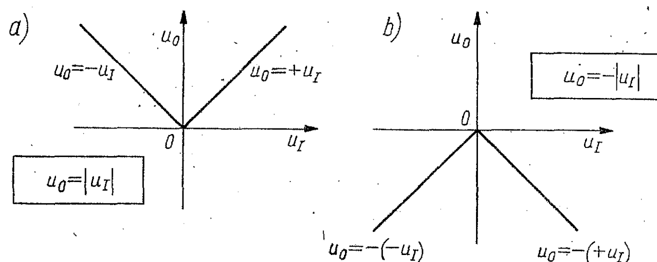
$$u_O = a|u_I| \tag{1/124}$$

gdzie u_I jest napięciem wejściowym, zaś a — stałą, dodatnią lub ujemną (np. $a = \pm 1$, rys. 1/34).

Istnieje kilka rozwiązań układu wyznaczającego wartość bezwzględną

napięcia wejściowego. W każdym z nich, podstawowym podzespołem konstrukcyjnym układu jest idealny układ progowy (p. 1.6.2).

Na rysunku 1/35a i b pokazano schematy funkcjonalne dwóch typowych układów realizujących operację (1/124). Jak widać, są one zestawione z układów



1/34 Charakterystyki przejściowe układów realizujących wartość bezwzględną $u_O = a|u_I|$: a) przypadek $a = 1$; b) przypadek $a = -1$

progowych i sumatorów. W układach praktycznych (rys. 1/35c i d) rolę sumatora spełnia wzmacniacz operacyjny W_2.

Układ z rys. 1/35c działa zgodnie ze schematem funkcjonalnym przedstawionym na rys. 1/35a. Zastosowano w nim układ progowy realizujący funkcję (1/120), tzn.

$$u_{OA} = \begin{cases} -(R_{2A}/R_1)u_I, & u_I > 0 \\ 0, & u_I \leqslant 0 \end{cases} \tag{1/125}$$

Sumator W_2 wykonuje operację

$$u_O = -\frac{R_5}{R_3}u_I - \frac{R_5}{R_4}u_{OA}$$

co po uwzględnieniu (1/125) daje

$$u_O = \begin{cases} \left[\dfrac{R_{2A}R_5}{R_1R_4} - \dfrac{R_5}{R_3}\right]u_I, & u_I > 0 \\ -\dfrac{R_5}{R_3}u_I, & u_I \leqslant 0 \end{cases}$$

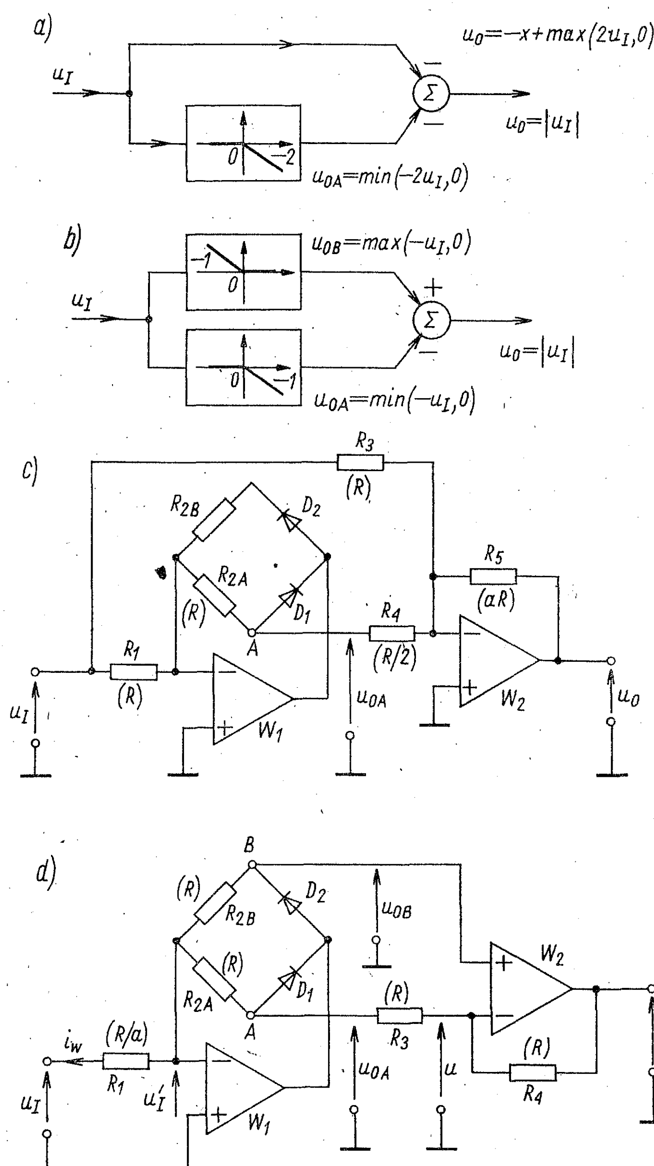
A zatem, jeśli rezystancje zostaną dobrane w sposób następujący:

$$\frac{R_5}{R_3} = a \geqslant 1; \qquad \frac{R_{2A}R_5}{R_1R_4} = 2a$$

(np.: $R_1 = R_{2A} = R_3 = 2R_4 = R_5/a = R$), to napięcie wyjściowe będzie równe $+au_I$ przy $u_I > 0$ oraz równe $-au_I$ przy $u_I < 0$, czyli

$$u_O = a|u_I| = \frac{R_5}{R}|u_I|; \quad (R_5 \geqslant R) \tag{1/126}$$

Widzimy więc, że układ realizuje wartość bezwzględną przy współczynniku $a \geqslant 1$.



1/35 Układy wyznaczające wartość bezwzględną: a, b) schematy funkcjonalne; c, d) schematy ideowe

Zasadę działania układu z rys. 1/35d przedstawiono na schemacie funkcjonalnym na rys. 1/35b, z tym jednak zastrzeżeniem, że wartości współczynników wagowych sumowania są zależne od stanu przewodzenia diod (zmienia się rozpływ prądu w układzie).

Rozpatrzmy to bliżej. Jeśli $u_I > 0$, to przewodzi dioda D_1, nie przewodzi dioda D_2. Wobec tego: $u_{OA} = -(R_{2A}/R_1)u_I$, $u_{OB} = 0$. Ponieważ sumator wykonuje operacje

$$u_O = -\frac{R_4}{R_3} u_{OA} + \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) u_{OB}$$

dostajemy więc

$$u_O = \frac{R_{2A} R_4}{R_1 R_3} u_I = a_1 u_I; \quad u_I > 0 \qquad (1/127)$$

Jeśli natomiast $u_I < 0$, to przewodzi D_2, nie przewodzi D_1. W takim przypadku sumator W_2 realizuje funkcję

$$u_O = \left[1 + \frac{R_4}{R_{2A} + R_3}\right] u_{OB} - \frac{R_4}{R_{2A} + R_3} u_I' \qquad (1/128)$$

Przy $A \to \infty$, wzmacniacze operacyjne W_1 i W_2, objęte pętlą ujemnego sprzężenia zwrotnego, wymuszają stan pracy: $u_I' = 0$, $u = u_{OB}$ (tzw. *bezprądowe zwarcia* wejść wzmacniaczy). Dlatego też, prąd wejściowy i_W układu możemy zapisać jako

$$i_W = -\frac{u_I}{R_1} = \frac{u_{OB}}{R_{2B}} + \frac{u_{OB}}{R_{2A} + R_3} = \frac{u_{OB}}{R_{2B} || (R_{2A} + R_3)}$$

Po obliczeniu z tej zależności napięcia u_{OB} i podstawieniu do (1/128), otrzymujemy

$$u_O = \frac{R_{2B} || (R_{2A} + R_3)}{R_1} \left(1 + \frac{R_4}{R_{2A} + R_3}\right)(-u_I) = a_2(-u_I); \quad u_I < 0 \quad (1/129)$$

Z równań (1/127) i (1/129) widzimy, że do uzyskania operacji wyznaczania wartości bezwzględnej musi zachodzić równość współczynników: $a_1 = a_2 = a$. Przyjmijmy, że rezystancje są dobrane następująco:

$$R_{2A} = R_{2B} = R_3 = R_4 = aR_1 = R \qquad (1/130)$$

Wówczas na podstawie (1/127) i (1/129) dostajemy odpowiednio

$$u_O = \frac{R}{R_1} u_I = a u_I, \quad u_I > 0$$

$$u_O = \frac{R}{R_1} (-u_I) = a(-u_I), \quad u_I < 0$$

co oznacza, że

$$u_O = \frac{R}{R_1} |u_I| = a |u_I|$$

A zatem układ realizuje wartość bezwzględną.

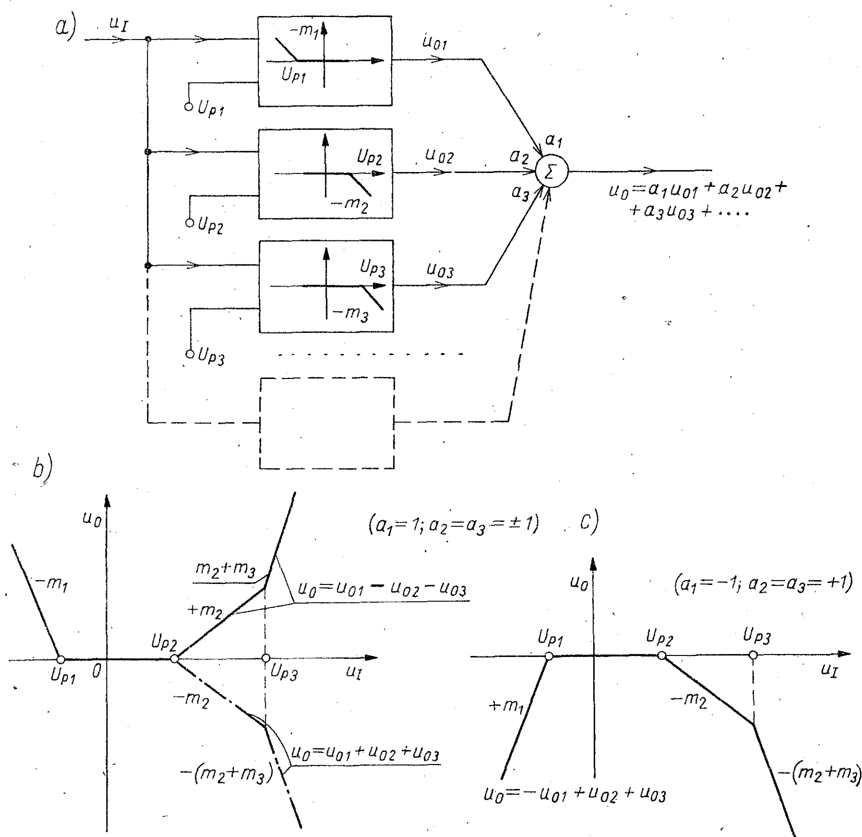
1.6.4 Sposoby realizacji charakterystyk odcinkami liniowych

W poprzednich podrozdziałach omówiliśmy niektóre, częściej stosowane układy realizujące charakterystyki odcinkami liniowe. W zagadnieniach praktycznych często występuje także potrzeba realizacji wielu charakterystyk tego rodzaju,

ale inaczej ukształtowanych. Dotyczy to zwłaszcza przypadków, gdy zadaną funkcję nieliniową generuje się metodą aproksymacyjną.

Jak już wiemy (p. 1.1.2), generacja funkcji metodą aproksymacyjną polega na wytworzeniu funkcji, która z wymaganą dokładnością aproksymuje funkcję zadaną. W wielu przypadkach praktycznych, jako funkcję aproksymującą przyjmuje się funkcję odcinkami liniową. Nie wdając się bliżej w sposoby tego rodzaju aproksymacji i ocenę błędu przybliżenia[1], zajmiemy się jedynie omówieniem niektórych metod realizacji charakterystyk odcinkami liniowych.

Do wytworzenia odcinkami liniowej charakterystyki przejściowej szczególnie nadają się układy progowe (p. 1.6.2). Układy takie, zestawione w sposób pokazany na rys. 1/36a, stwarzają możliwość formowania dowolnie ukształtowanej charakterystyki, której punkty załamania są ustalane za pomocą napięć progowych $U_{P1}, U_{P2}, \ldots$, zaś nachylenia poszczególnych jej odcinków — przez odpowiedni dobór nachylenia liniowego odcinka układu progowego $(m_1, m_2, \ldots)$ lub/i dobór współczynnika a_j sumatora $(a_1 m_1, a_2 m_2, \ldots)$.



1/36 Realizacja charakterystyk odcinkami liniowych: a) schemat funkcjonalny; b, c) przykłady charakterystyk

---

[1] Zagadnienia te są omawiane np. w pracy [9], rozdz. 4.4.

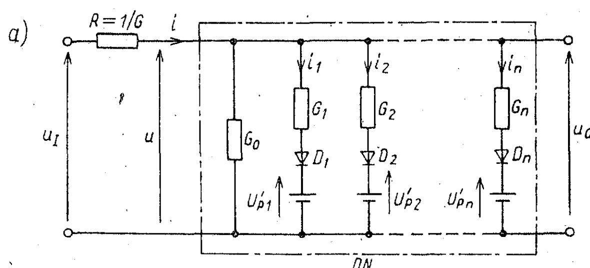
Jako przykład, na rys. 1/36b i c przedstawiono charakterystyki uzyskane przy zastosowaniu trzech układów progowych. Przyjęto jednostkowe współczynniki sumowania, $a_j = \pm 1$.

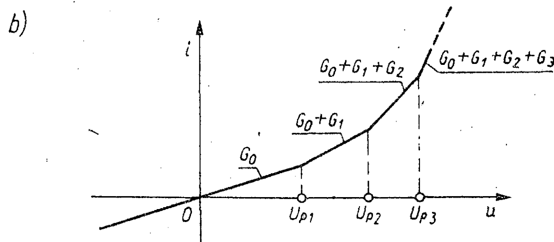
Główną wadą przedstawionego powyżej rozwiązania jest stosunkowo duża złożoność układu, zwłaszcza w przypadku realizacji charakterystyki wieloodcinkowej. Zauważmy, że do utworzenia n punktów załamania charakterystyki należy użyć $n+1$ wzmacniaczy operacyjnych (n — układów progowych plus sumator).

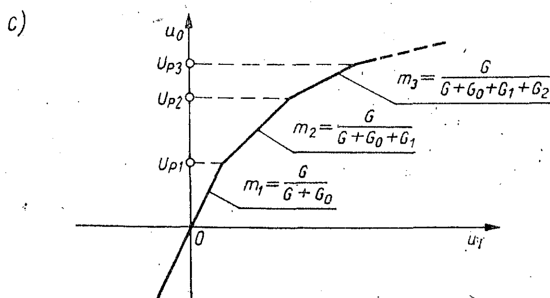
Zastosowanie wzmacniaczy operacyjnych, przy dużej złożoności konstrukcyjnej układu, znacznie ogranicza zakres częstotliwości, w którym układ można w przybliżeniu traktować jako bezinercyjny.

Bardziej szerokopasmowe układy realizujące odcinkami liniową charakterystykę przejściową można utworzyć za pomocą sieci złożonej z rezystorów i diod (lub tranzystorów). Prostą wersję takiej sieci pokazano na rys. 1/37a.

Sieć tę możemy traktować jako układ zestawiony z liniowego rezystora R dwójnika nieliniowego DN, wytwarzającego funkcję $i = g(u)$.







1/37 Diodowy generator funkcji (a) oraz jego charakterystyki (b, c)

Zajmiemy się najpierw dwójnikiem *DN*. Niech wartości napięć U'_{Pk} ($k = 1, 2, \ldots, n$) polaryzujących diody będą uporządkowane w sposób następujący:

$$U'_{P1} < U'_{P2} < \ldots < U'_{Pn} \tag{1/131}$$

Przyjmiemy dodatkowo, że diody stanowią idealne klucze, włączane z chwilą, gdy napięcie u osiągnie lub przekroczy wartość progową U_{Pk}, tzn. gdy $u \geqslant U_{Pk}$, gdzie

$$U_{Pk} = U'_{Pk} + U_D, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{1/132}$$

przy czym U_D jest napięciem progowym diody (np. rys. 1/29b, przy $r_d = 0$). Przy tych założeniach, prąd i_k, sterowany k-tą diodą, możemy przedstawić jako

$$i_k = \begin{cases} 0 & \text{jeśli} \quad u - U_{Pk} < 0 \\ G_k(u - U_{Pk}) & \text{jeśli} \quad u - U_{Pk} \geqslant 0 \end{cases} \tag{1/133a}$$

lub, używając krótszego zapisu, jako

$$i_k = \max[G_k(u - U_{Pk}), 0] \tag{1/133b}$$

Widzimy więc, że dwójnik *DN* generuje funkcję

$$i = g(u) = G_0 u + \sum_{k=1}^{n} \max[G_k(u - U_{Pk}), 0] \tag{1/134}$$

Jest to funkcja przedziałami prostoliniowa, a jej wykres pokazano na rys. 1/37b.

Znając właściwości dwójnika *DN*, widzimy natychmiast, że układ z rys. 1/37a jest układem o skokowo zmiennym podziale napięcia, a zatem realizuje on charakterystykę pokazaną na rys. 1/37c. Nachylenia kolejnych odcinków charakterystyki są określone następująco:

$$m_1 = \frac{G}{G + G_0} \qquad \text{dla } u_O < U_{P1}$$

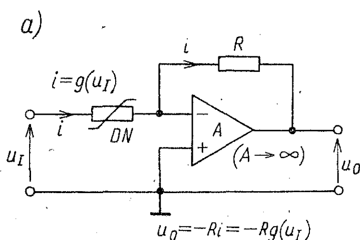
$$m_2 = \frac{G}{G + G_0 + G_1} \qquad \text{dla } U_{P1} \leqslant u_O < U_{P2}$$

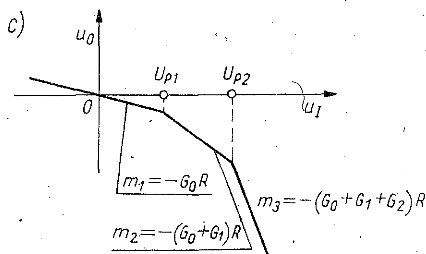
. . . .

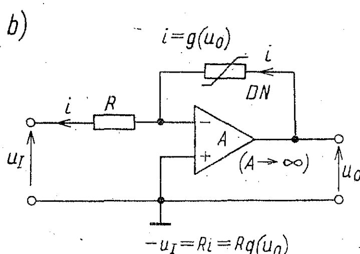
$$m_k = \frac{G}{G + G_0 + G_1 + G_2 + \ldots + G_{k-1}} \qquad \text{dla } U_{P(k-1)} \leqslant u_O < U_{Pk}$$

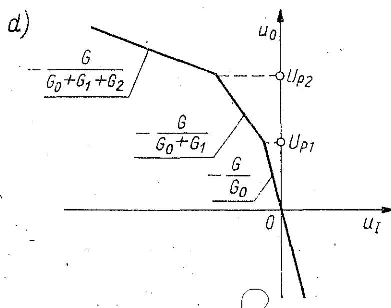
A zatem układ wytwarza charakterystykę odcinkami liniową, której punkty załamania mogą być ustawiane za pomocą napięć U_{Pk}, zaś nachylenia poszczególnych odcinków — przez odpowiedni dobór wartości konduktancji.

W celu uwidocznienia jeszcze innych możliwości kształtowania interesujących nas charakterystyk, dopowiemy na koniec, że dowolny dwójnik o charakterystyce odcinkowo-liniowej $g(u)$, na przykład dwójnik *DN* rozpatrywany









1/38 Kształtowanie charakterystyk przez zastosowanie wzmacniacza z nieliniowym sprzężeniem zwrotnym: a, b) schematy ogólne; c, d) charakterystyki w przypadku użycia dwójnika o funkcji $g(u)$ opisanej wzorem (1/134)

poprzednio, może również współpracować ze wzmacniaczem operacyjnym (rys. 1/38). Zależnie od sposobu umieszczenia dwójnika w pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego, układ ze wzmacniaczem operacyjnym będzie realizował charakterystykę

$$u_O = -Rg(u_I)$$

(rys. 1/38a i c) lub charakterystykę

$$u_O = g^{-1}\left(-\frac{u_I}{R}\right)$$

(rys. 1/38b i d), gdzie $g^{-1}(\cdot)$ oznacza funkcję odwrotną względem funkcji $g(\cdot)$.

1.7 PRZETWORNIKI PRZEBIEGU TRÓJKĄTNEGO NA SINUSOIDALNY

Zasadę przetwarzania przebiegu trójkątnego na przebieg sinusoidalny zilustrowano na rys. 1/39. Na wejście układu jest podawane symetryczne napięcie trójkątne $u_I(t)$ o amplitudzie U_i i zerowej wartości średniej

$$u_I(t) = (-1)^k \frac{2U_i}{\pi}(\omega t - k\pi) \qquad (1/135)$$

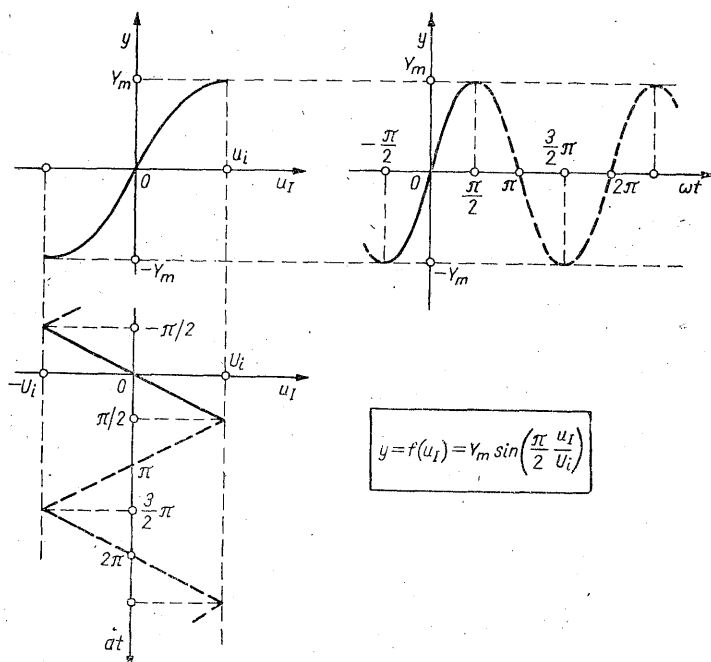
$$\frac{(2k-1)\pi}{2} \leqslant \omega t \leqslant \frac{(2k+1)\pi}{2}, \qquad k \text{ — liczba całkowita}$$

Jeśli charakterystyka przejściowa $y = f(u_I)$ idealnego przetwornika ma postać

$$y = Y_m \sin x = Y_m \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{u_I}{U_i}\right) \tag{1/136}$$

to na jego wyjściu pojawia się przebieg

$$y(t) = Y_m \sin\omega t \tag{1/137}$$



1/39 Zasada przetwarzania przebiegu trójkątnego na sinusoidalny

W rzeczywistych przetwornikach typu trójkąt-sinus nie udaje się zrealizować idealnej operacji przetwarzania (1/136). Uzyskiwane przebiegi wyjściowe odbiegają w większym lub mniejszym stopniu od przebiegu sinusoidalnego, tzn. zawierają w swym widmie wyższe harmoniczne. Parametrem przyjmowanym zwykle za miarę jakości przetwornika jest współczynnik zawartości harmonicznych

$$h = \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} h_k^2} \tag{1/138}$$

gdzie h_k oznacza zawartość k-tej harmonicznej. Równoważnym, wyrażanym w mierze logarytmicznej parametrem jest tłumienie harmonicznych, definiowane jako

$$A_h[\mathrm{dB}] = -20 \lg h$$

Rozwiązania układowe przetworników mogą być bardzo różne. Wszystkie

przetworniki są realizowane przy zastosowaniu metody aproksymacyjnej. Dokonując ich podziału wg rodzaju zastosowanych elementów nieliniowych, spośród częściej stosowanych rozwiązań można wymienić układy następujące:

1. Przetworniki z zastosowaniem układów mnożących (aproksymacja funkcji $\sin(\cdot)$ wielomianem potęgowym lub funkcją wymierną).
2. Przetworniki diodowe (aproksymacja funkcji $\sin(\cdot)$ funkcją przedziałami prostoliniową).
3. Przetworniki z zastosowaniem tranzystorowych par różnicowych (aproksymacja funkcji $\arcsin(\cdot)$ za pomocą liniowej kombinacji charakterystyk par różnicowych).

Zasady działania tych układów omówimy poniżej.

1.7.1 Przetworniki z zastosowaniem układów mnożących

Zasada działania tego rodzaju przetworników polega na aproksymacji funkcji sinus wielomianem potęgowym lub za pomocą funkcji wymiernej. Obie te funkcje aproksymujące można wytworzyć przy użyciu układów mnożących i sumatorów.

Jako wielomianową funkcję aproksymującą stosuje się obcięty szereg potęgowy

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \tag{1/139}$$

ograniczony do kilku pierwszych wyrazów, lub wielomian o inaczej dobranych współczynnikach.

W najprostszej wersji, przy uwzględnieniu tylko dwóch pierwszych wyrazów szeregu (1/139), przetwornik realizuje charakterystykę

$$y = Y_m\left(x - \frac{x^3}{6}\right) \tag{1/140}$$

gdzie

$$x = \frac{\pi}{2}\frac{u_I}{U_i}; \qquad |x| \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Schemat takiego układu pokazano na rys. 1/40a. Jak widać, układ realizuje charakterystykę napięciowo-napięciową ($y = u_O$, $Y_m = U_o$) o postaci

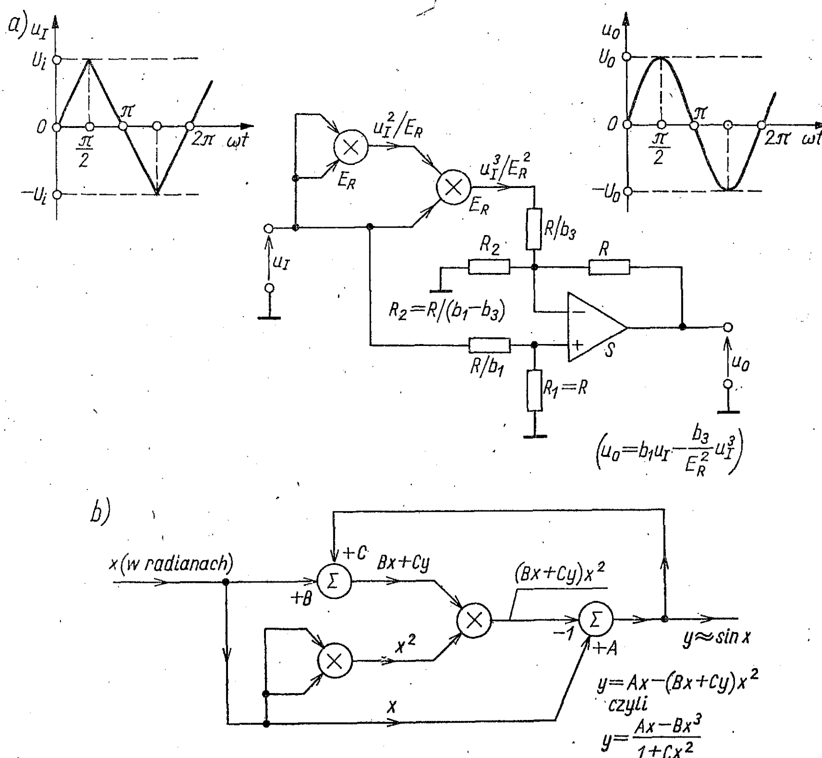
$$u_O = b_1 u_I - \frac{b_3}{E_R^2} u_I^3 \tag{1/141}$$

gdzie: b_1, b_3 — współczynniki sumatora S, E_R — napięcie normujące układu mnożącego. Dobór wartości współczynników sumatora wynika z przyrównania kolejnych wyrazów wielomianów (1/140) i (1/141), co daje

$$b_1 = \frac{\pi}{2}\frac{U_o}{U_i}; \qquad b_3 = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \frac{U_o E_R^2}{U_i^3} \tag{1/142}$$

W układzie z rys. 1/40a przyjęto, że $b_1 > b_3$ (w przeciwnym razie sumator powinien być rozwiązany inaczej, np. $R_1 = R/(1+b_3-b_1)$, $R_2 = \infty$).

Obcięcie szeregu (1/139) po drugim wyrazie wprowadza zniekształcenia harmoniczne o wartości $h \approx 2{,}18\%$ ($A_h \approx 33{,}2$ dB). Zniekształcenia te można



1/40 Generacja funkcji sinus przy zastosowaniu aproksymacji wielomianem trzeciego stopnia (a) oraz funkcją wymierną (b)

zmniejszyć dobierając inne wartości współczynnika b_3. Wykazywano (np. [5]), że minimum zniekształceń o wartości $h = 0{,}39\%$ występuje przy $b_3' = 6/6{,}81 = 0{,}88 b_3$, gdzie b_3 jest wartością współczynnika wyznaczoną wg wzoru (1/142).

Dalszą redukcję zniekształceń można teoretycznie uzyskać przez aproksymację funkcji sinus za pomocą wielomianu wyższego stopnia. Prowadzi to jednak do komplikacji układu, gdyż uwzględnienie każdego kolejnego wyrazu szeregu (1/139) wymaga użycia dodatkowego mnożnika.

Prostszym rozwiązaniem, dającym stosunkowo małe zniekształcenia (orientacyjnie: $h < 0{,}15\%$), jest generacja funkcji wymiernej

$$y = \frac{Ax-Bx^3}{1+Cx^2} = \frac{1{,}00042x-0{,}11138x^3}{1+0{,}05665x^2} \approx \sin x \qquad (1/143)$$

Funkcję tę można wytworzyć w układzie zestawionym z dwóch mnożników

i dwóch sumatorów (rys. 1/40b). Jak widać, funkcja wymierna jest realizowana metodą funkcji uwikłanej.

Przetworniki z mnożnikami i sumatorami (wzmacniacze operacyjne) mogą być stosowane jedynie przy przekształcaniu przebiegów stosunkowo wolnozmiennych (częstotliwość podstawowa pobudzenia nie przekracza na ogół kilkudziesięciu kHz).

1.7.2 Przetworniki diodowe

Inną grupę układów przekształcających przebiegi trójkątne na sinusoidalne stanowią przetworniki diodowe oraz ich odpowiedniki tranzystorowe. Układy takie generują funkcję przedziałami prostoliniową, która aproksymuje funkcję sinus z zadanym błędem. Sposoby generacji funkcji przedziałami prostoliniowej omówiono w p. 1.6.4.

Przetworniki tego typu są wykonywane jako rezystancyjne dzielniki napięciowe o skokowo zmiennym współczynniku podziału napięcia (rys. 1/41a). Rolę kluczy spełniają tu diody. Po przekroczeniu odpowiedniego progu, odpowiadającego danemu punktowi załamania charakterystyki, zostaje włączony dodatkowy rezystor bocznikujący dzielnik napięciowy od strony wyjścia, co powoduje skokową zmianę nachylenia jego charakterystyki przejściowej (rys. 1/41b).

Rolę kluczy mogą spełniać również tranzystory bipolarne (rys. 1/41c). Jeśli napięcie wejściowe przekroczy pierwszy poziom progowy U_{P1}, to zaczyna przewodzić tranzystor T_1. Sposób połączenia tranzystorów T_1 i T_2 jest taki, że napięcia u_{BE1} i u_{BE2} kompensują się wzajemnie. Wobec tego napięcie progowe U_{P1} występuje zarówno na bazie tranzystora T_2, jak i na emiterze T_1. Tranzystory T_1 i T_2 spełniają zatem rolę klucza K_1, włączającego rezystor R_1, poprzez idealne źródło napięciowe U_{P1}, do masy. Występuje więc sytuacja podobna, jak w układzie z rys. 1/41a. Zauważmy, że rozwiązanie to jest jednak korzystniejsze, gdyż dzięki kompensacji napięć baza-emiter ($u_{BE1}+u_{BE2} = 0$) zachodzi również kompensacja temperaturowa napięcia sterującego kluczem. (W układzie z rys. 1/41a pomijaliśmy, dla uproszczenia, napięcie progowe diody, które — jak wiemy — zależy od temperatury).

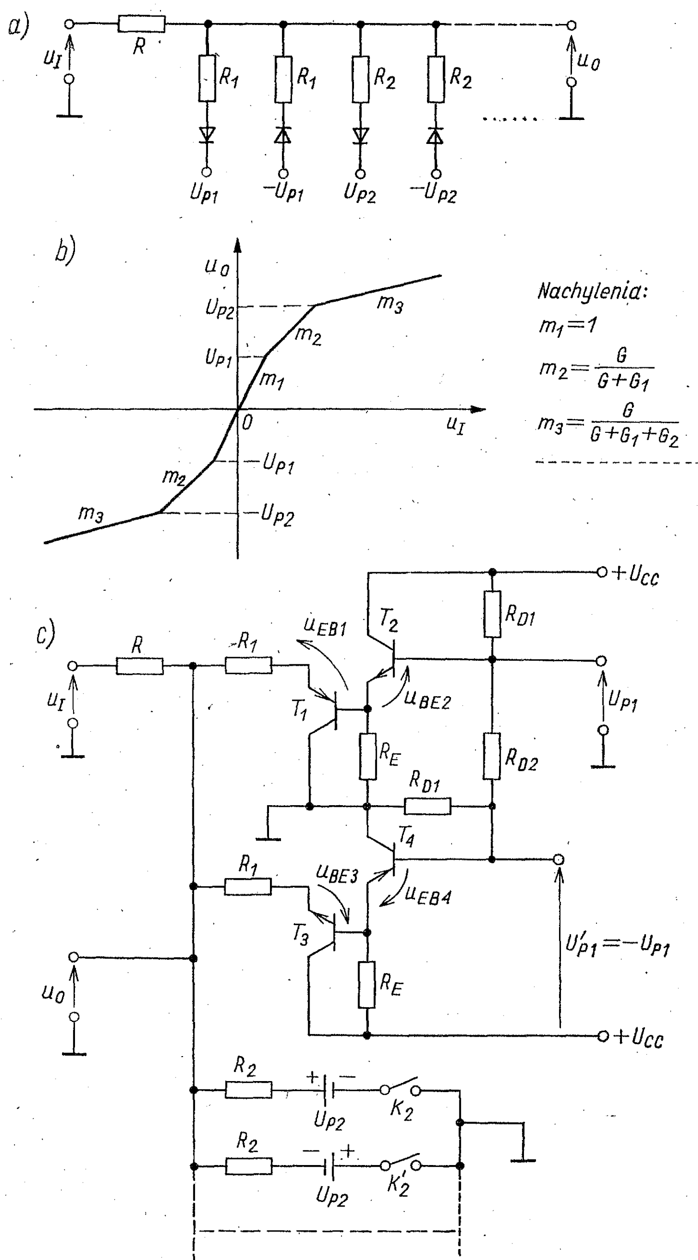
Tranzystory T_3 i T_4 tworzą element progowy o napięciu $-U_{P1}$, działający podobnie. Spełniają one rolę klucza K_1', załączonego gdy $u_I \leqslant -U_{P1}$. Klucz K_1' zwiera rezystancję R_1, poprzez źródło napięciowe U_{P1}, do masy.

Napięcia progowe kluczy K_1 i K_1' są ustawiane przez odpowiedni dobór rezystancji dzielnika $R_{D1}-R_{D2}-R_{D1}$. Przy pominięciu prądów bazy tranzystorów T_2 i T_4, mamy

$$U_{P1} = \frac{R_{D1}+R_{D2}}{2R_{D1}+R_{D2}} U_{CC}$$

$$U_{P1}' = \frac{R_{D1}}{2R_{D1}+R_{D2}} U_{CC}-U_{CC} = -U_{P1}$$

gdzie U_{CC} jest napięciem zasilania.



1/41 Zasada działania przetwornika diodowego: a) schemat układu; b) jego charakterystyka przejściowa; c) odpowiednik tranzystorowy

Dalsze klucze K_2, K_2', ... są rozwiązane identycznie, przy czym łączna liczba zastosowanych w przetworniku kluczy jest równa liczbie punktów załamania charakterystyki.

Przetworniki diodowe, bądź też ich odpowiedniki tranzystorowe są zazwy-

czaj realizowane przy przyjęciu czterech, co najwyżej pięciu, punktów załamania charakterystyki (dla jednego kwadrantu). Dalsza rozbudowa układu, z zamiarem zwiększenia dokładności liniowo-odcinkowej aproksymacji, okazuje się być zabiegiem nieopłacalnym. W układach rzeczywistych ze wzrostem liczby punktów załamania charakterystyki pojawiają się coraz to większe trudności w zapewnieniu pełnej jej symetrii, tzn. $f(u_I) = -f(-u_I)$.

Niesymetria charakterystyki powoduje pojawianie się parzystych harmonicznych i one mają wówczas dominujący wpływ na wynikowy poziom zniekształceń napięcia wyjściowego.

Jako typowe wartości współczynnika zniekształceń harmonicznych przetworników diodowych można przyjąć $h = 0{,}5\ldots1{,}0\%$. Dotyczy to zakresu częstotliwości, w którym diody mogą być traktowane jako elementy bezinercyjne (orientacyjnie: diody złączowe — do kilku megaherców, diody Schottky'ego — do kilkunastu megaherców).

Bardziej szerokopasmowe przetworniki są realizowane przy użyciu tranzystorowych par różnicowych.

1.7.3 Przetworniki z zastosowaniem par różnicowych

Przetworniki tego rodzaju są konstruowane przy wykorzystaniu dokładnie wysymetryzowanych, szerokopasmowych par różnicowych tranzystorów bipolarnych.

W najprostszym rozwiązaniu stosuje się pojedynczą parę różnicową z emiterowym sprzężeniem zwrotnym. W przetworniku takim (rys. 1/42a) przebiegiem wejściowym jest napięcie różnicowe u_R, zaś przebiegiem wyjściowym prąd różnicowy $i_R = i_1 - i_2$ (przekształcany — w razie wystąpienia takiej potrzeby — na napięcie wyjściowe u_O).

Jak to wykazano w D3, unormowane napięcie wejściowe $z = u_R/U_T$ jest związane z unormowanym prądem różnicowym $v = i_R/I$ zależnością (D3/28). Wykorzystując stosowane tam oznaczenia, mamy

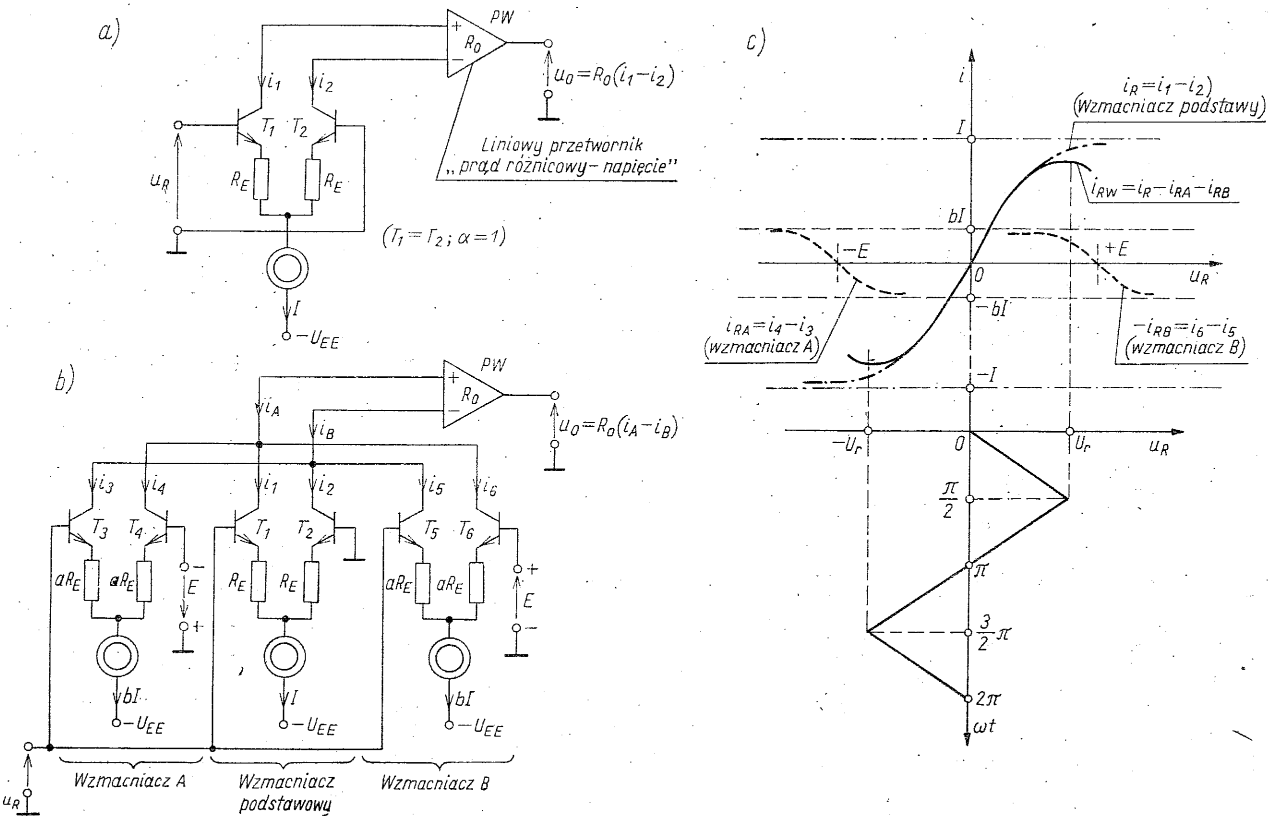
$$z = g_3(v) = \ln\frac{1+v}{1-v} + X_E v \qquad (1/144)$$

gdzie

$$X_E = IR_E/U_T \qquad (1/145)$$

Jak widać, bardziej nas interesująca funkcja odwrotna $v = g_3^{-1}(z)$ nie daje się zapisać w postaci jawnej. Dlatego też dobór parametrów wzmacniacza różnicowego opierać będziemy na założeniu, że ma on wytwarzać funkcję $z = g_3(v)$ aproksymującą funkcję odwrotną względem funkcji (1/136), opisującej pracę przetwornika idealnego.

Sprecyzujmy stosowane dalej oznaczenia. Ponieważ przebiegami wejściowymi i wyjściowym są odpowiednio napięcie różnicowe i prąd różnicowy, przyjmijmy więc oznaczenia z indeksem R (wartość chwilowa) lub r (amplituda).



1/42 Przetwornik z zastosowaniem par różnicowych: a) układ podstawowy; b) wersja udoskonalona; c) charakterystyki przejściowe

Stosując te oznaczenia, na podstawie (1/144) możemy napisać, że wzmacniacz różnicowy generuje funkcję

$$u_R = U_T\left(\ln\frac{1+i_R/I}{1-i_R/I}+X_E\frac{i_R}{I}\right) \tag{1/146}$$

Natomiast przetwornik idealny generuje funkcję (1/136), tzn.

$$i_R = I\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{u_{R\,\mathrm{id}}}{U_r}\right) \tag{1/147}$$

lub inaczej

$$u_{R\,\mathrm{id}} = \frac{2}{\pi}U_r\arcsin\left(\frac{i_R}{I}\right) \tag{1/148}$$

Rozwijając funkcję arcsin(·) w szereg potęgowy, mamy

$$u_{R\,\mathrm{id}} = \frac{2}{\pi}U_r\left[\frac{i_R}{I}+\frac{1}{6}\left(\frac{i_R}{I}\right)^3+\frac{3}{40}\left(\frac{i_R}{I}\right)^5+\dots\right] \tag{1/149}$$

Po przedstawieniu występującej we wzorze (1/146) funkcji logarytmicznej w postaci szeregu, dostajemy

$$\ln\frac{1+i_R/I}{1-i_R/I} = 2\left[\frac{i_R}{I}+\frac{1}{3}\left(\frac{i_R}{I}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{i_R}{I}\right)^5+\dots\right]$$

i wobec tego

$$u_R = U_T\left[(2+X_E)\frac{i_R}{I}+\frac{2}{3}\left(\frac{i_R}{I}\right)^3+\frac{2}{5}\left(\frac{i_R}{I}\right)^5+\dots\right] \tag{1/150}$$

Funkcje (1/148) i (1/146) byłyby identyczne, gdyby wszystkie współczynniki kolejnych wyrazów szeregów (1/149) i (1/150) przyjmowały takie same wartości, tzn.

$$\frac{2}{\pi}U_r = (2+X_E)U_T \tag{1/151a}$$

$$\frac{2}{\pi}U_r\frac{1}{6} = \frac{2}{3}U_T \tag{1/151b}$$

$$\frac{2}{\pi}U_r\frac{3}{40} = \frac{2}{5}U_T, \quad \text{itd.} \tag{1/151c}$$

Nie jest to jednak możliwe do osiągnięcia nawet dla pierwszych trzech kolejnych wyrazów tych szeregów. Kładąc bowiem warunek identyczności wyrazów liniowych, tzn. zachodzi (1/151a), z równań (1/151b) i (1/151c) wynika, że musi jednocześnie zachodzić odpowiednio $X_E = 2$ i $X_E = 10/3$. A więc występują tu wymagania sprzeczne.

Wykazano [8], że odpowiedni dobór wartości X_E z przedziału

$$2 \leqslant X_E = \frac{IR_E}{U_T} \leqslant \frac{10}{3} \tag{1/152}$$

pozwala uzyskać przebieg wyjściowy o dość małych zniekształceniach. Na przykład, dla $X_E \approx 2{,}50$ i $U_r \approx 6{,}60\ U_T$, współczynnik h nie przekracza 1%. Tym wartościom X_E i U_r odpowiada amplituda różnicowego prądu wyjściowego $I_r \approx 0{,}97I$.

Głównym źródłem zniekształceń przebiegu wyjściowego jest niezerowe nachylenie charakterystyki $i_R = f(u_R)$ w punktach odpowiadających minimalnej i maksymalnej wartości pobudzenia, $u_R = \mp U_r$ (rys. 1/42c).

Aby uzyskać korzystniej uformowaną charakterystykę przejściową przetwornika wprowadza się do układu podstawowego (rys. 1/42a) dwa dodatkowe wzmacniacze różnicowe. Sposób ich połączenia z układem podstawowym pokazuje rys. 1/42b. Wejścia wzmacniaczy dodatkowych (A i B) są spolaryzowane napięciem stałym E, tak że

$$u_R = u_{RA} - E = u_{RB} + E; \qquad E > 0$$

Przebiegiem wyjściowym przetwornika jest teraz wynikowy prąd różnicowy zdefiniowany jako

$$i_{RW} = i_A - i_B = i_R - i_{RA} - i_{RB} \qquad (1/153)$$

przy czym

$$i_{RA} = i_3 - i_4; \qquad i_{RB} = i_5 - i_6$$

są to różnicowe prądy wzmacniaczy odpowiednio A i B.

Wartości parametrów a, b i E układu są dobierane w taki sposób, aby za pomocą wzmacniaczy dodatkowych można było skorygować charakterystykę głównie w otoczeniu $u_R = \pm U_r$, uzyskując przy tym zerowe nachylenie na jej krańcach. Zasadę korekcji ilustruje rys. 1/42c. Ze względu na niejawną postać funkcji (1/153), analizę układu prowadzi się metodą numeryczną.

Przetworniki działające wg omówionej powyżej zasady, stanowiące wydzielone bloki rodziny generatorów wielofunkcyjnych (generacja fali typu: prostokąt, trójkąt, sinus) produkowanych seryjnie w postaci monolitycznych układów scalonych [4], wykazywały tłumienie harmonicznych $A_h = (54 \pm 2)$ dB ($h = 0{,}16 \ldots 0{,}20\%$) w zakresie częstotliwości aż do ok. 100 MHz.

1.8 KOMPARATORY Z HISTEREZĄ

Komparator z histerezą, nazywany również przerzutnikiem Schmitta, jest układem bistabilnym, który zmienia swój stan przy wzroście napięcia wejściowego u_I powyżej wartości górnego progu $U_{I\max}$ i powraca do stanu poprzedniego przy spadku napięcia wejściowego poniżej wartości dolnego progu $U_{I\min}$ (rys. 1/43). Różnica napięć progowych

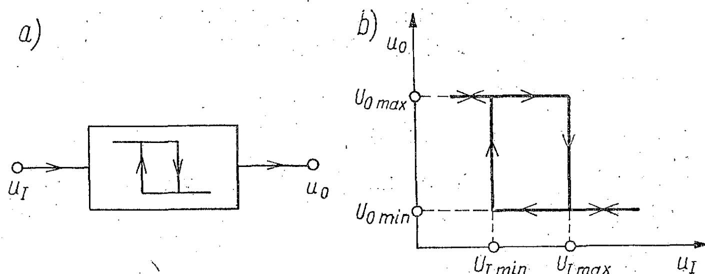
$$U_{IH} = U_{I\max} - U_{I\min} \qquad (1/154)$$

jest szerokością strefy histerezy (napięciem histerezy).

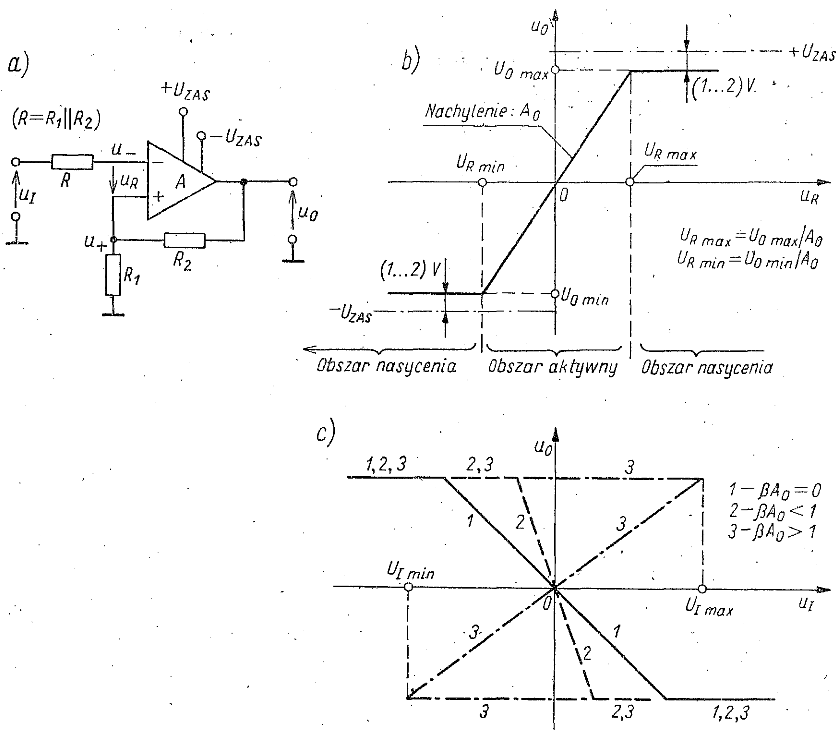
Komparator z histerezą można zrealizować przez wprowadzenie dostatecznie silnego dodatniego sprzężenia zwrotnego we wzmacniaczu o sprzężeniu bezpośrednim (tzw. wzmacniacz prądu stałego).

Rozpatrzmy to na przykładzie wzmacniacza operacyjnego. Na rys. 1/44a pokazano układ, w którym dodatnie sprzężenie zwrotne typu napięciowo-szeregowego zrealizowano za pomocą rezystorów R_1 i R_2.

Jak wiadomo, wzmacniacz operacyjny wykazuje właściwości wzmacniające tylko w pewnym zakresie napięć wejściowych $u_R = u_+ - u_-$. Przejściową cha-



1/43 Komparator z histerezą: a) oznaczenie schematowe; b) charakterystyka



1/44 Wzmacniacz z dodatnim sprzężeniem zwrotnym: a) schemat; b) charakterystyka wzmacniacz; c) charakterystyki układu

rakterystykę statyczną wzmacniacza przedstawiono na rys. 1/44b. Środkowa jej część jest obszarem liniowego wzmacniania, przy czym wzmocnienie napięciowe A_0 jest określone wartością pochodnej ($A_0 = du_O/du_I$). Dla $u_R > U_{R\,max}$ i dla $u_R < U_{R\,min}$ wzmacniacz utrzymuje prawie stałe napięcie wyjściowe, odpowiednio $U_{O\,max}$ i $U_{O\,min}$. Takie warunki pracy wzmacniacza są określane jako stan nasycenia (lub ograniczania). Stąd też napięcia $U_{O\,max}$, $U_{O\,min}$ są nazywane wyjściowymi napięciami nasycenia. Na ogół $U_{O\,max} = -U_{O\,min}$, przy czym dla typowych napięć zasilania wzmacniacza ($\pm U_{ZAS}$) wyjściowe napięcie nasycenia wynosi $U_{O\,max} \approx U_{ZAS} - (1{,}0...2{,}0)$ V.

Zbadajmy teraz, jaki jest wpływ dodatniego sprzężenia zwrotnego na pracę układu z rys. 1/44a. Przyjmiemy, że w obszarze aktywnym wzmocnienie napięciowe wzmacniacza operacyjnego jest opisane jednobiegunową funkcją przenoszenia

$$A(s) = \frac{U_o(s)}{U_r(s)} = \frac{A_0}{1+s/\omega_1}; \qquad \omega_1 > 0 \tag{1/155}$$

Przy tym założeniu, wzmocnienie układu z pętlą zamkniętą

$$A_f(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{A_{0f}}{1+s/\omega_{1f}} \tag{1/156}$$

gdzie

$$A_{0f} = \frac{-A_0}{1-\beta A_0} \tag{1/157}$$

$$\omega_{1f} = \omega_1(1-\beta A_0) \tag{1/158}$$

przy czym β jest współczynnikiem sprzężenia zwrotnego, określonym jako

$$\beta = \frac{R_1}{R_1+R_2} \tag{1/159}$$

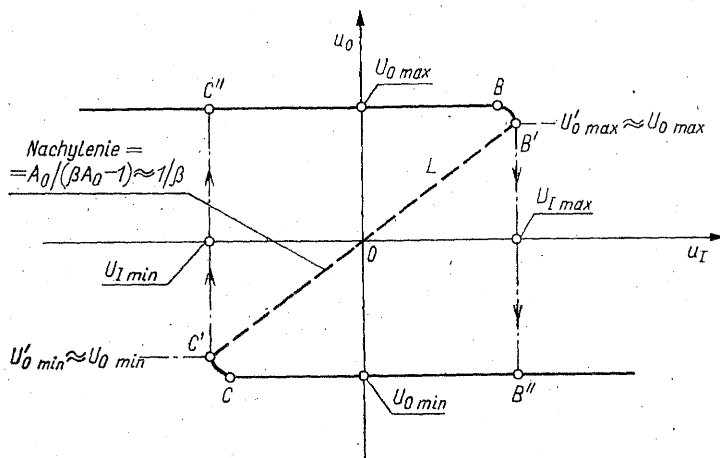
Z zależności (1/158) wynika, że przy dostatecznie silnym sprzężeniu zwrotnym, $\beta A_0 > 1$, biegun funkcji przenoszenia (1/156) lokuje się w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s, co daje układ niestabilny.

Wpływ dodatniego sprzężenia zwrotnego na charakterystykę statyczną $u_O = f(u_I)$ rozpatrywanego układu ilustruje rys. 1/44c. Przy braku sprzężenia zwrotnego ($\beta A_0 = 0$) nachylenie charakterystyki, zgodnie ze wzorem (1/157), wynosi $A_{f0} = -A_0$ (poszczególne odcinki charakterystyki odpowiadającej temu przypadkowi są oznaczone cyfrą *1*). Jeśli we wzmacniaczu zastosujemy słabe sprzężenie zwrotne ($\beta A_0 < 1$), to środkowa część charakterystyki stanie się bardziej stroma (odcinki *2*). Jeżeli natomiast wprowadzimy silniejsze sprzężenie zwrotne tak, że $\beta A_0 > 1$, to w chwili gdy układ wyjdzie z zakresu nasycenia, nachylenie charakterystyki stanie się dodatnie (odcinki *3*).

Jak widać z powyższych rozważań, dzięki wprowadzeniu dostatecznie silnego sprzężenia zwrotnego

$$A_{L0} = \beta A_0 = \frac{R_1}{R_1+R_2} A_0 > 1 \tag{1/160}$$

(A_{L0} — wzmocnienie pętli dla m.cz.) otrzymujemy układ, w którym pewna część charakterystyki $u_O = f(u_I)$ jest funkcją trójwartościową. Dla większej czytelności, charakterystykę tę pokazano raz jeszcze na rys. 1/45. Zaznaczono przy tym, co ma miejsce w układach rzeczywistych, że wyprowadzenie wzmacniacza ze stanu nasycenia na granicę stanu aktywnego, w którym sprzężenie



1/45 Charakterystyka układu z rys. 1/44a w przypadku $\beta A_0 > 1$

zwrotne staje się ponownie skuteczne, nie przebiega gwałtownie — jak to do tej pory dla uproszczenia przyjmowano — lecz następuje stopniowo (odcinki B—B' i C—C').

Punkty leżące na środkowej części charakterystyki (odcinek liniowy L) są punktami równowagi chwiejnej. Uwzględniają one bowiem przypadek układu z biegunem ulokowanym w prawej półpłaszczyźnie s.

Jeśli napięcie wejściowe przybiera wartość $u_I < U_{I\min}$, to układ znajduje się w stanie nasycenia: $u_O = U_{O\max}$. Na wejściu nieodwracającym wzmacniacza występuje zatem napięcie

$$u_+ = \beta u_O = \beta U_{O\max} \tag{1/161}$$

W miarę wzrostu napięcia wejściowego $u_I = u_-$ układ dochodzi do punktu B, po przekroczeniu którego zaczyna wzmacniać. Ponieważ wzmocnienie układu wzrasta stopniowo, mamy więc początkowo $\beta A_0 < 1$ (układ stabilny). Przy dalszym zwiększaniu napięcia wejściowego warunek $\beta A_0 > 1$ zostaje spełniony w punkcie B' i następuje gwałtowny przeskok (przerzut) napięcia wyjściowego do punktu B''. Szybkość tego przeskoku jest oczywiście skończona i zależy od inercyjnych właściwości układu.

Wejściowe napięcie progowe $U_{I\max}$ możemy wyznaczyć w sposób przybliżony, przyjmując że wzmacniacz odzyskuje właściwości wzmacniające w chwili,

w której wejściowe napięcie różnicowe $u_R = u_+ - u_I$ staje się równe zeru. Wykorzystując (1/161), mamy

$$U_{I\max} = \beta U_{O\max} = \frac{R_1}{R_1+R_2} U_{O\max} \tag{1/162}$$

Ostatecznie, w wyniku przeskoku występującego przy $u_I = U_{I\max}$, na wyjściu układu ustala się napięcie $u_O = U_{O\min}$. Stan taki utrzymuje się niezależnie od dalszych zmian napięcia wejściowego. Na wejściu nieodwracającym wzmacniacza występuje teraz napięcie

$$u_+ = \beta u_O = \beta U_{O\min} \tag{1/163}$$

Napięcie to blokuje wzmacniacz aż do chwili, w której nastąpi takie zmniejszenie napięcia wejściowego, iż $u_R = 0$, tzn.

$$U_{I\min} = \beta U_{O\min} \tag{1/164}$$

Przy tym napięciu układ znajdzie się ponownie w stanie aktywnym, $\beta A_0 > 1$, i wobec tego w punkcie C' nastąpi przeskok powrotny, tzn. ustali się stan $u_O = U_{O\max}$.

Napięcie histerezy, zgodnie ze wzorem (1/154), wynosi

$$U_{IH} = \beta(U_{O\max} - U_{O\min}) \tag{1/165}$$

Szerokość strefy histerezy może być więc ustalona za pomocą $\beta = R_1/(R_1+R_2)$.

Bardziej uniwersalne rozwiązanie komparatora pokazano na rys. 1/46a. Komparator jest sterowany z jednego wejścia, napięciem $u_1(t)$ lub $u_2(t)$. Wejście drugie, przy podaniu na nie napięcia stałego, może być wykorzystane do zmiany poziomów napięć progowych, bez wpływu na napięcie histerezy.

Komparator odwracający jest sterowany napięciem $u_1(t)$ przy $u_2 = U_2 = \text{const}$. W tym układzie napięcia progowe i napięcie histerezy są określone następująco:

$$U_{1\max} = \frac{R_2}{R_1+R_2} U_2 + \frac{R_1}{R_1+R_2} U_{O\max} \tag{1/166}$$

$$U_{1\min} = \frac{R_2}{R_1+R_2} U_2 + \frac{R_1}{R_1+R_2} U_{O\min} \tag{1/167}$$

$$U_{1H} = U_{1\max} - U_{1\min} = \frac{R_1}{R_1+R_2} (U_{O\max} - U_{O\min}) \tag{1/168}$$

Na rysunku 1/46b pokazano charakterystykę przejściową tego komparatora. Napięcie U_{1S}, wyznaczające środek strefy histerezy

$$U_{1S} = \frac{R_2}{R_1+R_2} U_2 + \frac{R_1}{2(R_1+R_2)} (U_{O\max} + U_{O\min}) \tag{1/169}$$

Może być więc ono ustawiane za pomocą napięcia U_2 i regulacja ta nie ma wpływu na napięcie histerezy.

Komparator nieodwracający (sterowanie napięciem $u_2(t)$, przy $u_1 = U_1 = \text{const}$) realizuje charakterystykę pokazaną na rys. 1/46c. Napięcia progowe,

po przekroczeniu których następuje zmiana stanu przerzutnika, można wyznaczyć z zależności

$$U_{2\max} = \frac{R_1+R_2}{R_2}U_1 - \frac{R_1}{R_2}U_{O\min} \qquad (1/170)$$

$$U_{2\min} = \frac{R_1+R_2}{R_2}U_1 - \frac{R_1}{R_2}U_{O\max} \qquad (1/171)$$

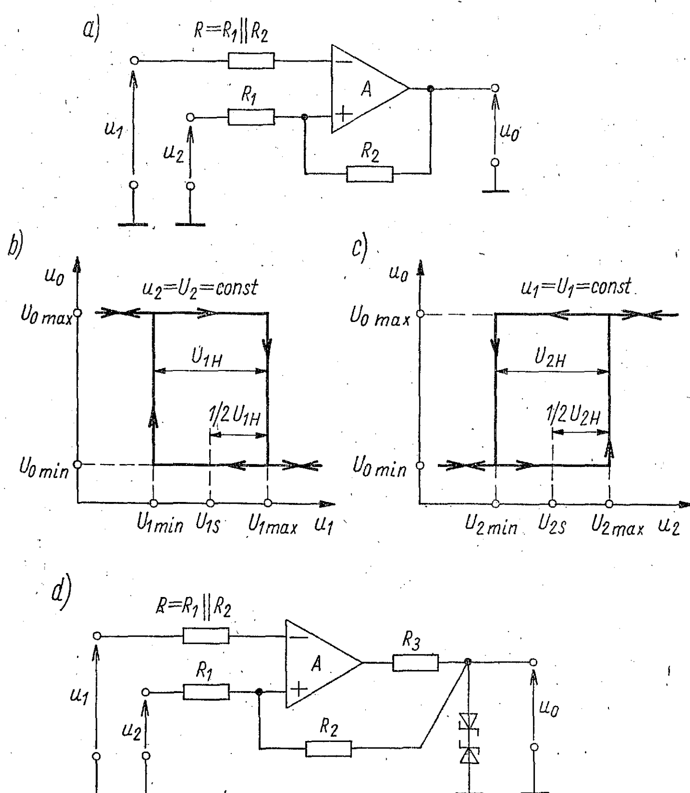
Charakterystyczne parametry strefy histerezy są więc określone następująco:

$$U_{2H} = U_{2\max} - U_{2\min} = \frac{R_1}{R_2}(U_{O\max} - U_{O\min}) \qquad (1/172)$$

$$U_{2S} = \frac{R_1+R_2}{R_2}U_1 - \frac{R_1}{2R_2}(U_{O\max} + U_{O\min}) \qquad (1/173)$$

Wynika stąd, że w komparatorze nieodwracającym szerokość strefy histerezy jest ustalona stosunkiem rezystancji R_1/R_2, zaś położenie tej strefy — napięciem U_1.

W układach ze wzmacniaczem operacyjnym poziomy wyjściowe komparatora są często stabilizowane za pomocą skompensowanych temperaturowo



1/46 Przerzutnik Schmitta: a) układ podstawowy; b, c) charakterystyki; d) układ ze stabilizacją poziomów wyjściowych

symetrycznych diod Zenera (rys. 1/46d). W takim przypadku obowiązują nadal przytoczone powyżej zależności, w których należy jednak uwzględnić nowe wartości poziomów wyjściowych komparatora, tzn.: $U_{O\max} = -U_{O\min} = U_Z + U_D$, gdzie U_Z jest napięciem stabilizacji diody Zenera.

Literatura

1. Gilbert B.: A precise four-quadrant multiplier with subnanosecond response. *IEEE Journal of Solid State Circuits*, vol. SC-3, no. 4, pp. 365—373, 1968.
2. Golde W., Śliwa L.: *Wzmacniacze operacyjne i ich zastosowania*. Cz. I — *Podstawy teoretyczne*. WNT, Warszawa 1982.
3. Graeme J. G., Tobey G. E., Huelsman L. P.: *Operation amplifiers: design and applications*. McGraw-Hill, New York 1971 (tłum. ros., Mir, Moskwa 1974).
4. Hentschel C., Leitner A., Traub S., Schweikardt H., Eberle V.: Designing bipolar intergrated circuits for a pulse/function generator family. *Hewlett-Packard Journal*, vol. 34, no. 6, pp. 33—38, 1983.
5. Herpy M.: *Analog integrated circuits*. J. Willey and Sons, Budapest 1980.
6. Kulka Z., Nadachowski M.: *Wzmacniacze operacyjne i ich zastosowania*. Cz. II — *Realizacje praktyczne*. WNT, Warszawa 1982.
7. Kulka Z., Nadachowski M.: *Zastosowania wzmacniaczy operacyjnych*. WNT, Warszawa 1986.
8. Meyer R. G., Sansen W. M. C., Lui S., Peeters S.: The differential pair as a triangle-sine wave converter. *IEEE Journal of Solid State Circuits*, vol. SC-11, no. 3, pp. 418—420, 1976.
9. Mędrzycki J.: *Technika analogowa i hybrydowa*. WNT, Warszawa 1974.
10. Nadachowski M., Kulka Z.: *Analogowe układy scalone*. WKŁ, Warszawa 1985.
11. Pawłowski J.: *Podstawowe układy elektroniczne. Nieliniowe układy analogowe*. WKŁ, Warszawa 1979.
12. Sheingold D. H.: *Nonlinear circuits handbook*. Analog Devices Inc., Norwood 1974 (tłum. ros., Mir, Moskwa 1977).
13. Sheingold D. H.: Multiplier application guide. Analog Devices, 1978.
14. Tietze U., Schenk Ch.: *Układy półprzewodnikowe*. WNT, Warszawa 1988.
15. Wong Y. J., Ott W. E.: *Function circuits*. McGraw-Hill Book Co., New York 1976.

2

GENERATORY DRGAŃ SINUSOIDALNYCH

2.1 UWAGI WSTĘPNE

Generatorem drgań sinusoidalnych nazywamy układ elektroniczny przetwarzający energię źródła zasilania (źródło napięcia lub prądu stałego) w energię sinusoidalnych drgań elektrycznych o żądanej częstotliwości i mocy.

Wytwarzanie drgań elektrycznych[1] jest jednym z dość istotnych działów elektroniki. W zastosowaniach praktycznych występuje potrzeba wytwarzania drgań elektrycznych o częstotliwości od ułamka herca do częstotliwości rzędu kilkudziesięciu gigaherców i o mocach od miliwatów do kilkuset kilowatów.

Klasyfikacja generatorów drgań sinusoidalnych może być przeprowadzana wg różnych linii podziału.

Z punktu widzenia zastosowań i wymagań stawianych generatorom można je podzielić na tzw. *generatory częstotliwości* i *generatory mocy*.

Generatory częstotliwości (np. generator częstotliwości nośnej nadajnika, generator lokalny odbiornika, pomiarowy generator laboratoryjny) dostarczają stosunkowo małej mocy (orientacyjnie poniżej kilkuset miliwatów). Generatory takie nie muszą mieć dużej sprawności energetycznej, gdyż nie ma ona praktycznego wpływu na sprawność energetyczną całego urządzenia. Stawia się im natomiast wysokie wymagania co do stałości częstotliwości wytwarzanego przebiegu. Często żąda się także dużej „czystości drgań", tzn. małej zawartości harmonicznych.

Generatory mocy (np. generatory stosowane w urządzeniach do nagrzewania indukcyjnego lub dielektrycznego) stanowią źródła stosunkowo dużych mocy w.cz. Wobec tego istotnym parametrem takich układów jest ich sprawność

---

[1] Obszerne omówienie tych zagadnień można znaleźć w monografii prof. Janusza Groszkowskiego [7], jednego z twórców teorii generacji drgań elektrycznych.

energetyczna. Parametry inne, jak stałość częstotliwości lub zawartość harmonicznych, mają tu zwykle znaczenie drugorzędne.

W rozdziale tym zajmiemy się jedynie generatorami częstotliwości[1].

Ogólnie biorąc, generator częstotliwości zawiera dwa zasadnicze podzespoły, a mianowicie selektywny obwód drgający (zapewniający odpowiednio skuteczną filtrację harmonicznych) oraz element aktywny, przetwarzający energię źródła zasilania w energię dostarczaną do pokrycia strat w obwodzie i obciążeniu.

Ze względu na rodzaj i sposób pracy elementu aktywnego, generatory można podzielić na dwie grupy:

1. Układy sprzężeniowe (ze sprzężeniem zwrotnym, czwórnikowe).
2. Układy dwójnikowe (z ujemną rezystancją, konduktancją).

W *generatorach sprzężeniowych* element aktywny (czwórnik, np.: tranzystor, lampa elektronowa, wzmacniacz) jest objęty pętlą zewnętrznego dodatniego sprzężenia zwrotnego, dzięki czemu uzyskuje się odtłumianie obwodu drgań. W zależności od rodzaju elementów zastosowanych w czwórniku sprzężenia zwrotnego, elementy typu *LC* lub *RC* (dawniej także elementy typu *RL*), generatory sprzężeniowe klasyfikuje się odpowiednio jako generatory *LC* lub *RC* (ew. *RL*).

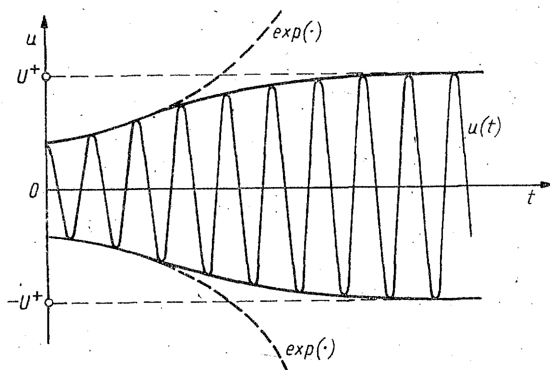
W *generatorach dwójnikowych* elementem odtłumiającym obwód drgający *LC* jest nieliniowy dwójnik aktywny, wykazujący na swych końcówkach ujemną rezystancję różniczkową.

Jak wiadomo, efekt ujemnej rezystancji jest wynikiem występowania dodatniego sprzężenia zwrotnego w układzie. W związku z tym, generatory sprzężeniowe i dwójnikowe mogą być traktowane jako układy w zasadzie równoważne. Istotna różnica między tymi układami, powodująca zestawianie ich w dwie oddzielne grupy, polega na fakcie, że w dwójniku aktywnym rezystancja ujemna jest wynikiem wewnętrznego sprzężenia zwrotnego, którego kontrolowanie nie jest możliwe z zewnątrz.

Zasadę pracy generatora drgań sinusoidalnych można objaśnić następująco. Układ projektowany jest tak, aby jego operatorowe równanie charakterystyczne zawierało parę zespolonych sprzężonych pierwiastków leżących w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej $s = \sigma + j\omega$. (Pierwiastki inne, o ile występują, powinny mieć ujemne części rzeczywiste. Będziemy je na razie pomijać). W takim przypadku, w momencie włączenia napięcia zasilania, w generatorze powstają drgania pierwotne mające postać oscylacyjnego przebiegu odtłumionego (rys. 2/1). W pierwszym etapie narastania drgań, dopóki amplitudy są dostatecznie małe, nieliniowości układu mogą być zaniedbane i generator można uważać za układ liniowy. Z energetycznego punktu widzenia proces narastania drgań wyjaśnia się tym, że w jednym okresie drgań element aktywny dostarcza do obwodu większej energii aniżeli energia tracona w tym samym czasie w obwodzie. W miarę wzrostu amplitudy generowanego przebiegu występuje

[1] Czytelników zainteresowanych generatorami mocy odsyłamy np. do pracy [13].

coraz to silniejszy wpływ nieliniowości układu. Wpływ ten powoduje nasilające się ograniczanie amplitudy drgań; tym samym coraz to mniejsza energia jest przekazywana do obwodów pasywnych. Prowadzi to w konsekwencji do ustalenia się warunku równowagi energetycznej: moc pobierana ze źródła zasilania jest równa mocy strat, przy spełnionym równocześnie bilansie mocy urojonych.



2/1 Ilustracja narastania drgań w generatorze (U^+ — amplituda w stanie ustalonym generacji)

Amplituda drgań przestaje narastać i występuje *stan stacjonarny*, w którym amplitudy napięć i prądów w układzie pozostają stałe. Tak więc nieliniowość układu generacyjnego jest naturalnym czynnikiem, powodującym ustalanie się amplitudy drgań.

Stan równowagi mocy rzeczywistej i urojonej generatora nazywany jest także *stanem ustalonym generacji.*

Na skutek nieliniowości układu generacyjnego, wytwarzane przebiegi odbiegają w mniejszym lub większym stopniu od przebiegu sinusoidalnego. W praktyce przyjmuje się, że generator wytwarza przebiegi sinusoidalne, jeśli współczynnik zawartości harmonicznych (p. wzór (1/138)) nie przekracza zadanej warunkami projektowymi wartości, np. $h = 0{,}1\%$, 1%.

Analiza generatorów drgań sinusoidalnych jest bardzo pracochłonna. W większości przypadków nie jest w ogóle możliwe dokładne jej przeprowadzenie. W grę wchodzi bowiem konieczność analitycznego rozwiązania dość złożonych zagadnień nieliniowych; w najprostszym przypadku — rozwiązania nieliniowego równania różniczkowego drugiego rzędu. Dlatego szerokie zastosowania znajdują tutaj rozmaite metody przybliżone (np. [1...3, 6...10, 12]), których skuteczność silnie zależy od rodzaju analizowanego układu, charakteru nieliniowości oraz przyjętych założeń upraszczających.

W literaturze technicznej przyjęło się rozróżniać *liniową* i *nieliniową teorię generacji.*

Liniowa (małosygnałowa) *teoria generacji* pozwala wyznaczyć tylko warunki powstawania drgań oraz określić przybliżoną wartość częstotliwości drgań (z małym na ogół błędem). W ramach tej teorii wykorzystuje się łatwe i dobrze znane metody analizy układów liniowych.

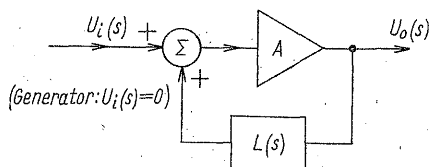
Dla uwzględnienia efektów nieliniowych, powodujących między innymi ustalanie się amplitudy drgań, konieczne jest odwołanie się do *nieliniowej* (wielkosygnałowej) *teorii generacji.* Jeśli układ generacyjny da się opisać równaniem różniczkowym rzędu drugiego, to można jego działanie efektywnie zbadać metodami płaszczyzny fazowej. Metoda ta jednak zawodzi gdy układ jest bardziej złożony. Dlatego do badania drgań sinusoidalnych szerokie zastosowanie w technice znalazła metoda przybliżona nazywana *metodą funkcji opisującej,* lub metodą pierwszej harmonicznej. Ponieważ metoda ta pozwala na skuteczne badanie stanu ustalonego w generatorach, a tym stanem pracy jesteśmy głównie zainteresowani w rozwiązaniach praktycznych, zostanie ona omówiona i wykorzystana w dalszych rozważaniach. Stany przejściowe, związane z narastaniem i ustalaniem się drgań, można w zasadzie badać efektywnie tylko metodami numerycznymi i dlatego nie będziemy ich omawiać.

2.2 GRANICZNE WARUNKI GENERACJI

Jak już wspomniano, proces narastania drgań w początkowej swej fazie odbywa się przy małych amplitudach drgań. Dlatego graniczne warunki powstawania drgań (tzw. *graniczne warunki generacji*) mogą być określane przy założeniu liniowości układu generacyjnego. Mówi się wówczas o liniowej teorii generacji. W takim przypadku do wyznaczenia warunków generacji można posłużyć się jedną z wielu, ogólnie znanych, równoważnych metod analizy liniowych układów aktywnych.

2.2.1 Układy sprzężeniowe

Na rysunku 2/2 pokazano schemat blokowy układu z pojedynczą pętlą sprzężenia zwrotnego, przy czym A reprezentuje wzmocnienie napięciowe bezinercyjnego wzmacniacza z pętlą otwartą, natomiast $L(s)$ — napięciową funkcję przenoszenia pasywnego czwórnika sprzężenia zwrotnego.



2/2 Układ z pojedynczą pętlą sprzężenia zwrotnego

Właściwości liniowego układu ze sprzężeniem zwrotnym mogą być określone za pomocą wzmocnienia pętli $A_L = AL(s)$, stosunku zwrotnego $T(s)$ lub różnicy zwrotnej $F(s)$, gdyż transmitancja napięciowa układu zamkniętego przybiera w tym przypadku postać

$$A_f(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{A}{1-AL(s)} = \frac{A}{1+T(s)} = \frac{A}{F(s)} \tag{2/1}$$

Układ generujący przebiegi sinusoidalne może być zrealizowany jedynie przy zastosowaniu dodatniego sprzężenia zwrotnego, gdyż do odtłumienia obwodów stratnych jest potrzebne dostarczenie mocy rzeczywistej. Układ taki musi być zdolny do podtrzymania raz zainicjowanych drgań, przy braku jakiegokolwiek zewnętrznego pobudzenia. Zakładając zatem w równaniu (2/1) $U_i(s) = 0$ (przy $U_o(s) \neq 0$, $s = j\omega_o$), otrzymamy graniczny warunek generacji w postaci

$$F(\omega_o) = 0 \tag{2/2}$$

lub równoważne, w odniesieniu do wzmocnienia pętli

$$A_L(\omega_o) = A_{\min} L(\omega_o) = 1 \tag{2/3}$$

gdzie symbolem $A_{\min}$ oznaczono pewną graniczną wartość wzmocnienia, o czym będzie jeszcze mowa dalej.

Każde z zespolonych równań (2/2) lub (2/3) rozpada się na dwa równania, które muszą być jednocześnie spełnione, a mianowicie na: *równanie warunku amplitudy i równanie warunku fazy*. Na przykład, przy operowaniu wzmocnieniem pętli (2/3), warunek amplitudy i warunek fazy przybierają odpowiednio postaci

$$\mathrm{Re}[A_{\min} L(\omega_o)] = 1 \tag{2/4a}$$

$$\mathrm{Im}[A_{\min} L(\omega_o)] = 0 \tag{2/4b}$$

a jeżeli charakterystykę częstotliwościową czwórnika zapiszemy jako

$$L(\omega) = \alpha(\omega) + j\gamma(\omega) \tag{2/5}$$

to otrzymamy odpowiednio

$$A_{\min}\alpha(\omega_o) = 1 \tag{2/6a}$$

$$\gamma(\omega_o) = 0 \tag{2/6b}$$

Przy poprawnym zaprojektowaniu generatora graniczny warunek generacji powinien być spełniony tylko dla jednej pulsacji, co podkreśliliśmy wprowadzając symbol ω_o. Zauważmy, że spełnienie tego warunku oznacza taki stan pracy układu, w którym dla pulsacji ω_o występuje „czyste" dodatnie sprzężenie zwrotne o wzmocnieniu pętli równym jedności, tzn. sygnał wracający na wejście wzmacniacza jest równy co do amplitudy i fazy sygnałowi wejściowemu.

W celu poglądowego wyjaśnienia wpływu znaku oraz głębokości sprzężenia zwrotnego, rozpatrzmy układ z rys. 2/2, w którym czwórnik sprzężenia zwrotnego jest opisany dwubiegunową funkcją przenoszenia o postaci

$$L(s) = \frac{s\sigma_1}{(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)}; \quad \sigma_1, \sigma_2 > 0 \tag{2/7}$$

Z taką postacią funkcji $L(s)$ mamy do czynienia w niektórych generatorach *RC*.

Zbadajmy położenia biegunów (pierwiastków charakterystycznych) funkcji (2/1) w przypadku zmieniających się wartości wzmocnienia A wzmacniacza.

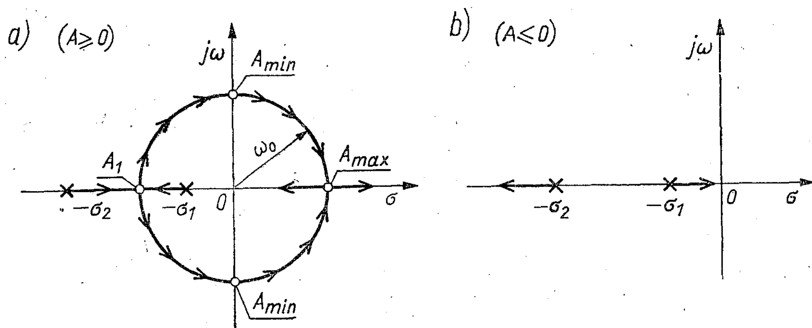
Podstawiając (2/7) do (2/1), otrzymujemy następujące równanie charakterystyczne układu:

$$(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)-sA\sigma_1 = 0 \tag{2/8a}$$

lub inaczej

$$s^2+(\sigma_1+\sigma_2-A\sigma_1)s+\sigma_1\sigma_2 = 0 \tag{2/8b}$$

Dla $A = 0$ bieguny funkcji (2/1) pokrywają się z biegunami funkcji (2/7); są ulokowane w punktach $(-\sigma_1+j0)$ i $(-\sigma_2+j0)$. Ze wzrostem A bieguny zbliżają się do siebie, tworząc dla $A = A_1$ (rys. 2/3a) rzeczywisty biegun podwójny w punkcie $(-\omega_o+j0)$, gdzie $\omega_o = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}$. Przy dalszym zwiększaniu się wartości A bieguny stają się zespolone sprzężone i lokują się na okręgu o promieniu równym ω_o. Istnieje pewna graniczna wartość wzmocnienia $A = A_{min}$, po przekroczeniu której bieguny znajdą się w prawej półpłaszczyźnie s.



2/3 Linie pierwiastkowe w przypadku $L(s)$ o postaci (2/7): a) dodatnie sprzężenie zwrotne; b) ujemne sprzężenie zwrotne

Z przebiegu linii pierwiastkowych dla ujemnych wartości A (wzmacniacz odwracający fazę) widzimy, że bieguny funkcji (2/1) są zawsze ulokowane na ujemnej osi rzeczywistej (rys. 2/3b), co oczywiście oznacza, że układ taki nie może być generatorem.

Z warunku amplitudy (2/4a) i fazy (2/4b) otrzymujemy odpowiednio minimalną wartość wzmocnienia A_{min} i pulsację drgań ω_o

$$A_{min} = 1+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}; \quad \omega_o = \sqrt{\sigma_1\sigma_2} \tag{2/9}$$

Rozpatrzmy jeszcze inną postać funkcji przenoszenia czwórnika sprzężenia zwrotnego, charakterystyczną dla generatorów LC

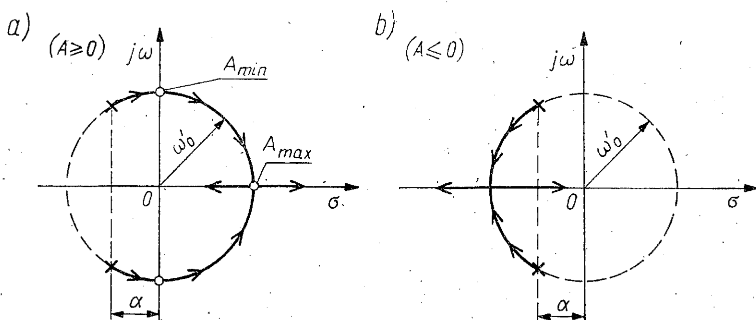
$$L(s) = \frac{s\omega_o'}{s^2+2\alpha s+\omega_o'^2}; \quad \omega_o'^2 > \alpha^2 \tag{2/10}$$

Przebieg linii pierwiastkowych dla układu zamkniętego pokazano na rys. 2/4. Jak widać, przy zapewnieniu dostatecznie silnego dodatniego sprzężenia zwrotnego układ może być generatorem drgań sinusoidalnych. Z granicznego warunku

generacji (2/4) otrzymujemy minimalną wartość wzmocnienia oraz pulsację drgań

$$A_{\min} = \frac{2\alpha}{\omega_o'} = \frac{1}{Q_T}; \quad \omega_o = \omega_o' \tag{2/11}$$

gdzie Q_T jest dobrocią biegunów funkcji (2/10).



2/4 Linie pierwiastkowe w przypadku $L(s)$ o postaci (2/10): a) dodatnie sprzężenie zwrotne; b) ujemne sprzężenie zwrotne

Graniczne warunki generacji odpowiadają granicznemu stanowi równowagi generatora, tzn. stanowi, w którym para pierwiastków charakterystycznych znajduje się w płaszczyźnie s na osi urojonej.

Generator, w którym przy małych sygnałach byłby dokładnie spełniony graniczny warunek generacji, tzn.

$$A_L(\omega_o) = 1$$

jest praktycznie nieużyteczny, gdyż dowolnie małe zmniejszenie wzmocnienia pętli powodowałoby zerwanie drgań.

W rzeczywistym (praktycznym) układzie generatora, który z założenia jest układem nieliniowym, pierwiastki charakterystyczne powinny leżeć początkowo w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s. Oznacza to, iż małosygnałowy warunek amplitudy (równanie (2/4a) lub (2/6a)) musi być spełniony z nadmiarem, tzn. moduł wzmocnienia pętli powinien być większy od jedności, lub inaczej

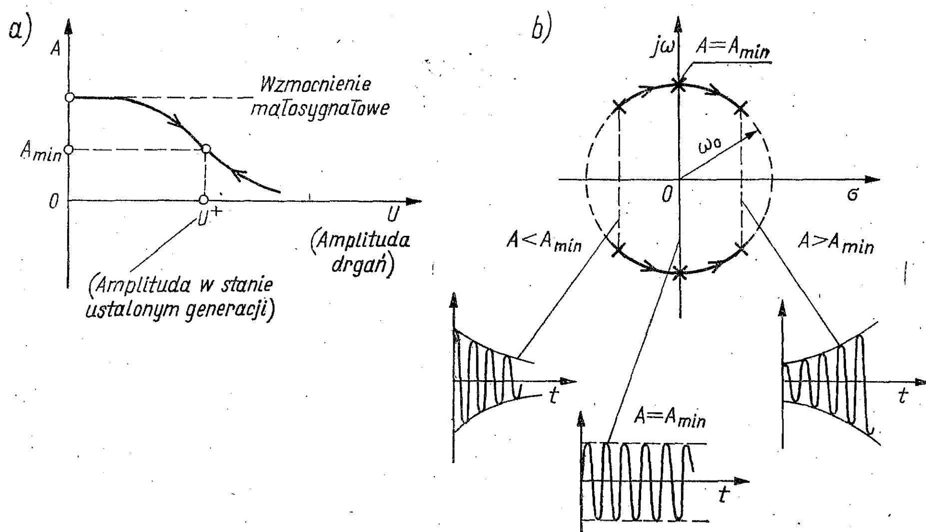
$$A > A_{\min} \tag{2/12}$$

Wówczas w miarę narastania amplitudy drgań, na skutek pogłębiających się efektów nieliniowości wzmacniacza, jego wzmocnienie będzie maleć, wobec czego para zespolonych sprzężonych pierwiastków będzie przemieszczać się ku lewej półpłaszczyźnie s, osiągając w stanie równowagi trwałej generatora położenie na osi $j\omega$.

Omówiony mechanizm powstawania i podtrzymywania drgań przedstawiono na rys. 2/5. Po włączeniu zasilania powstają drgania o narastającej amplitudzie ($A > A_{\min}$). W miarę wzrostu amplitudy wzmocnienie maleje i w stanie

ustalonym osiąga wartość $A = A_{\min}$ (dalszy wzrost amplitudy spowodowałby przemieszczenie się pary pierwiastków do lewej półpłaszczyzny s, tzn. wystąpiłyby drgania tłumione).

Jest oczywiste, że tego rodzaju interpretacja warunków narastania i ustalania się amplitudy drgań nie jest precyzyjna. Znajduje ona uzasadnienie jedynie w przypadku niewielkich nieliniowości i dużej selektywności czwórnika sprzężenia zwrotnego. Wówczas filtracja harmonicznych może być na tyle skuteczna, iż dopuszczalne jest przyjęcie sinusoidalnego przebiegu drgań. Do zagadnienia tego powrócimy jeszcze w p. 2.3.1.



2/5 Interpretacja warunków narastania i ustalania się amplitudy drgań: a) charakterystyka nieliniowego wzmacniacza; b) położenia pierwiastków charakterystycznych oraz odpowiadające im przebiegi czasowe

Do tej pory przyjmowaliśmy, że wzmacniacz jest układem bezinercyjnym. W większości przypadków praktycznych wzmacniacz jest bowiem tak konstruowany, aby założenie to było spełnione dla projektowanej pulsacji drgań ω_0. Reaktancje wzmacniacza (chodzi tu zwłaszcza o reaktancje elementu aktywnego, które są funkcją temperatury oraz napięcia zasilania) mają wówczas pomijalnie mały wpływ na częstotliwość drgań. Jeśli jednak założenie to nie może być podtrzymane, a wzmocnienie wzmacniacza opisane jest funkcją $A(s)$, to graniczny warunek generacji odniesiony do wzmocnienia pętli przyjmuje postać

$$A_L(\omega_0) = A(\omega_0)L(\omega_0) = 1 \qquad (2/13)$$

2.2.2 Układy dwójnikowe

Ogólny schemat generatora dwójnikowego jest pokazany na rys. 2/6a. Układ składa się z liniowego dwójnika pasywnego DP (obwód typu RLC) oraz nieliniowego dwójnika aktywnego DA, wykazującego ujemną różniczkową kon-

duktancję lub rezystancję. Dwójnik aktywny, zasilany napięciem stałym, jest źródłem mocy rzeczywistej wymaganej dla skompensowania strat selektywnego obwodu pasywnego.

Admitancja lub impedancja układu może być wyznaczona przy dowolnym pobudzeniu prądowym $J(s)$ lub napięciowym $E(s)$, jednakże w każdym przypadku idealny generator pobudzający musi być dołączony tak, jak to pokazano na rys. 2/6b, aby nie uległa zmianie immitancja układu. Otrzymujemy wówczas odpowiednio:

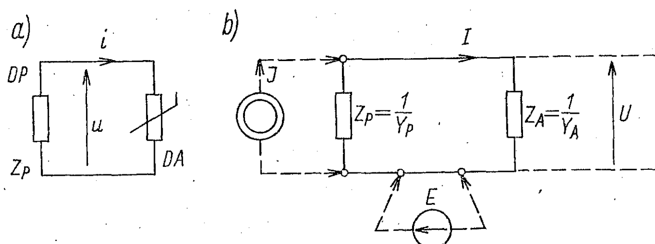
$$Y(s) = \frac{I(s)}{E(s)} = \frac{1}{Z_A(s)+Z_P(s)} \tag{2/14}$$

$$Z(s) = \frac{U(s)}{J(s)} = \frac{1}{Y_A(s)+Y_P(s)} \tag{2/15}$$

Immitancję układu można zatem zapisać w postaci ogólnej

$$\frac{O(s)}{P(s)} = \frac{1}{W_A(s)+W_P(s)} \tag{2/16}$$

gdzie $P(s)$ i $O(s)$ oznaczają odpowiednio pobudzenie i odpowiedź, a $W_A(s)$ i $W_P(s)$ są immitancjami dwójników odpowiednio aktywnego i pasywnego.



2/6 Generator dwójnikowy: a) schemat ogólny; b) małosygnałowy model zastępczy

Jeśli układ ma być generatorem, to w układzie powinien istnieć prąd I (lub napięcie U) przy braku zewnętrznego pobudzenia E (lub J). Zakładając zatem $P(s) = 0$ (przy $O(s) \neq 0$) otrzymujemy graniczny warunek generacji w postaci

$$W_A(\omega_o) + W_P(\omega_o) = 0 \tag{2/17}$$

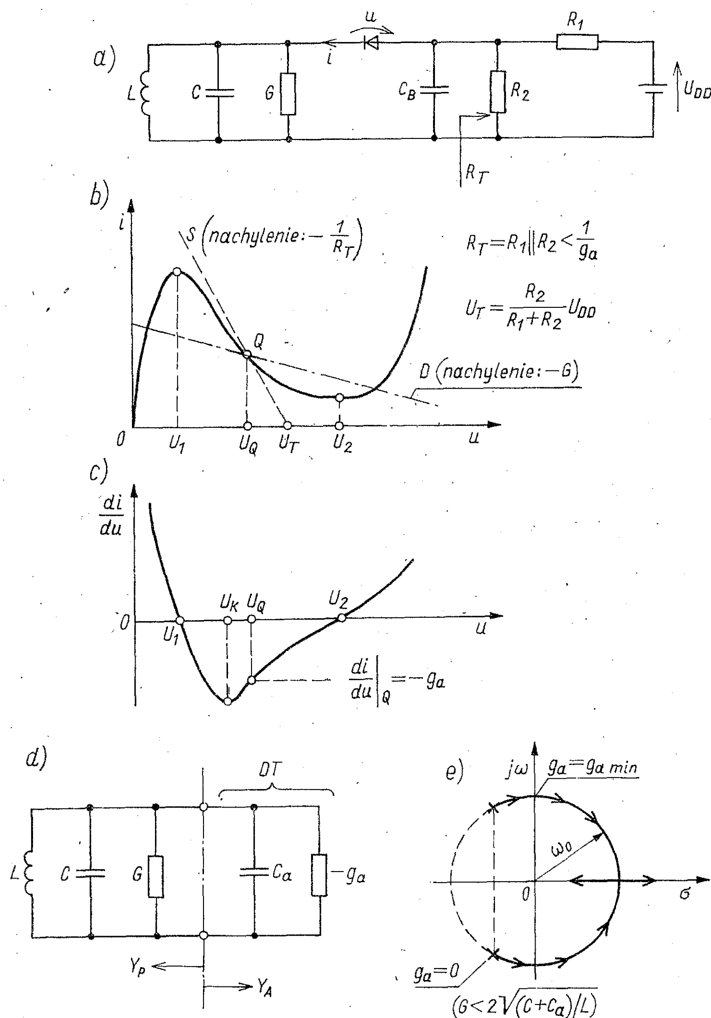
Równanie to rozpada się na dwa równania, a mianowicie na równanie warunku amplitudy

$$\mathrm{Re}\, W_A(\omega_o) + \mathrm{Re}\, W_P(\omega_o) = 0 \tag{2/18a}$$

oraz równanie warunku fazy

$$\mathrm{Im}\, W_A(\omega_o) + \mathrm{Im}\, W_P(\omega_o) = 0 \tag{2/18b}$$

Warunek amplitudy określa związek, jaki musi istnieć między konduktancją ujemną a konduktancją strat. Z warunku fazy otrzymujemy przybliżoną wartość pulsacji drgań ω_o.



2/7 Generator z diodą tunelową: a) schemat ideowy; b) charakterystyka statyczna diody; c) przebieg różniczkowej konduktancji diody; d) małosygnałowy model generatora; e) linie pierwiastkowe przy wzroście wartości g_a

Schemat prostego generatora z diodą tunelową (*DT*) pokazano na rys. 2/7. Jak wiadomo, dioda tunelowa wykazuje *ujemną konduktancję o uzależnieniu napięciowym* (inaczej: stabilną zwarciowo, typu *N*, dynatronową). W celu wykorzystania aktywnych właściwości diody jej statyczny punkt pracy *Q* powinien być ulokowany na opadającej części charakterystyki (rys. 2/7b). Osiąga się to, stosując źródło polaryzujące o odpowiednio małej rezystancji zastępczej R_T

$$R_T = R_1||R_2 < \frac{-1}{\left.\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}u}\right|_{u=U_Q}} = \frac{1}{g_a} \tag{2/19}$$

gdzie g_a oznacza wartość bezwzględną ujemnej konduktancji różniczkowej

diody (rys. 2/7c). Powyższemu warunkowi (tzw. warunek stabilności stałoprądowego punktu pracy) odpowiada statyczna prosta robocza S.

Zakładając, że kondensator blokujący C_B stanowi zwarcie dla składowych zmiennych, a dioda może być reprezentowana uproszczonym małosygnałowym schematem zastępczym, uwzględniającym jedynie konduktancję g_a i pojemność złącza C_a (suma pojemności bariery i pojemności dyfuzyjnej) otrzymujemy małosygnałowy model generatora pokazany na rys. 2/7d. Opisując ten model za pomocą admitancji (co jest w tym przypadku najprostsze), z warunku amplitudy (2/18a) otrzymujemy minimalną wartość bezwzględną konduktancji diody

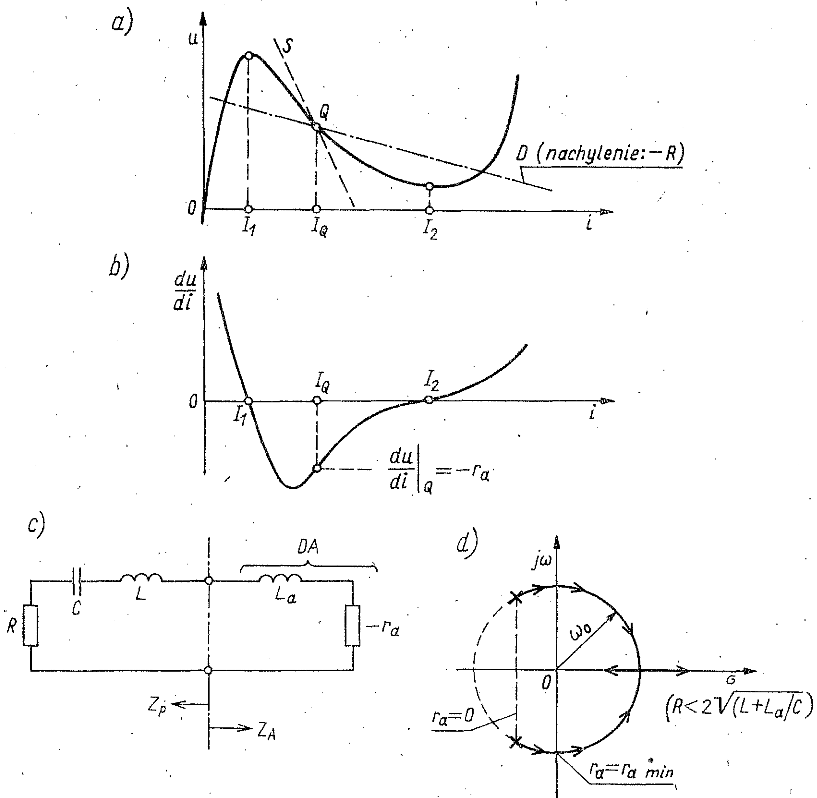
$$g_{a\min} = G \tag{2/20a}$$

natomiast z warunku fazy (2/18b) — pulsację

$$\omega_o^2 L(C+C_a) = 1 \tag{2/20b}$$

W rzeczywistym generatorze dwójnikowym, podobnie jak w generatorze sprzężeniowym (p. 2.2.1), warunek amplitudy powinien być spełniony z nadmiarem, tzn.

$$g_a > g_{a\min} = G \tag{2/21}$$



2/8 Generator z ujemną rezystancją uzależnioną prądowo: a) charakterystyka statyczna dwójnika nieliniowego; b) przebieg rezystancji różniczkowej; c) model małosygnałowy generatora; d) linie pierwiastkowe przy zmianach wartości r_a

(Warunkowi temu odpowiada dynamiczna prosta robocza D — rys. 2/7b). Wówczas para zespolonych sprzężonych pierwiastków charakterystycznych jest ulokowana w prawej półpłaszczyźnie s (rys. 2/7e). W miarę wzrostu amplitudy drgań, w wyniku nieliniowości charakterystyki $i = f(u)$, wartość bezwzględna ujemnej konduktancji maleje[1], pierwiastki przemieszczają się ku lewej półpłaszczyźnie s, osiągając w stanie równowagi trwałej generatora położenie na osi $j\omega$.

Należy podkreślić, iż ten mechanizm ustalania się stanu równowagi trwałej generatora zachodzi tylko wówczas, gdy dioda tunelowa (a ogólnie: dwójnik o ujemnej konduktancji uzależnionej napięciowo) współpracuje z równoległym obwodem rezonansowym.

W przypadku zastosowania w generatorze dwójnika o *ujemnej rezystancji uzależnionej prądowo* (inaczej: stabilnej rozwarciowo, typu S, łukowej) występuje sytuacja odwrotna. Dwójnik taki (rys. 2/8a, b) może współpracować jedynie z szeregowym obwodem rezonansowym (rys. 2/8c). W generatorze tego typu warunek amplitudy i fazy są określone następująco:

$$r_a > r_{a\min} = R; \qquad \omega_o^2(L+L_a)C = 1$$

Przebieg linii pierwiastkowych generatora pokazano na rys. 2/8d.

2.3 ANALIZA STANU USTALONEGO W GENERATORZE

W dotychczasowych rozważaniach, w ramach liniowej teorii generacji, zajmowaliśmy się początkowym przebiegiem narastania drgań, kiedy to amplitudy drgań są jeszcze na tyle małe, że generator może być traktowany jako układ liniowy. Przy okazji poczyniliśmy pewne uwagi, dotyczące nieliniowego mechanizmu ustalania się amplitudy drgań.

Do uwzględnienia nieliniowych efektów układu generacyjnego, a więc określenia procesu narastania drgań, amplitudy w stanie ustalonym oraz wpływu harmonicznych na częstotliwość drgań, konieczne jest odwołanie się do nieliniowej teorii generacji.

Jak już wspomniano, w większości przypadków praktycznych interesuje nas głównie praca generatora w stanie ustalonym. Do badania tego stanu szeroko stosowana jest metoda funkcji opisującej. Opiera się ona na założeniu idealnej filtracji harmonicznych. Można ją zastosować do wyznaczenia amplitudy oraz przybliżonej częstotliwości drgań.

Wpływ harmonicznych na częstotliwość drgań można skutecznie zbadać w opraciu o zasadę równowagi mocy urojonej harmonicznych. Wpływ ten jest określany tzw. *nieliniową poprawką częstotliwości*. Jakkolwiek poprawka ta przybiera na ogół małe wartości, to jednak znajomość jej jest użyteczna przy badaniu stałości częstotliwości generatora.

---

[1] Omawiamy to bliżej w p. 2.3.1.

2.3.1 Metoda funkcji opisującej

W celu wprowadzenia pojęcia funkcji opisującej (jednoharmonicznej) przyjmiemy następujące założenia. Układ (lub element) nieliniowy o charakterystyce

$$y = f(x) \tag{2/22}$$

(x, y — prąd lub napięcie) jest pobudzany przebiegiem

$$x(t) = B\sin\omega t = B\sin\phi \tag{2/23}$$

przy czym B oznacza amplitudę rzeczywistą. Odpowiedź na to pobudzenie jest okresowa i można ją przedstawić szeregiem Fouriera o postaci

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(B, \omega)\sin[k\omega t + \theta_k(B, \omega)] \tag{2/24}$$

gdzie $Y_k(\cdot)$ jest amplitudą rzeczywistą k-tej harmonicznej odpowiedzi.

Funkcja opisująca jest zdefiniowana jako stosunek zespolonej amplitudy składowej podstawowej odpowiedzi do zespolonej amplitudy jednoharmonicznego pobudzenia. W rozpatrywanym przypadku funkcję opisującą możemy więc zapisać w postaci

$$N(B, \omega) = \frac{Y_1(B, \omega)}{B} e^{j\theta_1(B,\omega)} \tag{2/25a}$$

lub inaczej

$$N(B, \omega) = |N(B, \omega)| e^{j\theta_1(B,\omega)} \tag{2/25b}$$

Jeśli znana jest analityczna postać charakterystyki (2/22), to moduł $|N(\cdot)|$ i kąt fazowy $\theta_1(\cdot)$ funkcji opisującej znajdziemy wyznaczając odpowiednie współczynniki szeregu Fouriera:

$$|N(B, \omega)| = \frac{1}{B}\sqrt{a^2(B, \omega) + b^2(B, \omega)} \tag{2/26a}$$

$$\theta_1(B, \omega) = \operatorname{arctg}\frac{b(B, \omega)}{a(B, \omega)} \tag{2/26b}$$

przy czym

$$a(B, \omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(B\sin\phi)\sin\phi \, d\phi \tag{2.27a}$$

$$b(B, \omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(B\sin\phi)\cos\phi \, d\phi \tag{2/27b}$$

Funkcja opisująca uwzględnia zatem związek między składową podstawową odpowiedzi a sinusoidalnym pobudzeniem. Nadaje się więc ona do opisu układu nieliniowego, w którym składowa stała i wyższe harmoniczne przebiegu wyjściowego są pomijalnie małe. Cechy te dość dobrze spełniają układy genera-

torów częstotliwości. Przebiegi w nich występujące są prawie sinusoidalne, zaś udział wyższych harmonicznych jest nieznaczny.

Inaczej mówiąc, funkcja opisująca $N(B, \omega)$ jest wielkosygnałową (linearyzowaną harmonicznie) transmitancją częstotliwościową układu nieliniowego, wyznaczoną dla składowej podstawowej, w warunkach sterowania przebiegiem sinusoidalnym o amplitudzie B. W granicznym przypadku $B \to 0$ mamy

$$N(B, \omega) \underset{B\to 0}{\to} N(0, \omega) = N(\omega)$$

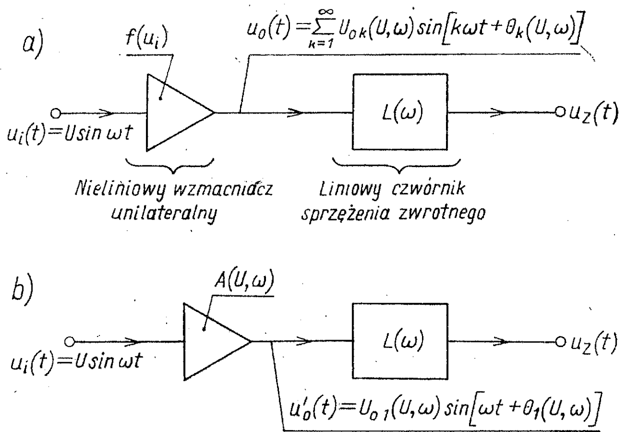
gdzie $N(\omega)$ jest małosygnałową (linearyzowaną w zwykłym sensie) transmitancją częstotliwościową, którą stosujemy powszechnie w analizie układów liniowych.

Przejdźmy teraz do omówienia sposobu wyznaczania amplitudy drgań z zastosowaniem metody funkcji opisującej.

Układy sprzężeniowe

Na rysunku 2/9a przedstawiono schemat blokowy generatora z otwartą pętlą sprzężenia zwrotnego. Wprowadzając napięciową funkcję opisującą, tzn. przyjmując: $x(t) = u_i(t) = U\sin\omega t$, $y(t) = u_o(t)$, $N(B, \omega) = A(U, \omega)$, na podstawie definicji ogólnej (2/25), mamy

$$A(U, \omega) = \frac{U_{o1}(U, \omega)}{U} e^{j\theta_1(U,\omega)} = |A(U, \omega)| e^{j\theta_1(U,\omega)} \tag{2/28}$$



2/9 Schematy blokowe generatora sprzężeniowego (pętla otwarta); a) ogólny; b) uzyskany w wyniku zastosowania metody funkcji opisującej

Wielkość tę nazwiemy *wielkosygnałowym wzmocnieniem napięciowym* wzmacniacza. Konsekwentnie, *wielkosygnałowe wzmocnienie pętli* (rys. 2/9b)

$$A_L(U, \omega) = A(U, \omega)L(\omega)$$

W układzie zamkniętym napięcie zwrotne $u_z(t)$ jest równe napięciu wejściowemu $u_i(t)$, wobec tego możemy napisać, że

$$A(U^+, \omega_o)L(\omega_o) = 1 \tag{2/29}$$

Równanie to jest *równaniem stanu ustalonego generacji*. Jego rozwiązanie określa amplitudę U^+ i częstotliwość drgań ω_o. Może być ono zapisane za pomocą dwóch równań, które muszą być jednocześnie spełnione, a mianowicie: równania warunku amplitudy

$$|A(U^+, \omega_o)||L(\omega_o)| = 1 \tag{2/30a}$$

oraz równania warunku fazy

$$\arg A(U^+, \omega_o) + \arg L(\omega_o) = 0 \tag{2/30b}$$

Jeśli w zakresie pulsacji bliskich ω_o wzmacniacz generatora sprzężeniowego można traktować jako układ bezinercyjny, to wielkosygnałowy warunek amplitudy (2/30a) przyjmuje postać

$$A(U^+)|L(\omega_o)| = 1 \tag{2/31a}$$

Mając na uwadze, że wartość $|L(\omega_o)|$ jest określona małosygnałowym warunkiem generacji (2/3)

$$A_{\min}|L(\omega_o)| = 1$$

równanie (2/31a) możemy zapisać w równoważnej postaci

$$A(U^+) = A_{\min} \tag{2/31b}$$

Graficzną interpretację warunku amplitudy (2/31b) przedstawiono na rys. 2/5a.

Przykłady wyznaczania funkcji opisującej dla bezinercyjnych układów nieliniowych są podane w dodatkach 2...4. Niektóre wyniki tam przedstawione wykorzystamy dalej, przy rozpatrywaniu konkretnych realizacji generatorów.

Układy dwójnikowe

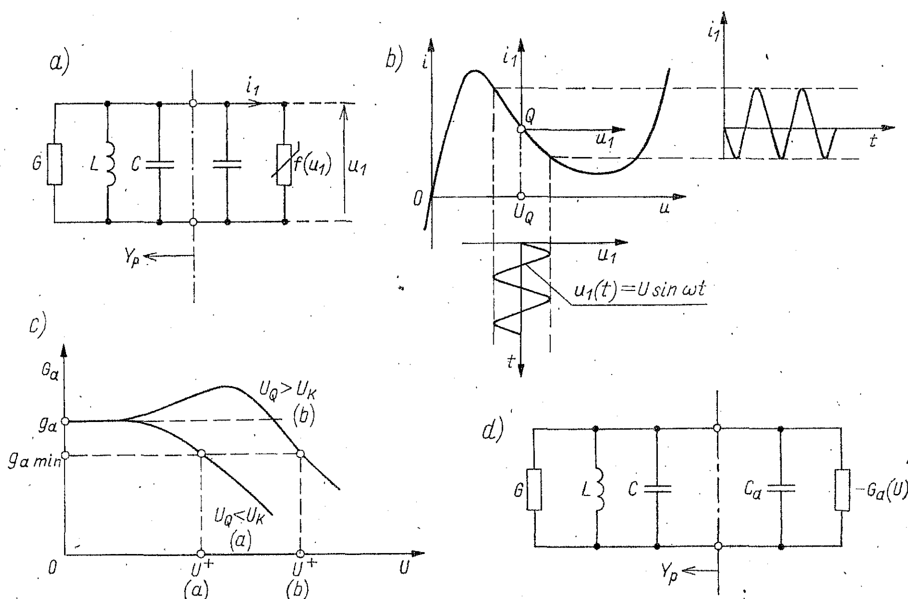
Amplitudę drgań generatora dwójnikowego wyznacza się podobnie jak dla układu czwórnikowego. Rozpatrzymy to na przykładzie generatora z diodą tunelową (rys. 2/7).

Przyjmiemy, że w zakresie interesujących nas wartości amplitudy drgań pojemność złącza diody C_a jest liniowa. Dla składowych zmiennych mamy więc układ (rys. 2/10a) z jednym tylko elementem nieliniowym, a mianowicie konduktancją złącza o charakterystyce $i_1 = f(u_1)$. Niech pobudzenie napięciowe będzie postaci: $u_1(t) = U\sin\omega t$ (rys. 2/10b). Przesunięcie fazy θ_1 między pobudzeniem a składową podstawową odpowiedzi wynosi 180°. Wobec tego funkcję opisującą zapiszemy jako

$$N(U) = -|N(U)| = -\frac{I_1}{U} = -G_a(U) \tag{2/32}$$

gdzie I_1 jest amplitudą składowej podstawowej prądu $i_1(t)$, zaś $G_a(U)$ — wartością bezwzględną wielkosygnałowej ujemnej konduktancji diody.

Na rysunku 2/10c pokazano typowe przebiegi $G_a(U)$. Charakter zmian tej wielkości zależy od położenia spoczynkowego punktu pracy $Q(U_Q, I_Q)$ względem punktu przegięcia $P_K(U_K, I_K)$ opadającego odcinka charakterystyki diody.



2/10 Generator z diodą tunelową: a) schemat zmiennoprądowy; b) charakterystyka diody i przebiegi czasowe; c) typowe przebiegi wielkosygnałowej konduktancji diody w funkcji amplitudy sinusoidalnego pobudzenia; d) model wielkosygnałowy uzyskany w wyniku zastosowania metody funkcji opisującej

Na podstawie wielkosygnałowego modelu generatora (rys. 2/10d) możemy równanie stanu ustalonego zapisać następująco:

$$Y_P(\omega_o)+j\omega_o C_a - G_a(U^+) = 0 \tag{2/33}$$

A zatem warunek amplitudy i warunek fazy przybierają odpowiednio postaci

$$G - G_a(U^+) = 0 \tag{2/34a}$$

$$\omega_o^2 L(C+C_a) = 1 \tag{2/34b}$$

Wykorzystując zależność (2/20a), równanie warunku amplitudy (2/34a) możemy zapisać również w postaci

$$G_a(U^+) = g_{a\min} \tag{2/35}$$

gdzie $g_{a\min}$ jest minimalną wartością bezwzględną ujemnej konduktancji diody, wyznaczoną z małosygnałowego warunku drgań.

Rozwiązanie równania (2/35) daje nam amplitudę drgań. Graficzny sposób wyznaczania amplitudy drgań przedstawiono na rys. 2/10c.

2.3.2 Nieliniowa poprawka częstotliwości

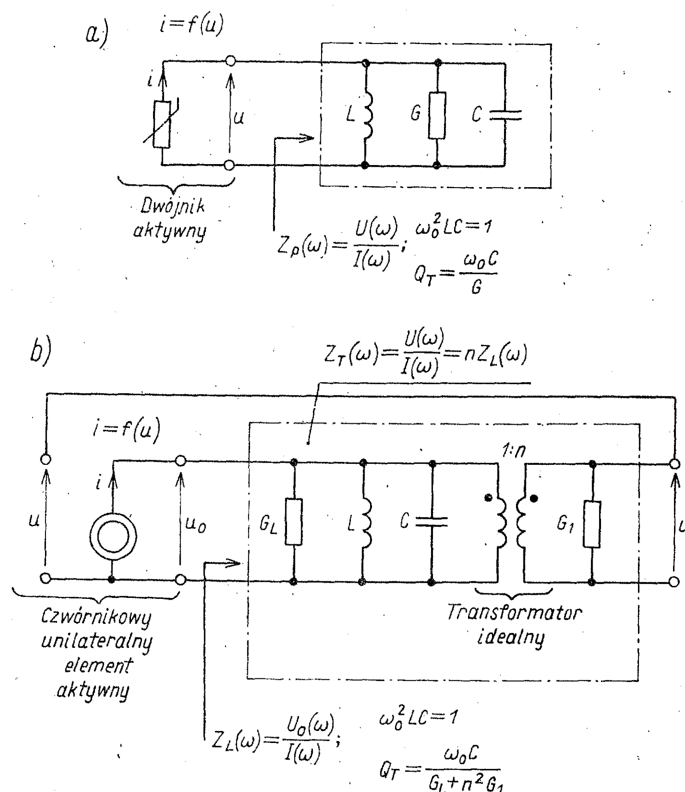
Omówiona poprzednio przybliżona metoda analizy nieliniowej generatora za pomocą funkcji opisującej jest oparta na założeniu pomijalnego wpływu składowych harmonicznych. Metoda ta nie może więc z natury rzeczy uwzględniać wpływu harmonicznych na częstotliwość drgań.

Składowe harmoniczne naruszają bilans mocy w układzie, co powoduje, że w stanie ustalonym pulsacja drgań ω różni się od pulsacji ω_0, tzn.

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega_N \tag{2/36}$$

gdzie $\Delta\omega_N$ jest tzw. nieliniową poprawką częstotliwości.

Wpływ harmonicznych na częstotliwość drgań można określić metodą Groszkowskiego [7], wykorzystując zasadę równowagi mocy urojonej harmonicznych. Metodę tę pokrótce omówimy.



2/11 Analizowane układy generacyjne: a) dwójnikowy; b) czwórnikowy (typu Meissnera)

Schematy rozpatrywanych dalej dwóch układów generacyjnych pokazano na rys. 2/11. W układzie dwójnikowym (rys. 2/11a) nieliniowy element aktywny o charakterystyce $i = f(u)$ współpracuje z dwójnikiem pasywnym o impedancji $Z_P(\omega)$. W układzie sprzężeniowym (rys. 2/11b) unilateralny element aktywny jest reprezentowany przez nieliniowe źródło prądowe sterowane napięciem $i = f(u)$. Element ten od strony wyjścia współpracuje z pasywnym czwórnikiem o transmitancji częstotliwościowej $Z_T(\omega)$.

Niech w stanie ustalonym napięcie $u(t)$ i prąd $i(t)$, występujące w układach z rys. 2/11, będą dane jako

$$u(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_m e^{jm\omega t} \tag{2/37}$$

$$i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k e^{jk\omega t} \tag{2/38}$$

Przyjmiemy dodatkowo, że charakterystyka $i = f(u)$ jest bezpętlowa (linia cienka), czyli spełnia warunek

$$J = \int_0^T i\,du = \int_0^T f(u(t))\frac{du(t)}{dt}dt = 0 \tag{2/39}$$

gdzie $T = 2\pi/\omega$. Z drugiej strony możemy napisać, że

$$J = \int_0^T \Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k e^{jk\omega t}\Big]\Big[\sum_{m=-\infty}^{\infty} jm\omega U_m e^{jm\omega t}\Big]dt = -4\pi\sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathrm{Im}(I_k U_k^*) \tag{2/40}$$

gdzie U_k^* — wartość zespolona sprzężona z U_k.

Z równań (2/39) i (2/40) dostajemy tzw. *zasadę równowagi mocy urojonej harmonicznych* (równość Groszkowskiego)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathrm{Im}(I_k U_k^*) = 0 \tag{2/41}$$

Niech $Z(s)$ będzie oznaczeniem ogólnym dla impedancji lub transmitancji obwodu pasywnego, tzn.

$$Z(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = \begin{cases} Z_P(s) \text{ — układ dwójnikowy (rys. 2/11a)} \\ Z_T(s) \text{ — układ czwórnikowy (rys. 2/11b)} \end{cases}$$

Zauważmy, że dla k-tej harmonicznej obowiązuje zależność

$$\mathrm{Im}(I_k U_k^*) = -|I_k|^2\,\mathrm{Im}\,Z(k\omega) \tag{2/42}$$

Uwzględnienie tej zależności w równaniu (2/41) daje

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|I_k|^2\,\mathrm{Im}\,Z(k\omega) = 0 \tag{2/43}$$

lub

$$\mathrm{Im}\,Z(\omega) = -\sum_{k=2}^{\infty} kh_{ik}^2\,\mathrm{Im}\,Z(k\omega) \tag{2/44}$$

przy czym $h_{ik} = |I_k|/|I_1|$ jest zawartością k-tej harmonicznej prądowej.

Równanie (2/41) pozwala określić pulsację drgań generatora dwójnikowego lub czwórnikowego. Zauważmy, że obowiązuje ono dla dowolnego obwodu pasywnego, niekoniecznie dla obwodów o strukturach pokazanych na rys. 2/11.

Pomijając wpływ harmonicznych, pulsację drgań wyznaczamy z równania

$$\operatorname{Im} Z(\omega_o) = 0 \tag{2/45}$$

Wskutek obecności harmonicznych pulsacja drgań ω ulega pewnemu przesunięciu $\Delta\omega_N = \omega - \omega_o$, tak aby spełniony był warunek równowagi mocy urojonych, sformułowany równaniem (2/44). Założymy, że pulsacja drgań ω jest bardzo bliska ω_o (w praktyce $|\Delta\omega_N|/\omega_o \ll 1$). Rozwijając $\operatorname{Im} Z(\omega)$ w szereg Taylora w otoczeniu ω_o, przy zaniedbaniu wyrazów nieliniowych mamy

$$\operatorname{Im} Z(\omega) = \operatorname{Im} Z(\omega_o) + \left.\frac{\partial \operatorname{Im} Z(\omega)}{\partial \omega}\right|_{\omega_o} (\omega - \omega_o) \tag{2/46}$$

Ponieważ $\operatorname{Im} Z(\omega_o) = 0$, $\omega - \omega_o = \Delta\omega_N$, zatem z równania (2/46), otrzymujemy

$$\Delta\omega_N = \frac{\operatorname{Im} Z(\omega)}{\left.\frac{\partial \operatorname{Im} Z(\omega)}{\partial \omega}\right|_{\omega_o}} \tag{2/47}$$

Podstawiając (2/44) do (2/47), otrzymujemy

$$\Delta\omega_N = \frac{-1}{\left.\frac{\partial \operatorname{Im} Z(\omega)}{\partial \omega}\right|_{\omega_o}} \sum_{k=2}^{\infty} k h_{ik}^2 \operatorname{Im} Z(k\omega) \tag{2/48}$$

Wobec przyjętego już założenia: $\omega \approx \omega_o$, zastosujemy przybliżenie

$$\Delta\omega_N \approx \frac{-1}{\left.\frac{\partial \operatorname{Im} Z(\omega)}{\partial \omega}\right|_{\omega_o}} \sum_{k=2}^{\infty} k h_{ik}^2 \operatorname{Im} Z(k\omega_o) \tag{2/49}$$

Z zależności tej widać, że nieliniowa poprawka częstotliwości zależy nie tylko od poziomu harmonicznych, lecz także od struktury i parametrów (wyznaczonych dla ω_o) obwodu pasywnego.

Podamy jeszcze inną postać wzoru (2/49), dającą nieco większe rozeznanie co do pożądanych właściwości obwodu pasywnego.

Kąt fazowy wielkości $Z(\omega)$ jest określony zależnością

$$\phi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} Z(\omega)}{\operatorname{Re} Z(\omega)}$$

Mamy więc

$$\left.\frac{\partial \phi(\omega)}{\partial \omega}\right|_{\omega_o} = \frac{1}{\operatorname{Re} Z(\omega_o)} \left.\frac{\partial \operatorname{Im} Z(\omega)}{\partial \omega}\right|_{\omega_o} \tag{2/50}$$

gdyż $\operatorname{Im} Z(\omega_o) = 0$ (patrz wzór (2/45)).

Po uwzględnieniu zależności (2/50) we wzorze (2/49) możemy ostatecznie napisać, że

$$\frac{\Delta\omega_N}{\omega_o} \approx \frac{-1}{S_F \operatorname{Re} Z(\omega_o)} \sum_{k=2}^{\infty} k h_{ik}^2 \operatorname{Im} Z(k\omega_o) \tag{2/51}$$

gdzie współczynnik

$$S_F = \omega_o \frac{\partial\phi(\omega)}{\partial\omega}\bigg|_{\omega_o} \tag{2/52}$$

nosi nazwę *współczynnika stabilności* (stałości) częstotliwości generatora.

Wzór (2/51) jest najbardziej ogólnym wyrażeniem na częstotliwość drgań generatorów o charakterystyce bezpętlowej $i = f(u)$ i dotyczy zarówno układów dwójnikowych, jak i czwórnikowych typu LC lub RC.

Jak zobaczymy później, w generatorach o dużej stałości częstotliwości zależeć nam będzie na małych wartościach nieliniowej poprawki. Okaże się bowiem, że im mniejsza jest jej wartość, tym lepsza jest stałość częstotliwości drgań.

Ponieważ wartość $\mathrm{Re}\,Z(\omega_o)$ jest ustalona warunkiem amplitudy, zatem wzór (2/51) wskazuje na celowość stosowania w generatorach obwodów pasywnych o dużych wartościach $|S_F|$, czyli obwodów o charakterystykach fazowych $\phi(\omega)$ stromo przebiegających w otoczeniu pulsacji ω_o. Szybkie zmiany przesunięcia fazy można uzyskać w generatorach LC. Natomiast zmian takich nie można osiągnąć w jednopętlowych generatorach RC, o czym jeszcze będzie mowa dalej (p. 2.4.3).

Wyznaczymy teraz nieliniową poprawkę częstotliwości dla generatorów o strukturach pokazanych na rys. 2/11.

Dla układu dwójnikowego (rys. 2/11a) mamy

$$Z(\omega) = |Z(\omega)|\,e^{j\phi(\omega)} = \frac{R}{1+jQ_T\left(\dfrac{\omega}{\omega_o} - \dfrac{\omega_o}{\omega}\right)} \tag{2/53}$$

gdzie

$$\phi(\omega) = -\mathrm{arctg}\left[Q_T\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)\right]$$

$$R = \frac{1}{G} = \mathrm{Re}\,Z(\omega_o) \tag{2/54}$$

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC}; \qquad Q_T = \omega_o RC$$

Obliczając S_F wg wzoru (2/52) dostajemy

$$S_F = -2Q_T \tag{2/55}$$

Ponieważ dla $k \geqslant 2$ mamy

$$\mathrm{Im}\,Z(k\omega_o) = \mathrm{Im}\frac{R}{1+jQ_T\left(k - \dfrac{1}{k}\right)}$$

wobec tego dla $Q_T \gg 1$ możemy zastosować przybliżenie

$$\mathrm{Im}\,Z(k\omega_o) \approx -\frac{R}{Q_T}\,\frac{k}{k^2-1} \tag{2/56}$$

Podstawiając (2/54), (2/55) i (2/56) do (2/51) ostatecznie otrzymujemy, że

$$\frac{\Delta\omega_N}{\omega_o} \approx -\frac{1}{2Q_T^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^2}{k^2-1}h_{ik}^2 \approx -\frac{1}{2Q_T^2}\sum_{k=2}^{\infty}h_{ik}^2 = -\frac{1}{2Q_T^2}h_i^2 \tag{2/57}$$

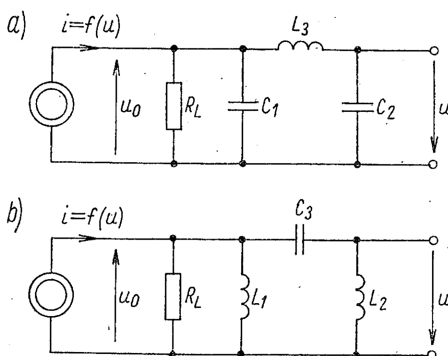
Jak widać, nieliniowa poprawka częstotliwości jest w rozpatrywanym przypadku ujemna, odwrotnie proporcjonalna do kwadratu dobroci obwodu i wprost proporcjonalna do kwadratu współczynnika zawartości harmonicznych przebiegu prądowego.

W wyniku podobnego postępowania można w prosty sposób wykazać, że dla układu czwórnikowego z rys. 2/11b nieliniowa poprawka częstotliwości jest także określona wzorem (2/57), w którym Q_T oznacza dobroć obwodu obustronnie obciążonego, tzn.

$$Q_T = \frac{\omega_o C}{G_L+n^2G_1}$$

gdzie n jest przekładnią napięciową idealnego transformatora.

Przeprowadzając podobną analizę innych typowych generatorów czwórnikowych (rys. 2/12) otrzymujemy następujące wyniki.



2/12 Uproszczone modele generatorów sprzężeniowych: a) układ Colpittsa; b) układ Hartleya

Dla generatora z rys. 2/12a (tzw. *układ Colpittsa*)

$$Z_T(\omega) \approx \frac{R_L\left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2\frac{C_1}{C_2}}{1+jQ_T\left(\frac{\omega}{\omega_o}-\frac{\omega_o}{\omega}\right)} \quad \text{(przyjęto } C_1 \ll C_2)$$

przy czym

$$\omega_o^2 L_3\frac{C_1C_2}{C_1+C_2} = 1; \quad Q_T = \omega_o\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}R_L$$

Na podstawie (2/51) znajdujemy, że

$$\frac{\Delta\omega_N}{\omega_o} \approx -\frac{1}{2Q_T^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}h_{ik}^2 \tag{2/58}$$

Dla generatora z rys. 2/12b (tzw. *układ Hartleya*)

$$Z_T(\omega) \approx \frac{R_L\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 \frac{L_2}{L_1}}{1+jQ_T\left(\frac{\omega}{\omega_o}-\frac{\omega_o}{\omega}\right)} \quad \text{(przyjęto } L_1 \gg L_2\text{)}$$

gdzie

$$\omega_o^2(L_1+L_2)C_3 = 1; \qquad Q_T = \omega_o C_3 R_L$$

Stąd

$$\frac{\Delta\omega_N}{\omega_o} \approx -\frac{1}{2Q_T^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^4}{k^2-1}h_{ik}^2 \tag{2/59}$$

Jak widać, w rozpatrywanych generatorach LC nieliniowa poprawka częstotliwości jest zawsze ujemna. Można ją wyrazić wzorem ogólnym

$$\frac{\Delta\omega_N}{\omega_o} \approx -\frac{1}{2Q_T^2}\sum_{k=2}^{\infty}g(k^2)h_{ik}^2 \tag{2/60}$$

w którym $g(k^2)$ jest funkcją rzędu harmonicznej, zależną od struktury obwodu drgań (różny sposób filtracji poszczególnych harmonicznych prądowych). Przy tym samym poziomie zawartości harmonicznych oraz jednakowej wartości dobroci, bezwzględna wartość poprawki jest najmniejsza w układzie Colpittsa, a największa w układzie Hartleya. W każdym przypadku, najskuteczniejszym środkiem ograniczającym wpływ harmonicznych jest zastosowanie obwodów o dużych wartościach dobroci Q_T (ogólnie: o dużych wartościach $|S_F|$).

2.4 STAŁOŚĆ CZĘSTOTLIWOŚCI

Jedną z najważniejszych właściwości generatora jest zdolność do zachowania stałej częstotliwości drgań, niezależnie od zmian rozmaitych czynników zewnętrznych, jak np. zmiany temperatury, napięć zasilających, wpływ pól magnetycznych, wpływy mechaniczne, wpływy obciążenia itp.

Najogólniej rzecz biorąc, w układach generacyjnych można wyróżnić dwie główne przyczyny niestałości częstotliwości:

1. Zmiany częstotliwości wywołane zmianą warunków pracy elementu nieliniowego.
2. Zmiany częstotliwości wywołane wpływem elementów liniowych.

2.4.1 Wpływ elementów nieliniowych

Elementy nieliniowe wywierają wpływ na częstotliwość generatora w sposób dwojaki:

1. Przez wprowadzenie harmonicznych.
2. Przez wprowadzenie reaktancji.

Oba te efekty są zależne od amplitudy przebiegu oraz od kształtu charakterystyki nieliniowej. Kształt charakterystyki nieliniowej zależy przeważnie od temperatury i napięć zasilających, stąd zmiana tych czynników jest główną przyczyną zmian częstotliwości.

Wpływ harmonicznych na stałość częstotliwości generatora rozpatrzymy na podstawie wzoru (2/51) zakładając, że parametry liniowego obwodu pasywnego nie ulegają zmianie, a więc $\omega_0 = \text{const}$ (stałością ω_0 zajmiemy się oddzielnie, p. 2.4.2). Widzimy wówczas, że możliwe są trzy niezależne sposoby stabilizacji częstotliwości:

1) $h_{ik} \approx \text{const}$ — praca z niezmiennym widmem harmonicznych (tzn. stabilizacja tych wszystkich czynników, które mogłyby wpływać na zmianę poziomu harmonicznych);

2) $1/S_F \approx 0$ — praca z obwodami drgań o bardzo dużej wartości współczynnika stabilności (w generatorach LC jest to równoważne wymaganiu bardzo dużych wartości dobroci Q_T — patrz np. wzory (2/55), (2/60));

3) $h_{ik} \approx 0$ — praca z bardzo małymi poziomami harmonicznych, w warunkach prawie liniowych.

Jest rzeczą zrozumiałą, że stabilizację częstotliwości można przeprowadzić przy jednoczesnym wykorzystaniu dwóch lub trzech wymienionych możliwości.

2.4.2 Wpływ elementów liniowych

Wpływ zmian elementów liniowych na częstotliwość drgań wynika bezpośrednio z warunku fazy. Rozpatrzymy to bliżej na przykładzie generatora sprzężeniowego.

Ogólnie biorąc, charakterystyka fazowa wzmocnienia pętli jest funkcją wielu zmiennych

$$\phi = \arg A_L = f(\omega, a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{2/61}$$

gdzie a_j są parametrami pętli sprzężenia zwrotnego, od których zależy pulsacja drgań ω_0. Mówiąc o pulsacji ω_0 mamy na myśli pewną pulsację umowną, wyznaczoną dla nominalnych (znamionowych) warunków pracy (przy określonej temperaturze, napięciu zasilania, itp.). Przyjmujemy więc pewien wyidealizowany układ odniesienia. Z poprzednich rozważań wiemy, że ω_0 jest pulsacją, przy której przesunięcie fazy w pętli równe jest zeru. Możemy zatem napisać, że

$$\phi = f(\omega_0, a_{1o}, a_{2o}, \ldots, a_{no}) = 0 \tag{2/62}$$

Wskutek oddziaływania czynników destabilizujących parametry obwodu a_j mogą ulec zmianom Δa_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. W wyniku tych zmian zerowe przesunięcie fazy w pętli wystąpi już przy pewnej innej pulsacji, określonej równaniem

$$\phi = f(\omega_0+\Delta\omega, a_{1o}+\Delta a_1, a_{2o}+\Delta a_2, \ldots, a_{no}+\Delta a_n) = 0 \tag{2/63}$$

Rozwijając funkcję $f(\cdot)$ w szereg Taylora, dla małych przyrostów w oto-

czeniu punktu odniesienia określonego wskaźnikiem o, przy ograniczeniu się tylko do liniowych wyrazów rozwinięcia, otrzymujemy

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial\omega}\right|_{\omega_o}\Delta\omega+\sum_{j=1}^{n}\left.\frac{\partial\phi}{\partial a_j}\right|_{a_{jo}}\Delta a_j=0 \tag{2/64}$$

(pochodne cząstkowe są oczywiście obliczane w punkcie odniesienia o; dla uproszczenia zapisu podano tylko jedną współrzędną).
Stąd względne zmiany częstotliwości możemy wyrazić wzorem

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_o}=\frac{-\sum\limits_{j=1}^{n}\left.\frac{\partial\phi}{\partial a_j}\right|_{a_{jo}}\Delta a_j}{S_F} \tag{2/65}$$

gdzie S_F jest wprowadzonym już wcześniej — wzór (2/52) — współczynnikiem stabilności

$$S_F=\omega_o\left.\frac{\partial\phi}{\partial\omega}\right|_{\omega_o} \tag{2/66}$$

Ze wzoru (2/65) wynika, że największą stałość częstotliwości uzyskuje się wybierając taką konfigurację obwodu, dla której ω_o zależy od najmniejszej liczby parametrów, przy równoczesnym zapewnieniu dobrej stałości ich wartości a_j (np. wysokostabilne elementy *RLC*). Możliwa jest także częściowa kompensacja temperaturowa zmian parametrów realizowana tak, by ich nieuniknione zmiany dawały w wyniku minimalną wartość $\Delta\omega$ (odpowiedni dobór współczynników temperaturowych elementów L i C, elementów R i C, zależnie od typu generatora *LC*, *RC*).

Mówiliśmy tutaj o parametrach elementów zewnętrznych, wprowadzanych celowo do sieci sprzężenia zwrotnego. Należy jednak pamiętać, że charakterystyka fazowa (2/61) jest funkcją także szeregu nieuniknionych reaktancji pasożytniczych. Pasożytniczymi nazwiemy również reaktancje wnoszone przez wzmacniacz, gdyż są one na ogół funkcją napięcia zasilania oraz temperatury, a więc z punktu widzenia stałości częstotliwości są to elementy niepożądane.

Wzór (2/65) wskazuje także na celowość stosowania takich konfiguracji układu, które zapewniają duże wartości $|S_F|$. Należy przypomnieć, że taki sam wniosek wyprowadziliśmy analizując wpływ zmian zawartości harmonicznych na stałość częstotliwości drgań (p. 2.4.1).

Można bez popełnienia większego błędu powiedzieć, że najskuteczniejszym, uniwersalnym środkiem zmniejszającym wpływy wszystkich źródeł niestałości częstotliwości jest zastosowanie takiego rozwiązania układu generacyjnego, w którym uzyskuje się odpowiednio duże wartości współczynnika stabilności S_F.

2.4.3 Współczynnik stabilności, dobroć równoważna

Współczynnik stabilności S_F jest przyjmowany za miarę jakości układu generacyjnego.

W generatorach *LC* z pojedynczym obwodem rezonansowym między współczynnikiem S_F a dobrocią Q_T dla częstotliwości rezonansowej zachodzi związek (por. np. wzór (2/55))

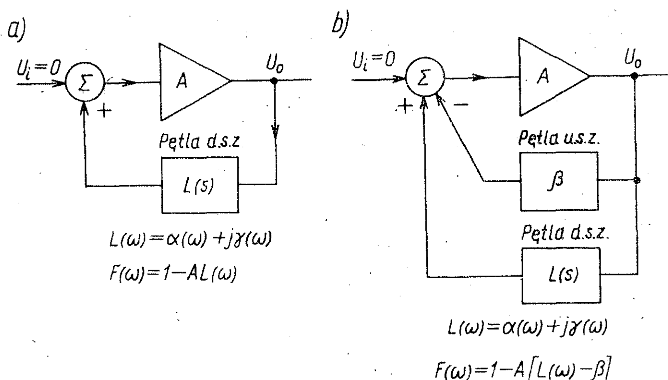
$$S_F = \omega_o \frac{\partial \phi}{\partial \omega}\Big|_{\omega_o} = -2Q_T \tag{2/67}$$

(związek ten w przybliżeniu obowiązuje także dla niektórych innych generatorów *LC*). W związku z tym, przez analogię, dla generatorów *RC* wprowadzono pojęcie *dobroci równoważnej* układu, zdefiniowanej jako

$$Q_R = \frac{\omega_o}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \omega}\Big|_{\omega_o} \tag{2/68}$$

Jak widać, „równoważność" wynika jedynie z porównania nachylenia charakterystyki fazowej w otoczeniu ω_o, decydującego w głównej mierze o stałości częstotliwości generatora.

Współczynniki S_F lub Q_R pozwalają porównywać różne realizacje układowe generatorów. Układ o większej wartości $|S_F|$ lub Q_R wykazuje większą stałość częstotliwości, a tym samym stanowi rozwiązanie potencjalnie korzystniejsze.



2/13 Schematy blokowe generatorów sprzężeniowych: a) układ jednopętlowy; b) układ z dwiema pętlami (mostkowy). Oznaczenia: u.s.z., d.s.z. — ujemne, dodatnie sprzężenie zwrotne; *F* — różnica zwrotna

Rozpatrzmy dwa podstawowe układy generatorów sprzężeniowych o schematach blokowych jak na rys. 2/13, w których zastosowano identyczne czwórniki sprzężenia zwrotnego o transmitancji $L(s)$. Przyjmiemy, że w układzie z rys. 2/13b wprowadzono dodatkowo szerokopasmowe ujemne sprzężenie zwrotne (β — dodatnie, rzeczywiste). Interesować nas będzie wpływ tego dodatkowego sprzężenia zwrotnego (w analizie potraktujemy je jako sprzężenie lokalne) na wartość współczynnika stabilności S_F.

W układzie jednopętlowym (rys. 2/13a) charakterystyka fazowa wzmocnienia pętli jest określona jako

$$\phi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{\gamma(\omega)}{\alpha(\omega)} \tag{2/69}$$

Zatem, na podstawie zależności (2/66), otrzymujemy

$$S_F = \frac{\omega_o}{\alpha(\omega_o)}\frac{\partial\gamma(\omega)}{\partial\omega}\bigg|_{\omega_o} \tag{2/70}$$

gdyż, zgodnie z małosygnałowym warunkiem fazy (2/6b), $\gamma(\omega_o) = 0$.

Postępując podobnie można wyznaczyć współczynnik stabilności dla układu dwupętlowego (rys. 2/13b), nazywanego także *układem mostkowym*. W tym przypadku charakterystyka fazowa $\phi(\omega)$ i warunek fazy są określone następująco:

$$\phi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{\gamma(\omega)}{\alpha(\omega)-\beta} \tag{2/71}$$

$$\gamma(\omega_o) = 0 \tag{2/72}$$

i dlatego

$$S_F = \frac{\omega_o}{\alpha(\omega_o)-\beta}\frac{\partial\gamma(\omega)}{\partial\omega}\bigg|_{\omega_o} \tag{2/73}$$

Z porównania zależności (2/70) i (2/73) wynika, że wprowadzając lokalne sprzężenie zwrotne o odpowiednio dobranym współczynniku β można znacznie zwiększyć wartość $|S_F|$ w porównaniu do wartości uzyskiwanej w układzie jednopętlowym.

Jeśli w równaniu (2/73) uwzględnimy graniczny warunek amplitudy, który dla układu mostkowego ma postać

$$A_{\min}[\alpha(\omega_o)-\beta] = 1 \tag{2/74}$$

to otrzymamy

$$S_F = \omega_o A_{\min}\frac{\partial\gamma(\omega)}{\partial\omega}\bigg|_{\omega_o} \tag{2/75}$$

Wartość współczynnika S_F jest więc ograniczona jedynie możliwym do uzyskania wzmocnieniem napięciowym wzmacniacza.

Ze wzorów (2/6b) i (2/72) wynika, że wprowadzenie dodatkowej pętli nie narusza warunku fazy (dodatkową pętlą jest objęty układ bezinercyjny, wzmacniacz A, i należało tego oczekiwać).

Zauważmy na koniec, że wyprowadzone tu wnioski mają charakter ogólny; dotyczą bowiem układów, w których zastosowano czwórniki $L(s)$, co prawda identyczne (bo tylko takie porównanie jest sensowne), lecz o dowolnej strukturze.

Generatory mostkowe znalazły szerokie zastosowanie głównie jako generatory *RC*.

2.5 PRZYKŁADY GENERATORÓW *RC*

Jak już wiemy, generatorami *RC* są nazywane układy z zewnętrznym sprzężeniem zwrotnym, realizowanym za pomocą celowo wprowadzanych elementów *R* i *C*.

Dla uzyskania sinusoidalnych drgań należy użyć co najmniej czterech takich elementów (dwa kondensatory plus dwa rezystory). Sprzężenie jednopętlowe daje układy o najgorszych właściwościach (małe S_F) i w związku z tym jest rzadko stosowane. Zdecydowanie lepsze wyniki uzyskuje się w układach dwupętlowych (mostkowych). Stosuje się również układy o sprzężeniu wielopętlowym.

Analizę układów dwu- lub wielopętlowego najdogodniej jest przeprowadzać, sprowadzając je do układu jednopętlowego. Takie podejście pozwala w miarę jednolicie potraktować rozmaite realizacje układowe, a przy tym wykorzystać wyniki analizy ogólnej przedstawione wcześniej dla układu jednopętlowego, z której wynikały jego podstawowe właściwości.

Generatory *RC* znalazły szerokie zastosowanie, głównie jako układy wytwarzające przebiegi sinusoidalne w zakresie niezbyt dużych częstotliwości, praktycznie do około kilkudziesięciu megaherców.

2.5.1 Generatory jednopętlowe

Jednym z najprostszych generatorów *RC* jest układ z dzielnikiem *RC* i wzmacniaczem nieodwracającym fazy (rys. 2/14a). W układzie tym czwórnik sprzężenia zwrotnego realizuje funkcję przenoszenia o postaci (2/7).

Wzmocnienie pętli, wyznaczone przy założeniach dotyczących impedancji wejściowej i wyjściowej wzmacniacza jak to zaznaczono na rys. 2/14a, można zapisać jako

$$A_L(p) = AL(p) = \frac{A\sqrt{\frac{m}{n}}\,p}{p^2+bp+1} \tag{2/76}$$

gdzie wprowadzono normalizację pulsacji zespolonej

$$p = \Sigma + j\Omega = sRC\sqrt{mn} \tag{2/77}$$

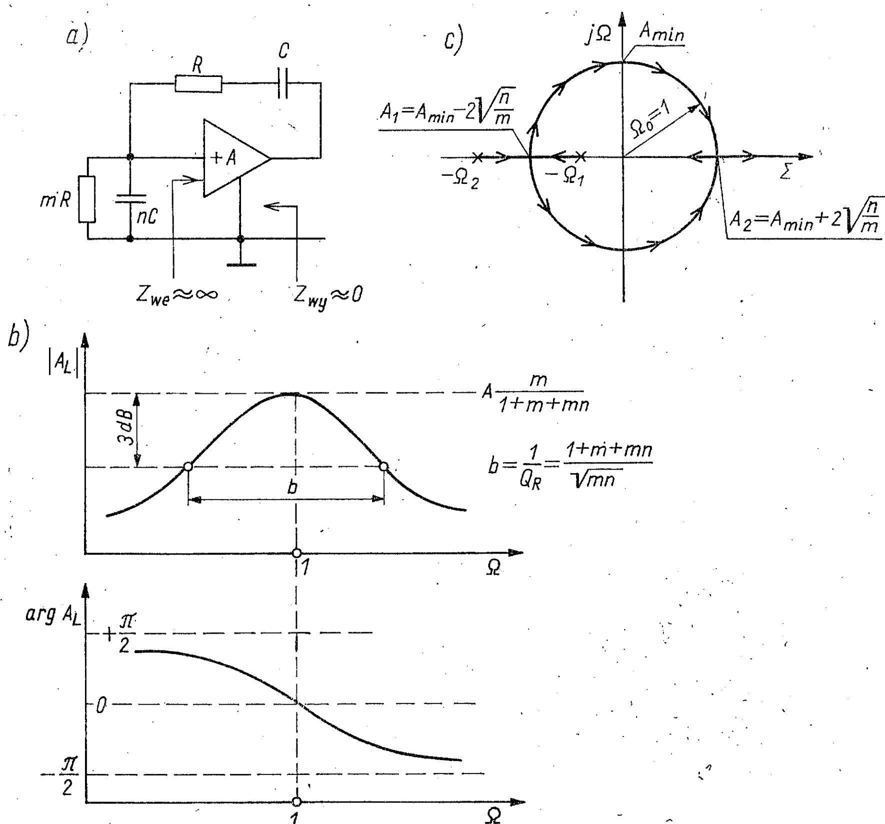
oraz bezwymiarowy parametr

$$b = \frac{1+m+mn}{\sqrt{mn}} \tag{2/78}$$

Przebiegi modułu i fazy wzmocnienia pętli w funkcji unormowanej pulsacji pokazano na rys. 2/14b, a linie pierwiastkowe generatora — na rys. 2/14c.

Z granicznego warunku generacji (2/3) otrzymujemy minimalną wartość wzmocnienia

$$A_{\min} = 1+\frac{1}{m}+n \tag{2/79}$$



2/14 Prosty jednopętlowy generator *RC*: a) schemat; b) charakterystyki częstotliwościowe wzmocnienia pętli; c) linie pierwiastkowe

oraz częstotliwość drgań

$$\Omega_o = 1; \left(\text{po denormalizacji: } \omega_o = \frac{1}{RC\sqrt{mn}}\right) \tag{2/80}$$

Dobroć równoważna, w myśl wzoru definicyjnego (2/68)

$$Q_R = \frac{\Omega_o}{2}\left|\frac{\partial\phi}{\partial\Omega}\right|_{\Omega_o} \tag{2/81}$$

Ponieważ

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{b\Omega}{1-\Omega^2}$$

więc

$$Q_R = \frac{1}{b} = \frac{\sqrt{mn}}{1+m+mn} \tag{2/82}$$

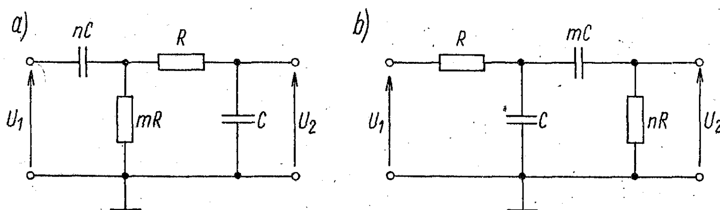
W rozpatrywanym układzie uzyskuje się bardzo małe wartości dobroci, praktycznie $Q_R < 0{,}5$ (np. przy $m = n = 1$; $Q_R = 1/3$). Tak małe wartości Q_R

nie zapewniają wymaganej na ogół w praktyce stałości częstotliwości generowanego przebiegu.

Podobnie niekorzystne właściwości mają generatory z innymi czwórnikami sprzężenia zwrotnego, np. z czwórnikami środkowoprzepustowymi z rys. 2/15, o transmitancji

$$L(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{\sqrt{mm}\,p}{p^2+bp+1} \tag{2/83}$$

Widzimy stąd, że generator z czwórnikiem tego typu ma dobroć Q_R wyrażoną również wzorem (2/82).



2/15 Przykłady środkowoprzepustowych czwórników RC

Tej zasadniczej wady układów jednopętlowych można pozbyć się przez wprowadzenie dodatkowej rezystancyjnej pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego, co prowadzi do rozwiązania o schemacie blokowym pokazanym na rys. 2/13b.

2.5.2 Generator z mostkiem Wiena

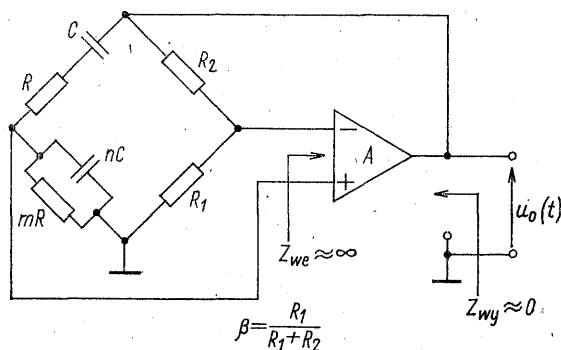
Wprowadzając do układu z rys. 2/14a lokalne rezystancyjne sprzężenie zwrotne, otrzymujemy układ pokazany na rys. 2/16, noszący nazwę *generatora RC z mostkiem Wiena.* W generatorze tym wzmocnienie pętli

$$A_L(p) = A[L(p)-\beta] = -\frac{A\sqrt{\frac{m}{n}}}{b+\delta}\,\frac{p^2-\delta p+1}{p^2+bp+1} \tag{2/84}$$

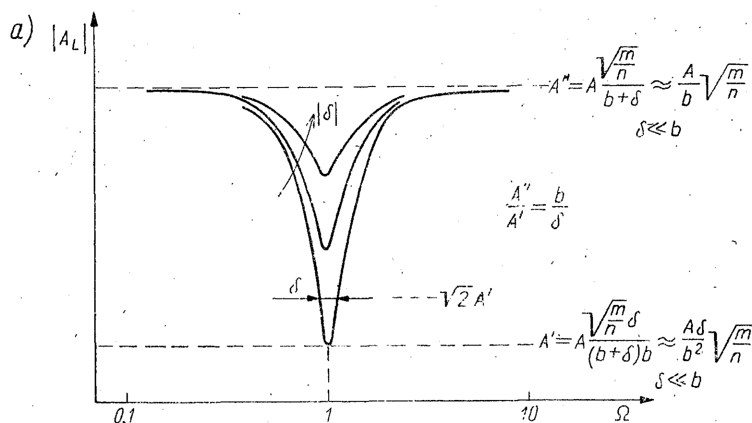
gdzie, podobnie jak poprzednio (p. 2.5.1), wprowadzono normalizację częstotliwości wg (2/77), parametr b jest definiowany wzorem (2/78) oraz dodatkowo — bezwymiarowy parametr δ jest określony następująco:

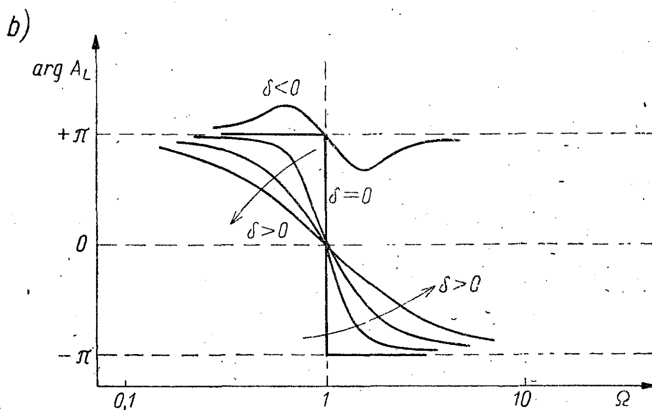
$$\delta = \sqrt{\frac{m}{n}}\left(\frac{R_2}{R_1}-n-\frac{1}{m}\right) \tag{2/85}$$

Na rysunku 2/17 przedstawiono charakterystyki częstotliwościowe wzmocnienia pętli w przypadku różnych wartości parametru δ. Jak to można z łatwością zauważyć, dla pulsacji $\Omega = 1$ mostek znajduje się w równowadze przy $\delta = 0$. Dla pulsacji dostrojenia mostka $\Omega = 1$, przy dodatnich (ujemnych) wartościach δ w układzie występuje dodatnie (ujemne) sprzężenie zwrotne, gdyż



2/16 Generator z mostkiem Wiena





2/17 Charakterystyki wzmocnienia pętli, przy δ jako parametrze: a) amplitudowa; b) fazowa

przesunięcie fazy w pętli wynosi 0° (180°). Jak zatem widać, parametr δ jest wielkością określającą stopień niezrównoważenia mostka dla pulsacji $\Omega = 1$. W dalszym ciągu uwzględniać będziemy jedynie przypadek $\delta > 0$.

Z granicznego warunku generacji (2/3) otrzymuje się minimalną wartość wzmocnienia

$$A_{\min} = \frac{b(b+\delta)\sqrt{\frac{n}{m}}}{\delta} \underset{b \gg \delta}{\approx} \frac{b^2}{\delta}\sqrt{\frac{n}{m}} \tag{2/86}$$

oraz pulsację drgań

$$\Omega_o = 1; \left(\text{po denormalizacji: } \omega_o = \frac{1}{RC\sqrt{mn}}\right) \tag{2/87}$$

Zgodnie z przewidywaniem (p. 2.4.3), wprowadzenie bezinercyjnej pętli sprzężenia zwrotnego nie zmienia pulsacji drgań (p. wzór (2/80)). Zabieg ten pozwala natomiast znacznie zwiększyć dobroć równoważną Q_R układu. Zgodnie ze wzorem ogólnym (2/81)

$$Q_R = \frac{1}{b} + \frac{1}{\delta} = \frac{1}{b}\left[\frac{A_{\min}}{b}\sqrt{\frac{m}{n}}\right] \tag{2/88}$$

gdzie $1/b$ jest dobrocią równoważną układu jednopętlowego (wzór (2/82)), $A_{\min}$ — wielkością określoną wzorem (2/86).

Warto zauważyć, że iloraz dobroci Q_R i wzmocnienia $A_{\min}$ jest wielkością zależną jedynie od stosunku parametrów czwórnika RC

$$\frac{Q_R}{A_{\min}} = \frac{m^{3/2}n^{1/2}}{(1+m+mn)^2} \tag{2/89}$$

Cechę tę, dodając nawiasem, mają także inne generatory mostkowe, np. generatory mostkowe z czwórnikami pokazanymi na rys. 2/15.

Można łatwo wykazać, że dla $m_{\text{opt}} = 2$, $n_{\text{opt}} = 1/2$ stosunek $Q_R/A_{\min}$ przyjmuje wartość maksymalną

$$\left(\frac{Q_R}{A_{\min}}\right)_{\max} = \frac{1}{8} \tag{2/90}$$

Jeżeli więc $A_{\min} = 8 \cdot 10^2$, to układ ma dobroć równoważną $Q_R = 10^2$.

W praktyce dysponuje się zazwyczaj wzmacniaczem o określonym wzmocnieniu A. Wyznacza się wówczas parametry sieci sprzężenia zwrotnego, w tym także współczynnik sprzężenia β (rys. 2/16)

$$\beta = \frac{R_1}{R_1+R_2} = \frac{1}{1+R_2/R_1} \tag{2/91}$$

W takich przypadkach dogodniej jest operować równoważną postacią warunku amplitudy (2/86), otrzymaną po uwzględnieniu zależności (2/85)

$$\left.\frac{R_2}{R_1}\right|_{\min} = \frac{b^2}{A\sqrt{\frac{m}{n}}-b}\sqrt{\frac{n}{m}}+n+\frac{1}{m} \tag{2/92}$$

Wzór ten, przy dostatecznie dużym wzmocnieniu wzmacniacza

$$A \gg A_1 = b^2 \frac{n}{1+mn} = \frac{(1+m+mn)^2}{m(1+mn)} \qquad (2/93)$$

możemy przybliżyć równaniem

$$\left.\frac{R_2}{R_1}\right|_{\min} = \frac{1+mn}{m} \qquad (2/94)$$

Na przykład, dla $m = m_{opt} = 2$, $n = n_{opt} = 0{,}5$ z zależności (2/93) i (2/94) dostajemy odpowiednio

$$A \gg A_1 = 4 \qquad \left.\frac{R_2}{R_1}\right|_{\min} = 1$$

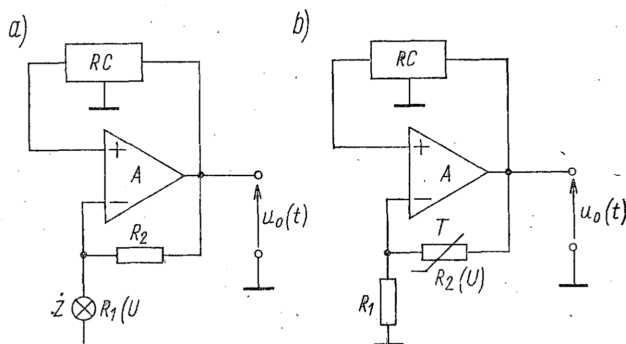
a jeśli przyjmiemy inny typowy zestaw parametrów czwórnika, a mianowicie: $m = n = 1$, to

$$A \gg A_1 = 9/2 \qquad \left.\frac{R_2}{R_1}\right|_{\min} = 2$$

Jak już dobrze wiemy, warunek amplitudy powinien być spełniony z nadmiarem, a zatem

$$\frac{R_2}{R_1} > \left.\frac{R_2}{R_1}\right|_{\min} \qquad (2/95)$$

Pętlę ujemnego sprzężenia zwrotnego można wykorzystać do ograniczania i *stabilizacji amplitudy drgań*. Tego rodzaju rozwiązanie, dość powszechnie stosowane, pozwala zapewnić liniową pracę wzmacniacza, dzięki czemu uzy-

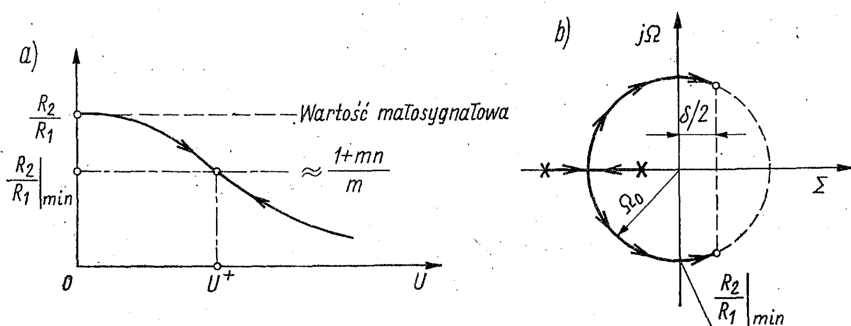


2/18 Układy z ograniczaniem i stabilizacją amplitudy drgań za pomocą żarówki (a) lub termistora (b)

skuje się stosunkowo małe zniekształcenia nieliniowe (pamiętajmy, że wzmacniacz o dużym wzmocnieniu wchodzi gwałtownie w stan nasycenia, a w takim przypadku sygnał wyjściowy może być bardziej zbliżony do fali prostokątnej aniżeli do przebiegu sinusoidalnego). Nieliniowym obwodem generatora jest wówczas człon sprzężenia zwrotnego β. W miejsce rezystora R_1 można użyć,

np. niskonapięciowej żarówki świetlnej (rys. 2/18a); natomiast rezystor R_2 można zastąpić termistorem o ujemnym współczynniku temperaturowym rezystancji (rys. 2/18b). Termiczna stała czasowa takiego termorezystora (żarówka, termistor) powinna być dużo większa od okresu drgań. Wówczas, wskutek dużej bezwładności cieplnej, jego rezystancja zależy tylko od wartości skutecznej (czy amplitudy) napięcia, a nie nadąża za zmianami wartości chwilowej.

Mechanizm ograniczania i stabilizacji amplitudy drgań generatora zilustrowano na rys. 2/19. Przy spełnieniu warunku (2/95) amplituda U napięcia występującego na termorezystorze narasta do chwili, w której następuje zrównanie się wartości R_2/R_1 z wartością $(R_2/R_1)|_{min}$ (rys. 2.19a). Dalszy wzrost amplitudy



2/19 Ilustracja mechanizmu stabilizacji amplitudy drgań w generatorze z mostkiem Wiena: a) zależność stosunku rezystancji R_2/R_1 od amplitudy napięcia na termorezystorze; b) linie pierwiastkowe przy wzroście R_2/R_1

nie jest możliwy, gdyż spowodowałby przemieszczenie się pierwiastków charakterystycznych do lewej półpłaszczyzny zmiennej zespolonej p (rys. 2/19b), tzn. wystąpiłyby drgania tłumione. Amplitudę drgań U^+ w stanie ustalonym możemy zatem wyznaczyć rozwiązując równanie

$$\frac{R_2}{R_1(U^+)} = \frac{R_2}{R_1}\bigg|_{min} \quad \text{(układ z żarówką)} \tag{2/96}$$

lub równanie

$$\frac{R_2(U^+)}{R_1} = \frac{R_2}{R_1}\bigg|_{min} \quad \text{(układ z termistorem)} \tag{2/97}$$

Znając wartość U^+ amplitudę U_o^+ napięcia wyjściowego $u_o(t)$, określimy z prostej zależności opisującej napięciowy dzielnik rezystancyjny $R_1 - R_2$. Na przykład dla układu z żarówką dostajemy

$$U_o^+ = U^+\left(1+\frac{R_2}{R_1}\bigg|_{min}\right) \approx U^+\left(1+\frac{1+mn}{m}\right) \tag{2/98}$$

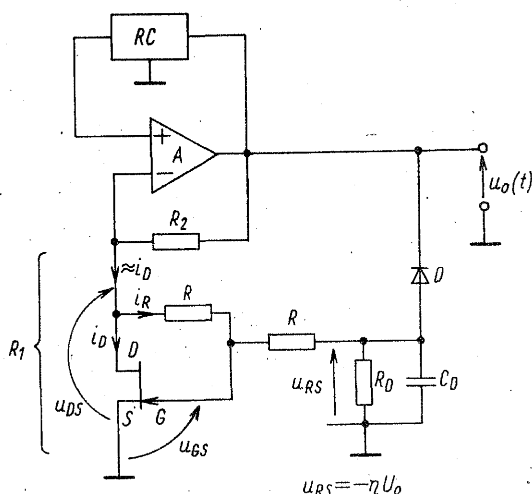
Możliwe jest także ograniczenie i stabilizowanie amplitudy drgań z zastosowaniem tranzystora unipolarnego (rys. 2/20). W takim przypadku tranzystor

pracuje w zakresie nienasycenia (triodowym) i spełnia rolę rezystancji R_1 sterowanej napięciem uzależnionym od amplitudy napięcia wyjściowego.

Jak wiadomo, w zakresie nienasycenia prąd drenu i_D można aproksymować zależnością

$$i_D = \beta_s\left[(u_{GS}-U_P)u_{DS}-\frac{u_{DS}^2}{2}\right]; \qquad u_{DS} \leqslant u_{GS}-U_P \tag{2/99}$$

gdzie: β_s — stała, U_P — napięcie odcięcia (dla tranzystora z kanałem typu n: $U_P < 0$).



2/20 Ograniczanie i stabilizacja amplitudy drgań z zastosowaniem tranzystora unipolarnego

W celu uzyskania bardziej liniowej charakterystyki $i_D = f(u_{DS})$ wprowadza się ujemne lokalne sprzężenie zwrotne, realizowane za pomocą dwóch rezystorów R o identycznych rezystancjach.
Wówczas

$$u_{GS} = \frac{1}{2}(u_{DS}+u_{RS}) \tag{2/100}$$

Z podstawienia (2/100) do (2/99) otrzymujemy

$$i_D = \beta_s\left(\frac{u_{RS}}{2}-U_P\right)u_{DS}; \qquad u_{DS} \leqslant u_{RS}-2U_P \tag{2/101}$$

Wynika stąd, że z punktu widzenia zacisków dren-źródło tranzystor przedstawia sobą liniową rezystancję sterowaną napięciem u_{RS}

$$R_1 = \frac{u_{DS}}{i_D} = \frac{1}{\beta_s(u_{RS}/2-U_P)} \tag{2/102}$$

(założyliśmy tutaj: $i_D \gg i_R = (u_{DS}-u_{RS})/(2R)$, co osiąga się stosując odpowiednio duże wartości R, praktycznie $R = 0{,}1\ldots0{,}5$ MΩ).

Napięcie regulacyjne u_{RS} jest uzyskiwane z szeregowego detektora wartości szczytowej (p. 4.2.2)

$$u_{RS} = -\eta U_o \tag{2/103}$$

gdzie $\eta = f(U_o)$ jest sprawnością napięciową detektora (wzór (4/98), rys. 4/20).

Z zależności (2/102) i (2/103) wynika, że rezystancja R_1 rośnie ze wzrostem amplitudy drgań (przypominamy: $U_P < 0$). Dlatego też, postępując jak poprzednio, możemy sformułować równanie

$$\frac{R_2}{R_1(U_o^+)} = \left.\frac{R_2}{R_1}\right|_{\min} \tag{2/104}$$

którego rozwiązanie daje nam amplitudę drgań U_o^+.

Po podstawieniu zależności (2/102), (2/103) i (2/94) do (2/104) dostajemy równanie, którego rozwiązaniem jest

$$U_o^+ = \frac{2}{\eta}\left(-U_P - \frac{1+mn}{m\beta_s R_2}\right) \tag{2/105}$$

(dla uproszczenia przyjęliśmy η = const, co w przybliżeniu zachodzi dla dostatecznie dużych amplitud U_o).

Generator z mostkiem Wiena jest układem dość rozpowszechnionym. Dlatego zajęliśmy się nim bardziej szczegółowo. Spotykane są także inne realizacje układów mostkowych, m.in. układy zawierające w gałęzi dodatniego sprzężenia zwrotnego czwórniki *RC* o strukturach pokazanych na rys. 2/15. Właściwości tych układów są prawie takie same, jak układu z mostkiem Wiena.

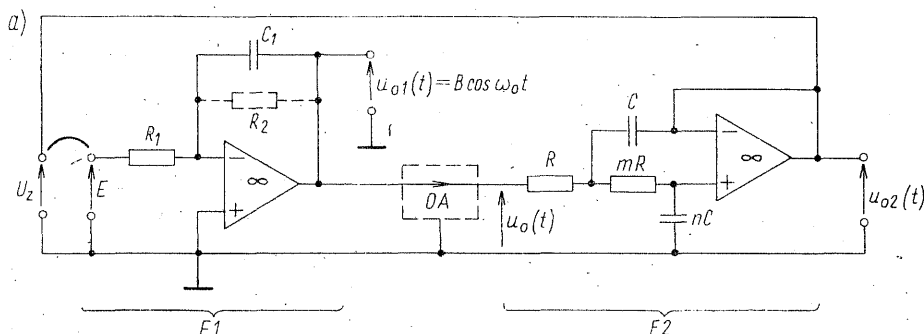
2.5.3 Generatory z zastosowaniem filtrów aktywnych

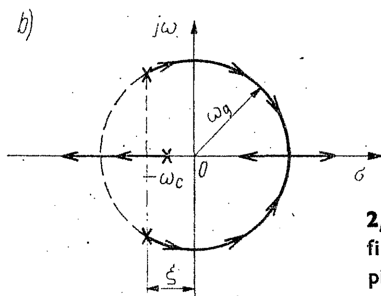
Generatory drgań sinusoidalnych małych i średnich częstotliwości (do ok. 0,1 MHz) są często realizowane przy użyciu aktywnych filtrów *RC*. Możliwości tworzenia układów generacyjnych tą metodą są bardzo duże.

W zasadzie każdy dwubiegunowy filtr aktywny typu środkowoprzepustowego może być przekształcony w generator sinusoidalny przez wprowadzenie lub odpowiednie zwiększenie istniejącego dodatniego sprzężenia zwrotnego. Rzecz sprowadza się do przesunięcia pary zespolonych sprzężonych biegunów filtru z lewej do prawej półpłaszczyzny zmiennej zespolonej s oraz zapewnienia odpowiedniego mechanizmu ograniczania i stabilizacji amplitudy drgań.

Do celów generacji są wykorzystywane także filtry aktywne typu dolnoprzepustowego. Interesujące właściwości wykazują generatory oparte na filtrach realizujących zmienne stanu (filtry typu maszyna analogowa). Te ostatnie układy omówimy w p. 2.5.4.

Na rysunku 2/21a pokazano schemat generatora *RC* (pętla otwarta) zestawionego z kaskadowego połączenia dwóch dolnoprzepustowych filtrów aktywnych pierwszego (filtr F_1) i drugiego (F_2) rzędu.





2/21 Generator z dolnoprzepustowymi filtrami aktywnymi: a) schemat; b) linie pierwiastkowe

Przy założeniu idealnych wzmacniaczy operacyjnych małosygnałowe wzmocnienie pętli

$$A_L = \frac{U_z}{E} = \frac{-1}{R_1 C_1(s+\omega_c)} \frac{\omega_g^2}{s^2+2\xi\omega_g s+\omega_g^2} \tag{2/106}$$

gdzie

$$\omega_c = \frac{1}{R_2 C_1}; \quad \omega_g = \frac{1}{RC\sqrt{mn}} \tag{2/107}$$

są pulsacjami odcięcia filtrów odpowiednio F_1 i F_2, natomiast

$$\xi = \frac{1}{2}(1+m)\sqrt{\frac{n}{m}} \tag{2/108}$$

jest współczynnikiem tłumienia filtru F_2.

Z warunku fazy otrzymujemy pulsację drgań

$$\omega_o^2 = \omega_g^2\left(1+2\xi\frac{\omega_c}{\omega_g}\right) \tag{2/109}$$

Dla zminimalizowania wpływu parametrów filtru F_1 na pulsację drgań sensownie jest zapewnić

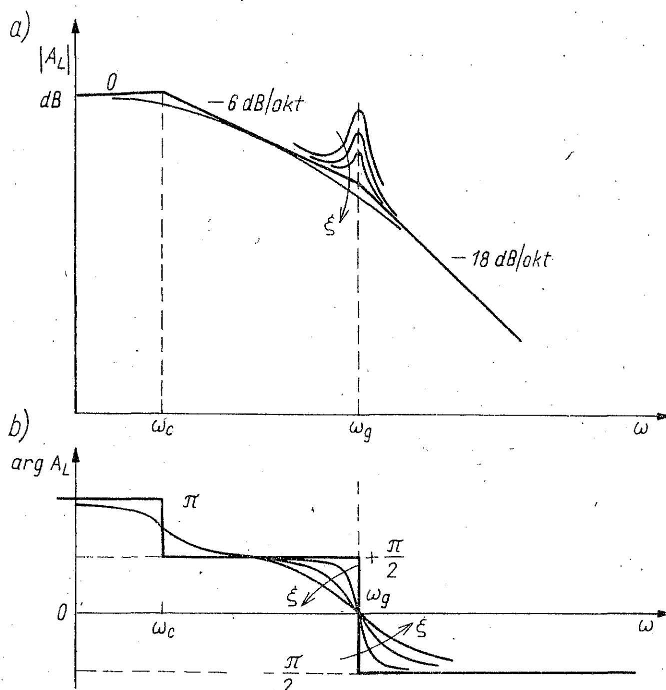
$$\omega_g \gg 2\xi\omega_c \tag{2/110}$$

Przy spełnieniu tego warunku

$$\omega_o = \frac{1}{RC\sqrt{mn}} \tag{2/111}$$

Zauważmy, że nierówność (2/110) oznacza, iż w zakresie pulsacji drgań i powyżej, filtr F_1 może być traktowany jako układ całkujący. (Możliwa jest także realizacja z $R_2 = \infty$, wtedy $\omega_c = 0$).

Wykresy charakterystyk częstotliwościowych wzmocnienia pętli przedstawiono na rys. 2/22.



2/22 Amplitudowe (a) i fazowe (b) charakterystyki wzmocnienia pętli układu z rys. 2/21, przy ξ jako parametrze

Z małosygnałowego warunku amplitudy

$$|A_L(\omega_o)| > A_{L\min} = \frac{RC}{R_1 C_1} \frac{m}{1+m} \tag{2/112}$$

oraz obliczenia określającego dobroć równoważną

$$Q_R = \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{1+m}\sqrt{\frac{m}{n}} \tag{2/113}$$

otrzymujemy informację co do doboru pozostałych parametrów układu. Ostatnie wyrażenie wskazuje na celowość stosowania niedotłumionego ($\xi < 1$) filtru F_2.

Przy okazji zauważmy, że w rozpatrywanym układzie są dostępne dwa wyjścia. Możemy pobierać napięcie $u_{o2}(t) = U_{o2}\sin\omega_o t$ oraz przebieg scałkowany

$$u_{o1}(t) = -\frac{1}{R_1 C_1}\int u_{o2}(t)\mathrm{d}t = \frac{U_{o2}}{R_1 C_1 \omega_o}\cos\omega_o t = B\cos\omega_o t$$

czyli przesunięty w fazie o 90° w stosunku do $u_{o2}(t)$, a jeśli zapewnimy $R_i C_1 \omega_o = 1$, to otrzymamy jednakowe amplitudy obu przebiegów wyjściowych.

Generatory, w których są dostępne dwa przebiegi wyjściowe przesunięte wzajemnie o 90° (lub −90°) są nazywane *generatorami kwadraturowymi.*

W celu uniknięcia nieliniowej pracy wzmacniaczy operacyjnych, co powodowałoby duże zniekształcenia nieliniowe generowanych przebiegów[1], należy ograniczyć amplitudę drgań za pomocą dodatkowego obwodu nieliniowego. Takim nieliniowym obwodem może być symetryczny ogranicznik amplitudy *OA*, np. wprowadzony do układu w sposób pokazany linią przerywaną na rys. 2/21a.

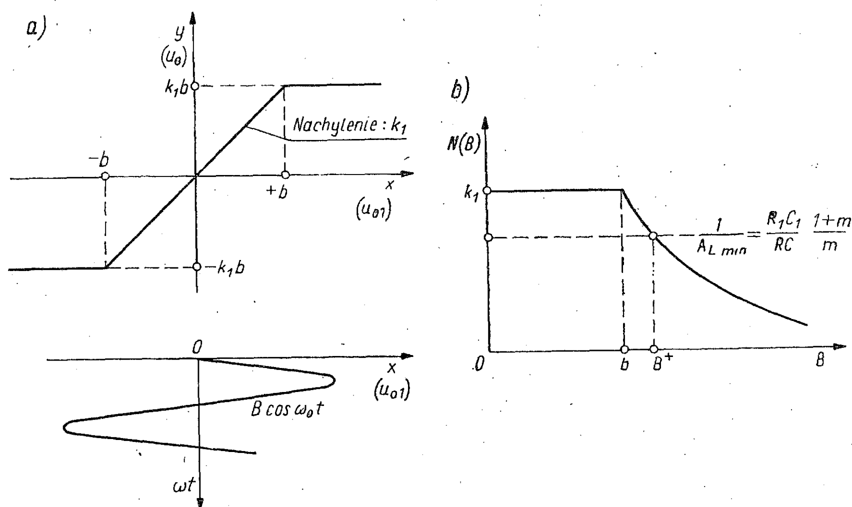
Jeśli ogranicznik jest bezinercyjny (rozwiązanie zalecane), to amplitudę drgań B^+ możemy wyznaczyć rozwiązując równanie

$$N(B^+) = \frac{1}{A_{L\,\min}} \tag{2/114}$$

gdzie $N(B)$ jest funkcją opisującą ogranicznika, zaś $A_{L\min}$ — wartością określoną wzorem (2/112).

Układy ograniczników omówiono w p. 1.6.1. Wyznaczaniu funkcji opisującej dla układów nieliniowych o symetrycznych charakterystykach przejściowych typu $y = f(x)$ poświęcono dodatek D4.

Wobec tego dalsze rozważania zawężimy do rozpatrzenia jedynie najprostszego przypadku, gdy ogranicznik jest idealny, ma charakterystykę pokazaną na rys. 2/23a i jest pobudzany przebiegiem napięciowym $x(t) = u_{o1}(t) = B\cos\omega_o t$



2/23 Idealny ogranicznik symetryczny: a) charakterystyka przejściowa; b) wykres funkcji opisującej

[1] Główną przyczyną jest tzw. *czas przeciągania* (in. *czas martwy*), oznaczający czas potrzebny do powrotu układu na granicę stanu aktywnego po przesterowaniu dużym sygnałem.

(rys. 2/21). Przy tych założeniach, zgodnie z wyrażeniem ogólnym (D4/6), wyprowadzonym w dodatku D4, funkcja opisująca ma postać

$$N(B) = \begin{cases} k_1 & \text{dla } B \leqslant b \\ \frac{2}{\pi}k_1\left[\arcsin\frac{b}{B}+\frac{b}{B}\sqrt{1-\left(\frac{b}{B}\right)^2}\right] & \text{dla } B > b \end{cases} \tag{2/115}$$

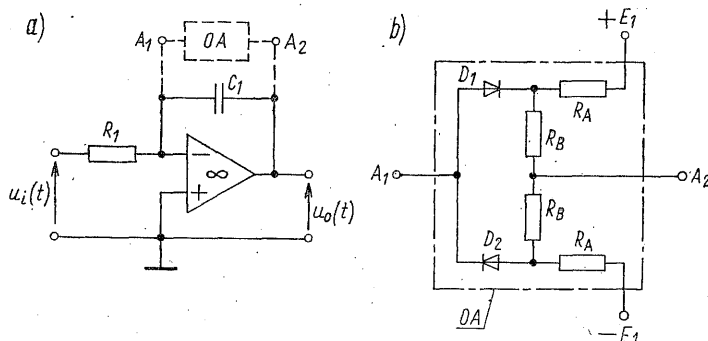
Wykres funkcji (2/115) naszkicowano na rys. 2/23b, pokazując jednocześnie graficzne rozwiązanie równania (2/114), dające amplitudę drgań B^+.

W rozwiązaniach praktycznych, gdzie zależy nam na małych zniekształceniach nieliniowych, na ogół zapewniamy $k_1 \approx 1/A_{L\min}$. W takich przypadkach można w pierwszym przybliżeniu przyjąć, że amplituda drgań przybiera wartość równą wartości progowej ogranicznika, tzn. $B^+ \approx b$.

Filtry dolnoprzepustowe wprowadzają dość skuteczne tłumienie harmonicznych pojawiających się na wyjściu ogranicznika. Oznaczając przez h_k, h_{k1}, h_{k2} zawartość k-tej harmonicznej napięcia odpowiednio $u_o(t)$, $u_{o1}(t)$, $u_{o2}(t)$, możemy napisać, że

$$h_{k2} = \frac{2\xi}{\sqrt{(1-k^2)^2+(2\xi k)^2}}h_k \underset{\xi\leqslant 1}{<} \frac{2\xi}{k^2}h_k$$

$$h_{k1} = \frac{1}{k}h_{k2}$$



2/24 Integrator z symetrycznym ogranicznikiem amplitudy: a) schemat ogólny; b) typowe rozwiązanie obwodu OA (E_1 — napięcie zasilające wzmacniacz operacyjny)

Ograniczenie amplitudy drgań można także uzyskać, wprowadzając ogranicznik napięcia do obwodu wzmacniacza operacyjnego pracującego jako integrator, np. w sposób pokazany na rys. 2/24. Wówczas z chwilą załączenia diod D_1, D_2 napięcie wyjściowe $u_o(t)$ układu zostaje ograniczone do poziomu

$$U_{O\max} = -U_{O\min} = \frac{R_B}{R_A}E_1 \tag{2/116}$$

(przyjęto diody idealne, patrz także p. 1.6.1).

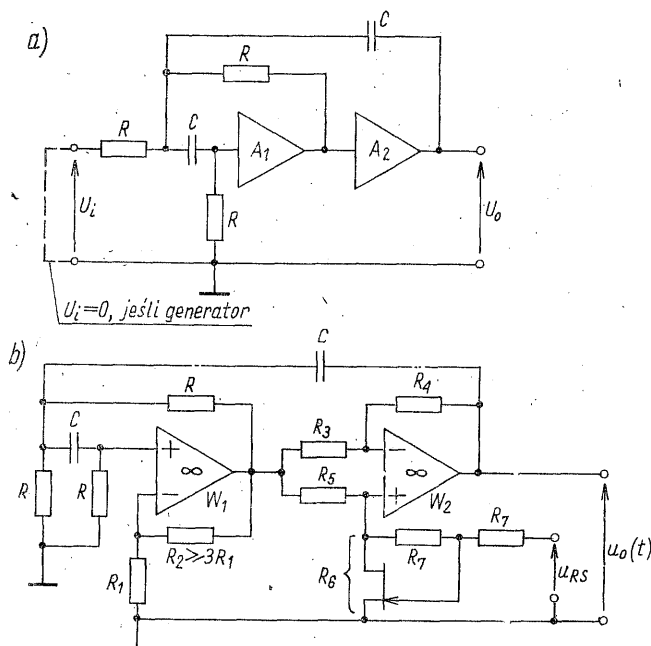
Tytułem przykładu ilustrującego przekształcenie środkowoprzepustowego

filtru aktywnego w generator drgań sinusoidalnych, rozpatrzmy filtr z rys. 2/25a, którego funkcja przenoszenia jest postaci

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{A_1 A_2}{RC} \frac{s}{M(s)} \tag{2/117a}$$

gdzie

$$M(s) = s^2 + \frac{4-A_1}{(1-A_1 A_2)RC} s + \frac{2}{(1-A_1 A_2)(RC)^2} \tag{2/117b}$$



2/25 Przykład przekształcenia środkowoprzepustowego filtru aktywnego *RC* w układ generacyjny: a) filtr Kerwina o minimalnej liczbie pojemności; b) generator z możliwością elektronicznego przestrajania częstotliwości

Na podstawie równania charakterystycznego układu, $M(s) = 0$, możemy warunek amplitudy i fazy zapisać następująco:

$$A_1 > A_{1\min} = 4 \tag{2/118}$$

$$\omega_o = \frac{1}{RC}\sqrt{\frac{2}{1-A_{1\min}A_2}} = \frac{1}{RC}\sqrt{\frac{2}{1-4A_2}} \tag{2/119}$$

Jak widać, pulsacja drgań może być tutaj regulowana za pomocą zmiany wzmocnienia A_2 drugiego wzmacniacza ($A_2 < 0$). Co istotniejsze, regulacja ta nie ma wpływu na graniczny warunek amplitudy.

Realizując generator przy użyciu wzmacniaczy operacyjnych (rys. 2/25b), mamy

$$A_1 = 1+\frac{R_2}{R_1}$$

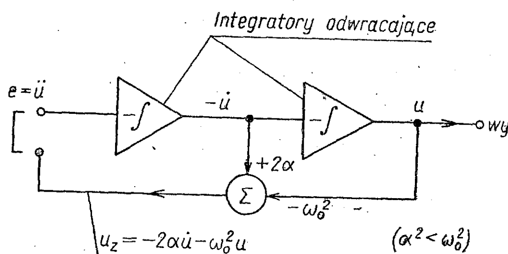
$$A_2 = -\frac{1}{R_3}\left(\frac{R_4R_5-R_3R_6}{R_3+R_6}\right)$$

Amplitudę drgań możemy zatem stabilizować przez wprowadzenie automatycznej regulacji wzmocnienia A_1, np. w sposób pokazany na rys. 2/20 (sterowana rezystancja R_1). Natomiast pulsację drgań możemy regulować elektronicznie za pomocą tranzystora unipolarnego, pracującego jako rezystancja R_6 sterowana napięciem u_{RS}.

Postępując podobnie możemy przekształcić każdy środkowoprzepustowy filtr aktywny drugiego rzędu w generator sinusoidalny.

2.5.4 Generatory programowane

Nieco odmienną grupę generatorów *RC* stanowią *generatory programowane*, nazywane również generatorami typu *maszyna analogowa* bądź też *generatorami realizującymi zmienne stanu*. Zasadę działania takich układów przedstawiono na rys. 2/26. Napięcie wejściowe $e(t)$ jest dwukrotnie całkowane w oddzielnych



2/26 Schemat funkcjonalny generatora programowanego

integratorach, których przebiegi wyjściowe, po zsumowaniu z odpowiednimi współczynnikami wagowymi, tworzą sygnał zwrotny $u_z(t)$. Po zamknięciu pętli mamy

$$\ddot{u}+2\alpha\dot{u}+\omega_0^2u = 0 \tag{2/120a}$$

lub

$$s^2U(s)+2\alpha sU(s)+\omega_0^2U(s) = 0 \tag{2/120b}$$

gdzie $\ddot{u}$ i $\dot{u}$ oznacza odpowiednio drugą lub pierwszą pochodną napięcia wyjściowego u względem czasu.

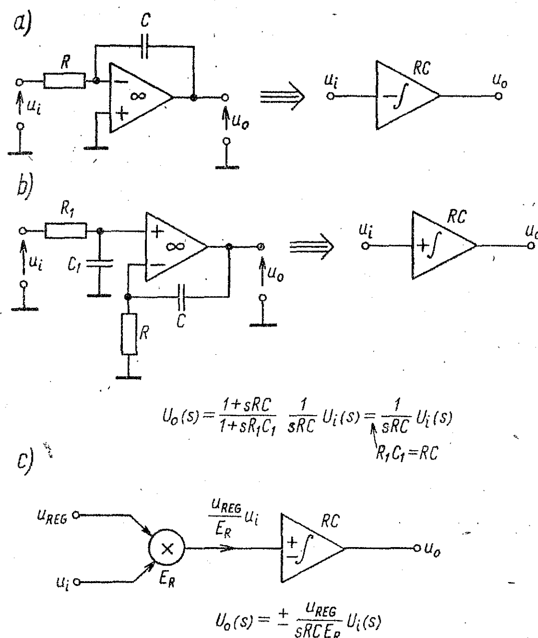
Możemy zatem powiedzieć, że rozpatrywany układ jest prostą maszyną analogową zaprogramowaną do rozwiązania równania drgań okresowych o postaci (2/120).

Równanie (2/120) ma rozwiązanie

$$u(t) = Ue^{-\alpha t}\sin\left(\sqrt{\omega_o^2-\alpha^2}\, t\right) \tag{2/121}$$

należy więc zapewnić $\alpha < 0$ oraz odpowiedni nieliniowy mechanizm ograniczania i stabilizacji amplitudy drgań.

Operacje całkowania i sumowania są wykonywane przy użyciu wzmacniaczy operacyjnych. Mogą tu być zastosowane integratory odwracające znak, tak jak to przyjęto w schemacie blokowym z rys. 2/26 (rozwiązanie najprostsze — rys. 2/27a), lub integratory nieodwracające (rys. 2/27b) bądź też integratory o stałej czasowej regulowanej elektronicznie (rys. 2/27c).



2/27 Przykłady integratorów oraz ich oznaczenia schematowe: a) odwracający; b) nieodwracający ($RC = R_1C_1$); c) o stałej czasowej regulowanej napięciem u_{REG}

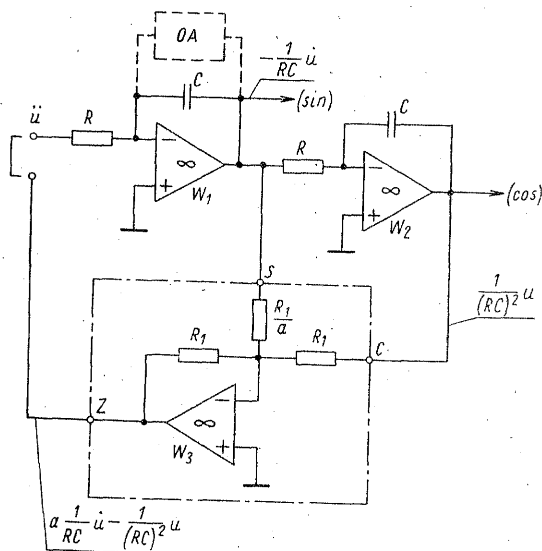
Rozpatrzmy tytułem przykładu generator z rys. 2/28. Analizując układ widzimy, że

$$\alpha = -\frac{a}{2RC} < 0; \qquad \omega_o = \frac{1}{RC} \tag{2/122}$$

Narastające w tym układzie drgania mogą być ograniczone przez wprowadzenie ogranicznika amplitudy OA, co zaznaczono linią przerywaną (patrz także rys. 2/24).

Zauważmy, że w generatorach programowanych zawsze są dostępne dwa przebiegi wyjściowe typu sin/cos (wyjścia integratorów). Są to więc generatory kwadraturowe. W układzie z rys. 2/28 przebieg z wyjścia cos charakteryzuje się

mniejszymi zniekształceniami nieliniowymi aniżeli przebieg sin, gdyż pojawiające się na wyjściu ogranicznika k-te harmoniczne napięciowe są k-krotnie tłumione przez integrator W_2.



2/28 Generator programowany z integratorami odwracającymi

Inny sposób stabilizacji amplitudy drgań polega na zastąpieniu sumatora W_3 z rys. 2/28 układem o schemacie funkcjonalnym przedstawionym na rys. 2/29a. W układzie tym występuje człon nieliniowy realizujący charakterystykę symetryczną o zmiennym co do znaku nachyleniu, pokazaną na rys. 2/29b. Funkcję opisującą tego rodzaju nieliniowości wyznaczono w dodatku D4, wzór (D4/12)

$$N(B) = \begin{cases} k_1 & \text{dla } B \leqslant b_1 \\ k_2 + \dfrac{2(k_1-k_2)}{\pi}\left[\arcsin\dfrac{b_1}{B} + \dfrac{b_1}{B}\sqrt{1-\left(\dfrac{b_1}{B}\right)^2}\right] & \text{dla } B > b_1 \end{cases} \tag{2/123}$$

Wykres funkcji (2/123) pokazano na rys. 2/29c.

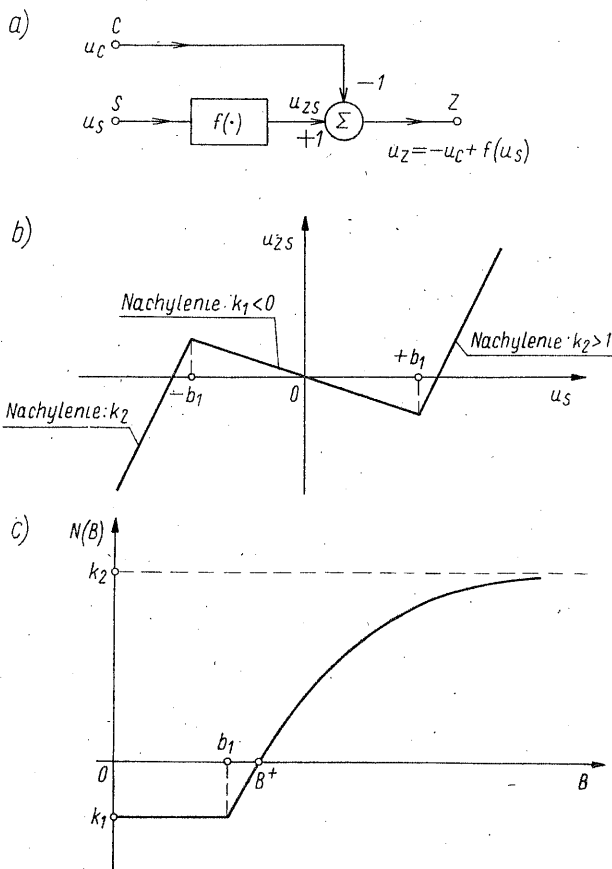
Wielkosygnałowe wzmocnienie pętli generatora z tego rodzaju układem stabilizacji można wyznaczyć jako

$$A_L(B, s) = -\left[N(B) + \frac{1}{sRC}\right]\frac{1}{sRC} \tag{2/124}$$

Stąd równanie charakterystyczne (ze związku: $1-A_L(B, s) = 0$) jest postaci

$$s^2 + \frac{N(B)}{RC}s + \frac{1}{(RC)^2} = 0 \tag{2/125}$$

Widzimy więc, że dla $N(B) < 0$ otrzymujemy drgania odtłumione, dla $N(B) >$ > 0 — drgania tłumione. Mamy zatem zapewniony właściwy mechanizm pow-



2/29 Układ stabilizacji amplitudy drgań generatora programowanego: a) schemat funkcjonalny; b) charakterystyka członu nieliniowego; c) wykres funkcji opisującej

stawania i podtrzymywania drgań. Amplitudę drgań wyznaczymy, rozwiązując równanie

$$N(B^+) = 0 \tag{2/126}$$

Zwykle stosuje się: $|k_1| \ll 1$, $k_2 > 1$, a w takim przypadku można w pierwszym przybliżeniu przyjąć $B^+ \approx b_1$.

Schemat ideowy układu stabilizacji amplitudy pokazano na rys. 2/30a. Zastosowano tu symetryczną podwójną diodę Zenera (rys. 2/30b), co daje wartość progową charakterystyki $u_{ZS} = f(u_S)$ równą

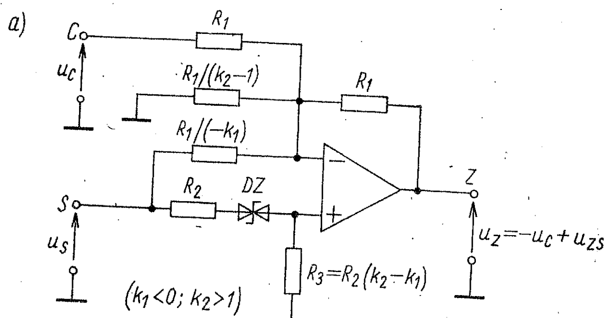
$$b_1 = U_Z + U_D \tag{2/127}$$

gdzie U_Z jest napięciem Zenera. Wartość rezystancji R_2 należy dobrać tak, aby $R_2 \gg r_d + r_z$.

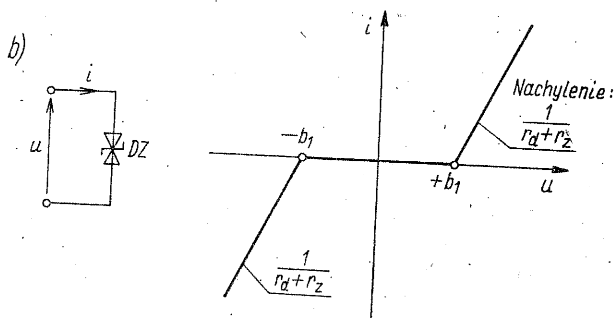
Układ działa następująco. Przy małych wartościach napięcia sterującego wejście S, $|u_S| \leqslant b_1$, diody nie przewodzą, rezystor R_2 jest odłączony, wzmacniacz pracuje jako konwencjonalny sumator odwracający

$$u_Z = -u_C + k_1 u_S; \quad k_1 < 0$$

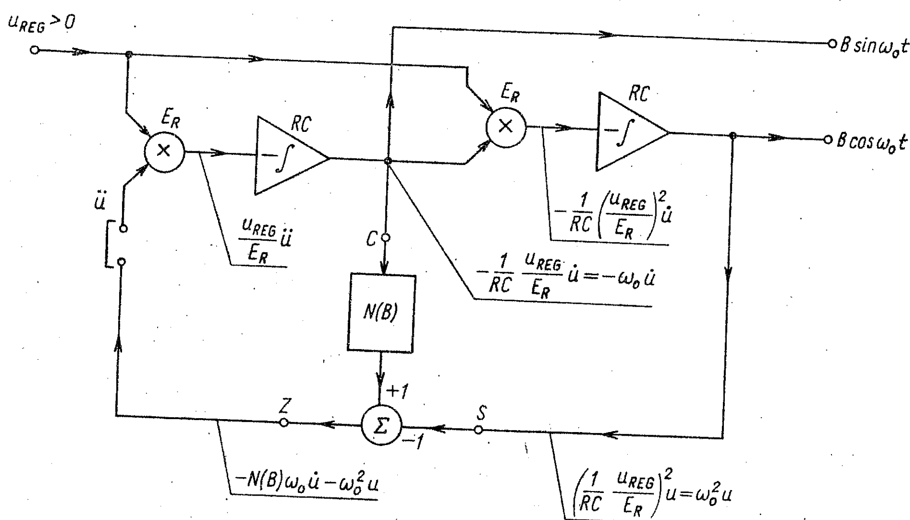
a)



b)



2/30 Przykład realizacji układu o schemacie funkcjonalnym z rys. 2/29a: a) schemat ideowy: b) charakterystyka podwójnej diody Zenera



2/31 Model generatora o częstotliwości przestrajanej napięciem, uzyskany w wyniku zastosowania metody funkcji opisującej

Z chwilą włączenia diod sygnał u_S włączany jest również na nieodwracające wejście wzmacniacza. Wzmacniacz realizuje więc operację

$$u_Z = -u_C+k_1 u_S+\frac{R_3}{R_2} u_S = -u_C+k_2 u_S$$

Dioda Zenera może być oczywiście zastąpiona odpowiednim zestawem szybszych diod półprzewodnikowych.

Ten sposób stabilizacji amplitudy drgań jest korzystny zwłaszcza w przypadku, gdy generator ma być przestrajany elektronicznie; regulacja częstotliwości ma wówczas mały wpływ na amplitudę drgań (co zresztą zależy od zakresu i szybkości przestrajania), występują niewielkie zniekształcenia nieliniowe.

Schemat funkcjonalny generatora programowanego o częstotliwości sterowanej napięciem u_{REG} pokazano na rys. 2/31. W wyniku zastąpienia integratorów odwracających integratorami sterowanymi (rys. 2/27c) równanie charakterystyczne (2/125) modyfikuje się do postaci

$$s^2+N(B)\omega_o s+\omega_o^2 = 0 \qquad (2/128)$$

gdzie

$$\omega_o = \frac{1}{RC}\frac{u_{REG}}{E_R} \qquad (2/129)$$

jest pulsacją drgań.

Istotną zaletą układu jest liniowa zależność pulsacji drgań od napięcia regulacyjnego u_{REG}, co może być m.in. wykorzystane do generacji sygnałów *FM* (rozdz. 5).

2.6 PRZYKŁADY SPRZĘŻENIOWYCH GENERATORÓW *LC*

Generatorami tego rodzaju nazywamy układy, w których czwórnik sprzężenia zwrotnego jest zrealizowany za pomocą celowo wprowadzonych elementów *L* i *C*.

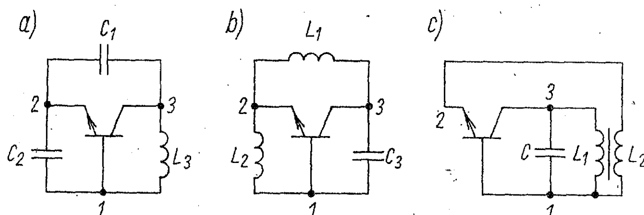
Przy zastosowaniu elementów *L*, *C* o małych stratach oraz poprawnym zaprojektowaniu układu uzyskuje się dostatecznie duże wartości współczynnika S_F (lub wynikowej dobroci Q_T czwórnika), co pozwala wykorzystać nieliniowość wzmacniacza do ograniczania i stabilizacji amplitudy drgań. Układy takie nazywamy generatorami z samoograniczaniem amplitudy. W większości przypadków praktycznych generatory *LC* są tak właśnie rozwiązywane.

2.6.1 Układy podstawowe

Uproszczone schematy podstawowych generatorów *LC* pokazano na rys. 2/32. Przyjęto, że elementem aktywnym jest tranzystor bipolarny. Rolę tę może spełniać również tranzystor unipolarny lub lampa elektronowa. Charakterystyczną

cechą układów podstawowych jest bowiem zastosowanie pojedynczego elementu aktywnego jako wzmacniacza.

W przedstawionych układach, nazywanych niekiedy *układami trójwęzłowymi* (*trójpunktowymi*) można uziemić węzeł *1* (elektroda sterująca: baza, bramka, siatka) lub węzeł *2* (elektroda emitująca: emiter, źródło, katoda), zapewniając tym samym pracę elementu aktywnego w wybranej konfiguracji. Mówi się wówczas o generatorze pracującym w konfiguracji: wspólna baza, wspólna bramka, itd.



2/32 Uproszczone schematy podstawowych generatorów *LC*: a) układ Colpittsa (inaczej: z dzieloną pojemnością, ze sprzężeniem indukcyjnym); b) układ Hartleya (z dzieloną indukcyjnością, ze sprzężeniem pojemnościowym); c) układ Meissnera (ze sprzężeniem transformatorowym)

Pokazane na rys. 2/32 schematy należy uzupełnić o obwody zasilania i stabilizacji spoczynkowego punktu pracy elementu aktywnego. Obwody te są projektowane wg ogólnie przyjętych zasad, stosowanych dla wzmacniaczy liniowych. Schematy powinny uwzględniać także rezystancję reprezentującą obciążenie generatora.

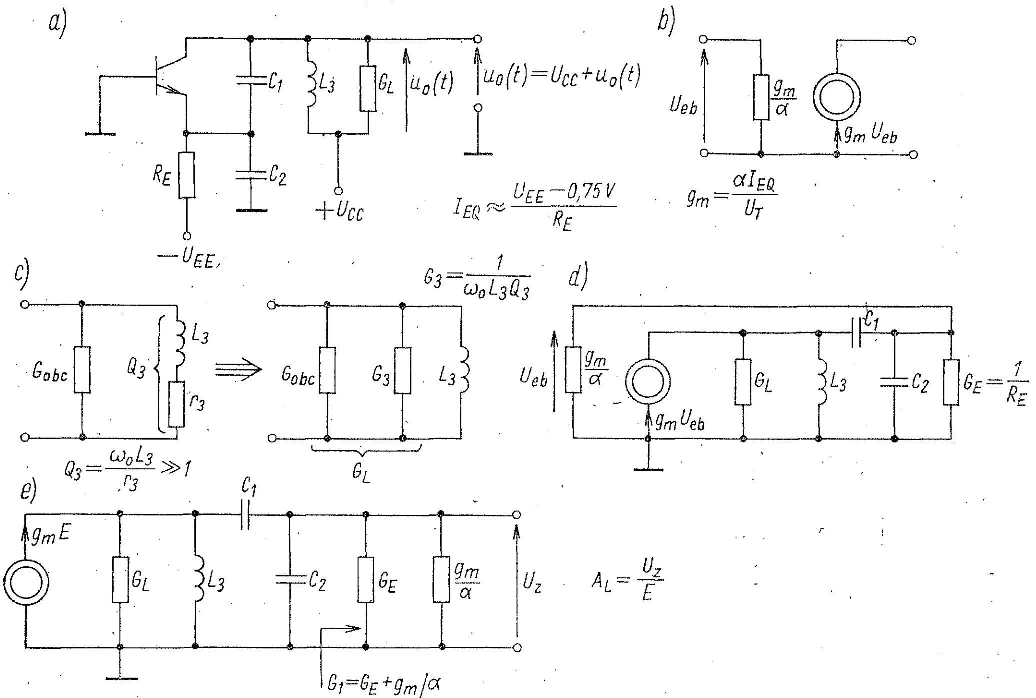
Istnieje więc dużo różnorodnych struktur i rozwiązań układów generatorów: różne struktury czwórników sprzęgających, tranzystorowe i lampowe, pracujące w wybranej konfiguracji, o różnym sposobie zasilania elementu aktywnego.

Tytułem przykładu rozpatrzmy praktyczny układ generatora o schemacie pokazanym na rys. 2/33a. Widzimy, że jest to układ Colpittsa, pracujący w konfiguracji wspólna baza, z zasilaniem dwubateryjnym. G_L jest konduktancją obciążenia. Rezystor R_E wprowadza ujemne stałoprądowe sprzężenie zwrotne, stabilizujące punkt pracy tranzystora. Spoczynkowy prąd emitera I_{EQ} oraz małosygnałową transkonduktancję g_m tranzystora możemy więc wyznaczyć z zależności

$$I_{EQ} = \frac{U_{EE} - U_{BEQ}}{R_E} \approx \frac{U_{EE} - 0{,}75\ \mathrm{V}}{R_E} \tag{2/130}$$

$$g_m = \left.\frac{\mathrm{d}i_C}{\mathrm{d}u_{BE}}\right|_{u_{BE}=U_{BEQ}} = \frac{\alpha I_{EQ}}{U_T} \tag{2/131}$$

Przyjmijmy, że w zakresie rozpatrywanych częstotliwości tranzystor może być traktowany jako unilateralny element bezinercyjny o małosygnałowym



2/33 Generator w układzie Colpittsa: a) schemat ideowy; b) małosygnałowy model tranzystora; c) uwzględnienie strat cewki L_3; d) małosygnałowy model generatora; e) schemat dla wyznaczenia wzmocnienia pętli $A_L = U_z/E$

modelu zastępczym przedstawionym na rys. 2/33b. Założymy dodatkowo, że kondensatory C_1 i C_2 są bezstratne. Stratność cewki L_3 o dużej dobroci Q_3 będziemy reprezentować konduktancją G_3, wliczoną do konduktancji obciążenia (rys. 2/33c)

$$G_L = G_{obc}+G_3 = G_{obc}+\frac{1}{\omega_o L_3 Q_3}; \quad (Q_3 \gg 1) \tag{2/132}$$

Przy tych założeniach otrzymujemy małosygnałowy model zastępczy generatora pokazany na rys. 2/33d (pętla zamknięta) lub na rys. 2/33e (pętla otwarta).

Małosygnałowe wzmocnienie pętli

$$A_L(s) = \frac{U_z(s)}{E(s)} = \frac{s^2 g_m L_3}{s^3 L_3 C_w + s^2 L_3(G_L+C_w\omega_2)+s(L_3 G_L \omega_1+1)+\omega_1} \tag{2/133}$$

gdzie

$$C_w = \frac{C_1 C_2}{C_1+C_2} \tag{2/134}$$

$$\omega_1 = \frac{G_1}{C_1+C_2} \tag{2/135a}$$

$$\omega_2 = \frac{G_1}{C_2} = \left(1+\frac{C_1}{C_2}\right)\omega_1 \tag{2/135b}$$

$$G_1 = G_E + \frac{g_m}{\alpha} \tag{2/136}$$

Z warunku fazy otrzymujemy pulsację drgań ω_o'

$$(\omega_o')^2 = \omega_o^2(1+L_3G_1\omega_1) = \omega_o^2\left[1+\frac{1}{Q_E}\left(\frac{1}{Q_T}-\frac{1}{Q_T'}\right)\right] \tag{2/137}$$

przy czym

$$Q_E = \frac{\omega_o}{\omega_1} = \frac{\omega_o(C_1+C_2)}{G_1} \tag{2/138}$$

$$Q_T = \frac{\omega_o C_w}{G_L+n^2G_1} \tag{2/139}$$

$$Q_T' = \frac{\omega_o C_w}{n^2G_1} \tag{2/140}$$

$$n = \frac{C_1}{C_1+C_2} \tag{2/141}$$

Jak widać, pulsacja drgań różni się od pulsacji rezonansowej ω_o bezstratnego obwodu o elementach C_1, C_2 i L_3.

Wpływ strat elementów liniowych na częstotliwość drgań określa zależność

$$\frac{\omega_o'-\omega_o}{\omega_o} \approx \frac{1}{2Q_E}\left(\frac{1}{Q_T}-\frac{1}{Q_T'}\right) \tag{2/142}$$

Zauważmy, że zmiany konduktancji obciążenia powodują zmiany częstotliwości. Przewidując, że obciążenie nie będzie stałe, należy je odpowiednio odseparować od obwodów generatora, np. za pomocą wtórnika. Także zmiany stratności cewki L_3 (lub innych elementów obwodu), zachodzące przy zmianie temperatury, będą miały wpływ na niestałość częstotliwości.

Na podstawie (2/133) warunek amplitudy możemy zapisać w postaci

$$g_m > g_{m\min} = G_L + C_w\omega_2 - \frac{1}{(\omega_o')^2L_3}$$

Jest to jednak wyrażenie mało przejrzyste, gdyż pulsacje ω_1, ω_2 i ω_o' są także zależne od transkonduktancji g_m.

Ponieważ ze względu na stałość częstotliwości zapewniamy dużą wynikową dobroć obwodu drgań, do wyznaczenia warunków amplitudowych możemy posłużyć się uproszczonym, prawie równoważnym w wąskim otoczeniu pulsacji rezonansowej ω_o, modelem zastępczym generatora, pokazanym na rys. 2/34b.

Warunki stosowalności modelu uproszczonego są następujące:

$$Q_T > 10, \quad nQ_T'Q_E > 100, \quad Q_E > 10 \tag{2/143}$$

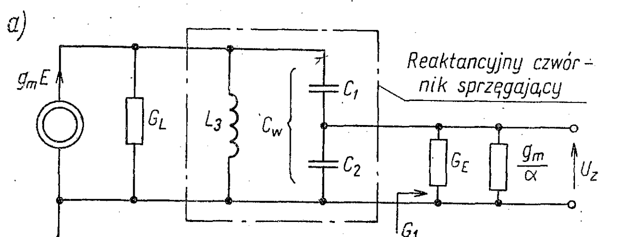
Przy ich spełnieniu reaktancyjny czwórnik sprzęgający (wydzielony na rys. 2/34a linią przerywaną) można traktować jako układ rezonansowy z idealnym

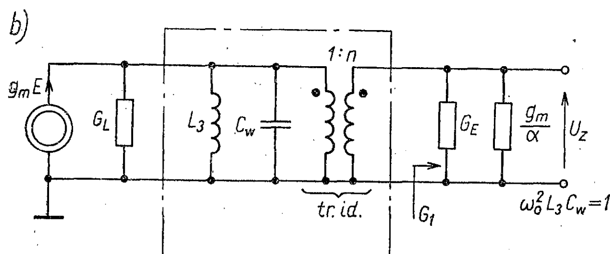
transformatorem (rys. 2/34b), zaś wielkościom opisującym obwód drgań nadać następującą interpretację:

$$Q_T = \frac{\omega_o C_w}{G_L + n^2 G_1} \text{ — dobroć obwodu obciążonego obustronnie;}$$

$$Q'_T = \frac{\omega_o C_w}{n^2 G_1} \text{ — dobroć obwodu obciążonego jednostronnie;}$$

$$n = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \text{ — przekładnia napięciowa idealnego transformatora.}$$





2/34 Równoważne przekształcenie generatora Colpittsa w układzie wspólna baza

Co się zaś tyczy wielkości Q_E, to jest ona związana z warunkiem nakładanym na pulsację odcięcia ω_1 górnoprzepustowego czwórnika z rys. 2/35a, którego transmitancja napięciowa ma postać

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{sC_1}{s(C_1+C_2)+G_1} = n\frac{s}{s+\omega_1}$$

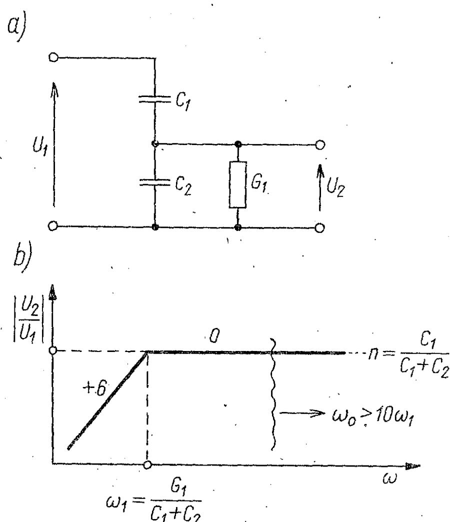
Przy spełnieniu warunku

$$Q_E = \frac{\omega_o}{\omega_1} = \frac{\omega_o(C_1+C_2)}{G_1} > 10$$

można więc transmitancję tę uważać za niezależną od częstotliwości o wartości równej przekładni napięciowej n (rys. 2/35b).

Operując uproszczonym modelem generatora (rys. 2/34), dostajemy

$$A_L(s) = \frac{ng_m}{G_L + n^2 G_1 + sC_w + 1/(sL_3)} \tag{2/144}$$



2/35 Wyodrębniony z obwodu generatora Colpittsa czwórnik typu górnoprzepustowego: a) schemat; b) częstotliwościowa charakterystyka amplitudowa

Wobec tego małosygnałowy warunek amplitudy możemy zapisać jako

$$g_m > g_{m\min} = \frac{G_L+n^2G_E}{n(1-n/\alpha)} \tag{2/145}$$

Przystąpmy teraz do obliczenia amplitudy drgań. W dodatku D2 mamy m.in. wyznaczoną wielkosygnałową transkonduktancję G_m (funkcja opisująca) interesującego nas tutaj układu (wzór (D2/20))

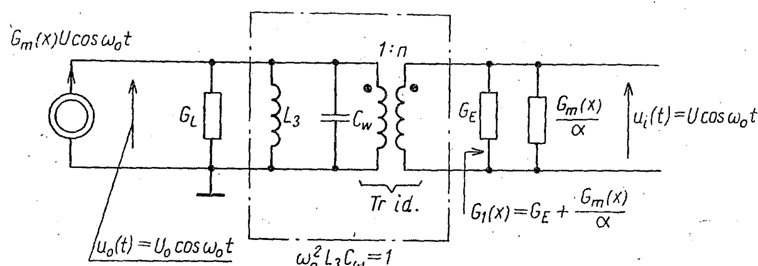
$$G_m(x) = g_m\left(1+\frac{\ln I_0(x)}{X_R}\right)\frac{2I_1(x)}{xI_0(x)} \tag{2/146}$$

gdzie:

$x = U/U_T$ — unormowana amplituda pobudzenia;

$I_0(x), I_1(x)$ — zmodyfikowane funkcje Bessela;

$X_R = I_{EQ}R_E/U_T$ — unormowany spadek napięcia spoczynkowego na rezystancji R_E (dla rozpatrywanego tutaj przypadku, zaś ogólnie — na rezystancjach zastępczych układu zasilania).



2/36 Wielkosygnałowy model generatora *LC* uzyskany w wyniku zastosowania metody funkcji opisującej

Przyjmując, że pasywny obwód drgań o dużej dobroci Q_T skutecznie tłumi wyższe harmoniczne napięciowe, możemy do wyznaczenia amplitudy drgań posłużyć się obwodem pokazanym na rys. 2/36. Amplitudę wyznaczymy rozwiązując równanie

$$G_m(x^+) = g_{m\min} = \frac{G_L + n^2 G_E}{n(1-n/\alpha)} \tag{2/147}$$

Znając $x^+ = U^+/U_T$, amplitudę napięcia wyjściowego $u_o(t)$ określimy ze wzoru

$$U_o^+ = \frac{U^+}{n} \tag{2/147a}$$

Ponieważ w układach generacyjnych napięcie zwrotne jest z reguły znacznie mniejsze od napięcia wyjściowego, tzn. $U^+ \ll U_o^+$, czyli $n \ll 1$, przeto w pierwszym przybliżeniu można przyjąć, że

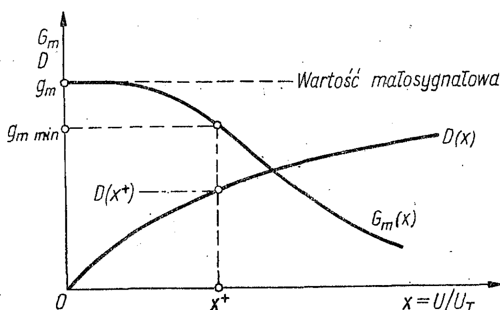
$$G_m(x^+) \approx G_L/n \tag{2/148}$$

Zwróćmy uwagę na to, że przedstawione w D2 wyniki pozwalają także oszacować współczynnik zawartości harmonicznych h napięcia wyjściowego (wzór (D2/24))

$$h \approx \frac{1}{Q_T} D(x) \tag{2/149}$$

gdzie $D(x)$ jest funkcją pomocniczą, zdefiniowaną wzorem (D2/25).

Graficzny sposób wyznaczania amplitudy drgań oraz współczynnika zawartości harmonicznych zilustrowano na rys. 2/37.

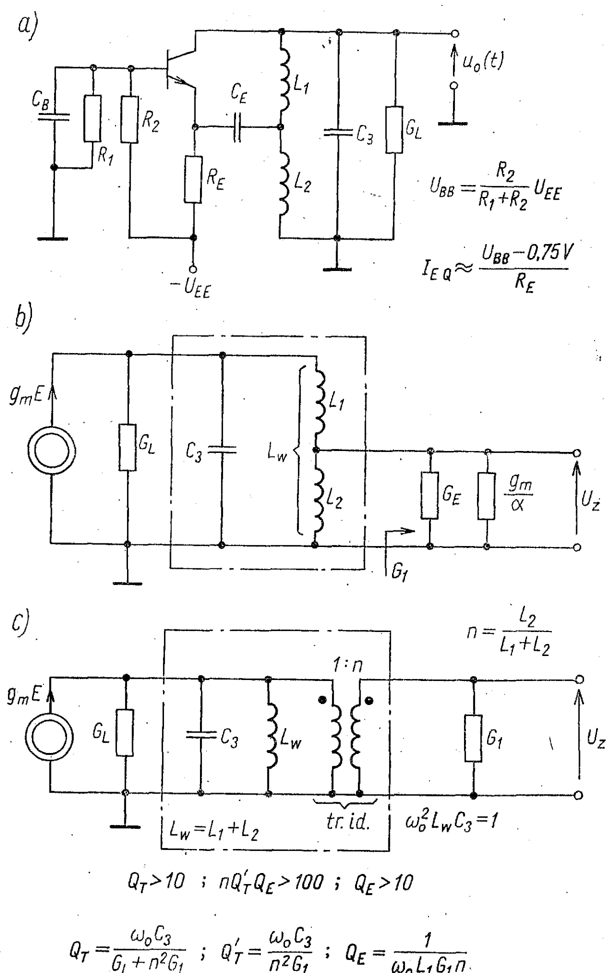


2/37 Graficzny sposób wyznaczania amplitudy drgań oraz współczynnika zawartości harmonicznych

Zajęliśmy się powyżej dość szczegółową analizą generatora Colpittsa w układzie wspólna baza, nie tylko dlatego, że jest to rozwiązanie często stosowane w praktyce (najprostsza struktura, szerokopasmowa konfiguracja wzmacniacza, możliwość zastosowania prostego obwodu zasilania, najmniejszy wpływ harmonicznych na częstotliwość drgań), ale również z tej przyczyny, że w wyniku podobnego sposobu postępowania można zbadać właściwości wielu innych (nie tylko podstawowych, patrz p. 2.6.2) układów generacyjnych.

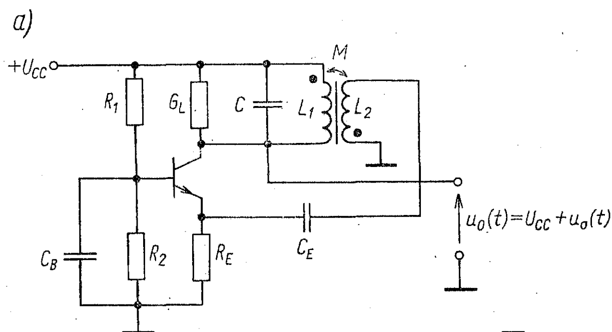
Chodzi tu zwłaszcza o możliwość zastosowania ujednoliconego, stosunkowo prostego podejścia do wyznaczania amplitudy drgań oraz współczynnika zawartości harmonicznych.

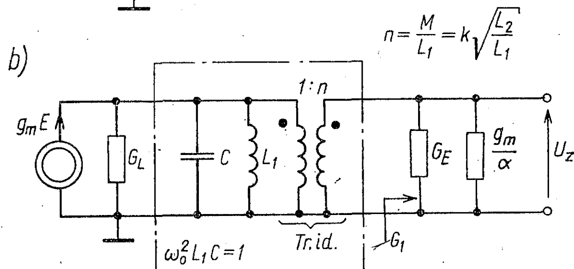
Dla przykładu, na rys. 2/38a i 2/39a pokazano schematy ideowe generatorów innych typów. Przyjęto zasilanie jednobateryjne. Przy założeniu, że pojemności blokująca C_B i sprzęgająca C_E stanowią zwarcie w zakresie rozpatrywanych częstotliwości, generatory te możemy reprezentować modelami zmiennoprądowymi pokazanymi na rys. 2/38b i rys. 2/39b. Mamy więc tu ponownie do czy-



2/38 Generator Hartleya: a) schemat ideowy; b) dwa równoważne modele małosygnałowe

nienia z rezonansowymi czwórnikami sprzęgającymi, typu układu z rys. 2/34b, tylko o innych parametrach. W tej sytuacji amplitudę drgań oraz współczynnik zawartości harmonicznych możemy wyznaczyć, stosując procedurę omówioną poprzednio (wzór wyjściowy: (2/144), wzory końcowe: (2/147a), (2/149)).





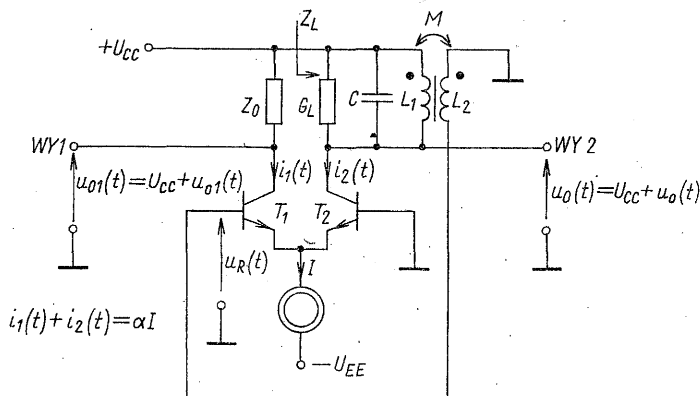
$$Q_T > 10;\quad k^2 Q_T' Q_E > 100;\quad Q_E > 10$$

$$Q_T = \frac{\omega_0 C}{G_L + n^2 G_1};\quad Q_T' = \frac{\omega_0 C}{n^2 G_1};\quad Q_E = \frac{1}{\omega_0 L_2 (1-k^2) G_1}$$

2/39 Generator Meissnera: a) schemat ideowy; b) model małosygnałowy

2.6.2 Generator z parą różnicową

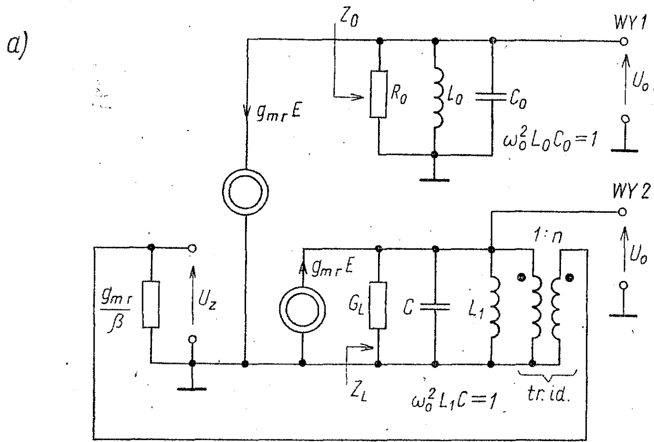
W generatorach o schematach pokazanych na rys. 2/32 rolę elementu aktywnego może spełniać para różnicowa tranzystorów bipolarnych. Przykład takiego rozwiązania pokazano na rys. 2/40.



2/40 Generator o sprzężeniu transformatorowym z zastosowaniem pary różnicowej

Układy z parą różnicową charakteryzują się dwiema bardzo korzystnymi właściwościami. Pierwszą korzystną cechą takiego rozwiązania jest to, że napięcie wyjściowe generatora może być pobierane z kolektora tranzystora T_1, jeśli dwójnikiem Z_0 jest równoległy obwód rezonansowy (R_0, L_0, C_0) o dużej dobroci, dostrojony do pulsacji ω_0. W takim przypadku ewentualne zmiany wartości rezystancji obciążenia (uwzględniane w rezystancji R_0) mają mały wpływ na częstotliwość drgań. Druga korzyść polega na tym, że przy danej dobroci pasyw-

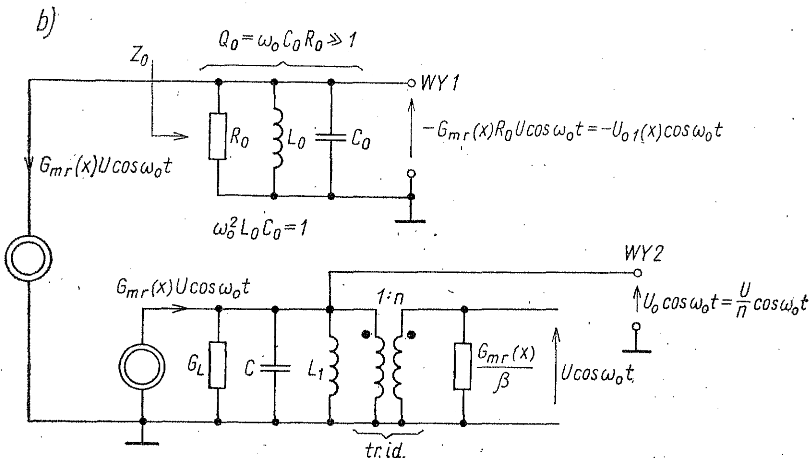
a)



$$g_{mr}=\frac{\alpha I}{4U_T}\;;\quad \beta=\frac{1}{1-\alpha}\;;\quad n=\frac{M}{L_1}$$

$$Q_T=\frac{\omega_0 C}{G_L+n^2 g_{mr}/\beta}\gg 1$$

b)



$$\omega_0^2 L_1 C=1\;;\quad n=\frac{M}{L_1}\ll 1\;;\quad Q_T=\frac{\omega_0 C}{G_L+n^2 G_{mr}(x)/\beta}\approx\frac{\omega_0 C}{G_L}$$

2/41 Model generatora z parą różnicową: a) małosygnałowy z pętlą otwartą; b) wielkosygnałowy (pętla zamknięta)

nego obwodu drgań (Z_L), zniekształcenia nieliniowe napięcia wyjściowego są dużo mniejsze od zniekształceń występujących w układzie z pojedynczym tranzystorem. Charakterystyka prądowo-napięciowa pary różnicowej jest bowiem symetryczna (nie występują więc parzyste harmoniczne) oraz cechuje się większym zakresem liniowości, aniżeli charakterystyka pojedynczego tranzystora.

Nieliniowe charakterystyki pary różnicowej omówiono w dodatku D3. Analizując układ z rys. 2/40 skorzystamy z przedstawionych tam wyników.

Zauważmy najpierw, że przy małych sygnałach układ ten można modelować schematem przedstawionym na rys. 2/41a. Pętla dodatniego sprzężenia zwrotnego obejmuje parę różnicową. Jeśli warunki generacji są spełnione, to przebieg wyjściowy może być pobierany z wyjścia *1* lub wyjścia *2*. Jeżeli wyjście *1* nas nie interesuje (dodatkowy obwód rezonansowy o dużej dobroci), to stosujemy $Z_0 = 0$ (kolektor tranzystora T_1 połączony bezpośrednio z końcówką zasilania). Dalej będziemy rozpatrywać przypadek ogólniejszy, tzn. $Z_0 \neq 0$.

Wyznaczając małosygnałowe wzmocnienie pętli, otrzymujemy

$$A_L = \frac{U_z}{E} = \frac{ng_{mr}}{G_L + n^2 g_{mr}/\beta + sC + 1/(sL_1)} \tag{2/150}$$

gdzie g_{mr} jest transkonduktancją pary różnicowej, zdefiniowaną wzorem (D3/19)

$$g_{mr} = \frac{\alpha I}{4U_T}$$

przy czym I oznacza wydajność źródła stałoprądowego (rys. 2/40). Stąd warunek amplitudy i fazy przybierają odpowiednio postaci

$$g_{mr} > g_{mr\,min} = \frac{G_L}{n(1-n/\beta)} \tag{2/151}$$

$$\omega_o^2 L_1 C = 1 \tag{2/152}$$

Dla wyznaczenia amplitudy drgań możemy utworzyć wielkosygnałowy model generatora pokazany na rys. 2/41b, gdzie $G_{mr}(x)$ jest wielkosygnałową transkonduktancją (funkcją opisującą) pary różnicowej, wyrażoną wzorem (D3/18), $x = U/U_T$ — unormowaną amplitudą pobudzenia. Na podstawie tego modelu amplitudę U_o^+ lub U_{o1}^+ napięcia wyjściowego $u_o(t)$ lub $u_{o1}(t)$ określimy pośrednio, najpierw rozwiązując równanie

$$G_{mr}(x^+) = \frac{G_L}{n(1-n/\beta)} = g_{mr\,min} \tag{2/153}$$

względem x^+, a następnie wykorzystując związki:

$$U_o^+ = U_T\frac{x^+}{n} = \frac{1}{n}U^+ \tag{2/154}$$

$$U_{o1}^+ = G_{mr}(x^+)R_0 U^+ = \frac{G_L R_0}{1-n/\beta} U_o^+ \approx G_L R_0 U_o^+ \tag{2/155}$$

Znając wartość x^+, możemy także oszacować współczynniki zawartości harmonicznych obu napięć wyjściowych

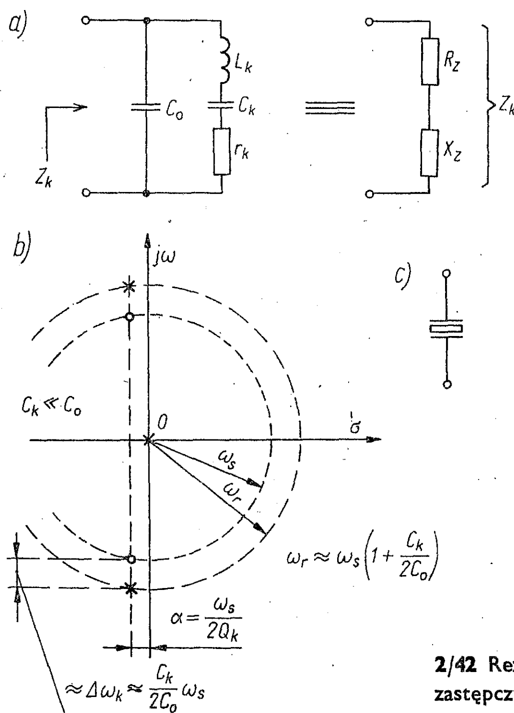
$$h \approx \frac{1}{Q_T} D_r(x^+); \quad h' \approx \frac{1}{Q_{T0}} D_r(x^+)$$

gdzie Q_T, Q_{T0} oznaczają wynikowe dobroci obwodów odpowiednio o impedancji Z_L, Z_0, zaś $D_r(x)$ jest funkcją pomocniczą określoną wzorem (D3/21).

2.6.3 Generatory kwarcowe

Pewną odmianą omawianych wyżej sprzężeniowych generatorów *LC* są *generatory kwarcowe*. Układy te są stosowane w przypadku konieczności zapewnienia dużej stałości częstotliwości, nieosiągalnej przy użyciu konwencjonalnych obwodów *LC*. Kluczowym podzespołem układów tego rodzaju jest *rezonator kwarcowy*.

Rezonatorem kwarcowym nazywamy przetwornik elektromechaniczny, składający się z wibratora kwarcowego (właściwy układ drgający) i chroniący go przed wpływami zewnętrznymi obudowy. Sam wibrator składa się z piezoelektrycznego elementu kwarcowego i wspornika. Element kwarcowy jest wycięty z monokryształu kwarcu, ma regularny kształt geometryczny (np. kształtka w postaci płytki, pręta, pierścienia itd.), określone rozmiary i orientację względem osi krystalograficznych. Na element kwarcowy są nanoszone elektrody



2/42 Rezonator kwarcowy: a) liniowy model zastępczy; b) położenie zer i biegunów impedancji $Z_k(s)$; c) symbol graficzny

w postaci cienkich warstw metalicznych. Elektrody te są następnie łączone (za pośrednictwem wspornika) z końcówkami doprowadzeniowymi obudowy (elektrody zewnętrzne rezonatora).

Działanie rezonatora kwarcowego jest oparte na wykorzystaniu zjawiska piezoelektrycznego, tzn. na sprzężeniu właściwości mechanicznych kwarcowego elementu drgającego z właściwościami elektrycznymi obserwowanymi na jego elektrodach[1].

Elektryczne właściwości rezonatora kwarcowego dla częstotliwości bliskich częstotliwości drgań mogą być przedstawione za pomocą modelu zastępczego z rys. 2/42a. Parametry L_k, C_k i r_k noszą nazwę *parametrów dynamicznych*. Odpowiadają one parametrom mechanicznym wibratora, tj.: L_k — masie elementu kwarcowego, C_k — jego podatności, r_k — oporności mechanicznej strat. Parametr C_o jest parametrem statycznym, czysto elektrycznym, i reprezentuje sobą pojemność kondensatora utworzonego z elektrod, między którymi znajduje się kwarc (dokładniej biorąc: sumy tej pojemności oraz pojemności między doprowadzeniami).

Impedancję rezonatora kwarcowego (rys. 2/42a) można wyrazić wzorem

$$Z_k(s) = \frac{s^2+\frac{\omega_s}{Q_k}s+\omega_s^2}{sC_o\left[s^2+\frac{\omega_s}{Q_k}s+\left(1+\frac{C_k}{C_o}\right)\omega_s^2\right]} \qquad (2/156)$$

w którym

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{L_k C_k}} \qquad (2/157)$$

jest pulsacją rezonansu szeregowego, zachodzącego w gałęzi L_k, C_k, r_k, natomiast

$$Q_k = \frac{\omega_s L_k}{r_k} = \frac{\sqrt{L_k/C_k}}{r_k} \qquad (2/158)$$

jest dobrocią rezonatora.

Charakterystycznymi parametrami rezonatora kwarcowego są także: pulsacja ω_r, która odpowiada rezonansowi równoległemu, zachodzącemu w obwodzie $L_k, \ldots, C_o$

$$\omega_r = \omega_s\sqrt{1+\frac{C_k}{C_o}} \underset{C_k \ll C_o}{\approx} \omega_s\left(1+\frac{C_k}{2C_o}\right) \qquad (2/159)$$

oraz przedział pulsacji

$$\Delta\omega_k = \omega_r-\omega_s = \omega_s\left[\sqrt{1+\frac{C_k}{C_0}}-1\right] \underset{C_k \ll C_o}{\approx} \omega_s\frac{C_k}{2C_o} \qquad (2/160)$$

nazywamy *odstępem rezonansowym*.

---

[1] Szersze omówienie właściwości fizycznych piezoelektrycznych rezonatorów kwarcowych można znaleźć np. w pracach [5, 7].

Rezonator kwarcowy, w porównaniu z konwencjonalnymi obwodami drgającymi zestawionymi z cewek indukcyjnych i kondensatorów, ma wyjątkowo dużą dobroć. Wartości Q_k zawierają się bowiem w zakresie od kilkudziesięciu tysięcy do kilku milionów (maksymalne dla $f_s \approx 1...5$ MHz). Jest to wynikiem, charakterystycznej dla rezonatora kwarcowego, bardzo dużej wartości L_k/C_k, przy stosunkowo małej rezystancji strat r_k.

Dodatkową charakterystyczną cechą rezonatora kwarcowego jest bardzo mały odstęp rezonansowy, co z kolei jest wynikiem bardzo małych wartości C_k/C_o. Wartości liczbowe unormowanego odstępu rezonansowego mieszczą się bowiem w zakresie

$$\frac{\Delta f_k}{f_s} \approx 10^{-5} \dots 10^{-3}$$

Dla przykładu można przytoczyć następujące wartości parametrów rezonatora kwarcowego o częstotliwości $f_s = 1$ MHz:

$$L_k = 3{,}2\ \text{H}, \quad C_k = 7{,}9\ \text{fF}, \quad C_o = 7{,}0\ \text{pF}, \quad r_k = 20\ \Omega$$

Mamy zatem: $Q_k \approx 10^6$, $C_k/C_o \approx 1{,}13 \cdot 10^{-3}$, $\Delta f_k \approx 564$ Hz, $\Delta f_k/f_s \approx 0{,}56 \times \times 10^{-3}$.

Zakresy zmienności wartości parametrów schematu zastępczego rezonatora są znaczne. Wartość L_k może dochodzić nawet do ok. 200 H, przy $f_s \approx 5$ kHz; ze wzrostem częstotliwości maleje, osiągając ok. 10 mH dla $f_s \approx 10$ MHz. Co się tyczy pojemności C_k, to w zakresie $f_s \approx \approx 5$ kHz...10 MHz ma ona wartość 0,005...0,05 pF. Natomiast wartości pojemności statycznej C_o są rzędu: kilku do kilkunastu pF (odpowiednio dla częstotliwości f_s rzędu MHz, kHz). Rezystancja strat także zależy od częstotliwości, przybierając wartości od kilku Ω ($f_s \approx 10$ MHz) do kilkunastu kΩ ($f_s \approx 5$ kHz)[1].

Jak wynika z zależności (2/156) oraz przytoczonych powyżej danych liczbowych, impedancja Z_k rezonatora kwarcowego charakteryzuje się bardzo dużą dobrocią zarówno zer (Q_k), jak i biegunów ($Q_b = \omega_r/(2\alpha) = Q_k\omega_r/\omega_s \approx Q_k$, rys. 2/42b). Wobec tego możemy w pierwszym przybliżeniu zaniedbać straty rezonatora ($r_k = 0$) i wtedy

$$Z_k(\omega) = jX_z(\omega) = j\frac{\omega^2 - \omega_s^2}{\omega C_o(\omega_r^2 - \omega^2)} \tag{2/161}$$

Przebieg reaktancji $X_z(\omega)$ bezstratnego rezonatora pokazano na rys. 2/43a. Jak widać, w przedziale $\omega_s...\omega_r$ reaktancja ma charakter indukcyjny, zaś poza tym przedziałem — charakter pojemnościowy.

W przedziale $\omega_s...\omega_r$ zastępcza indukcyjność L_z rezonatora wyraża się zależnością

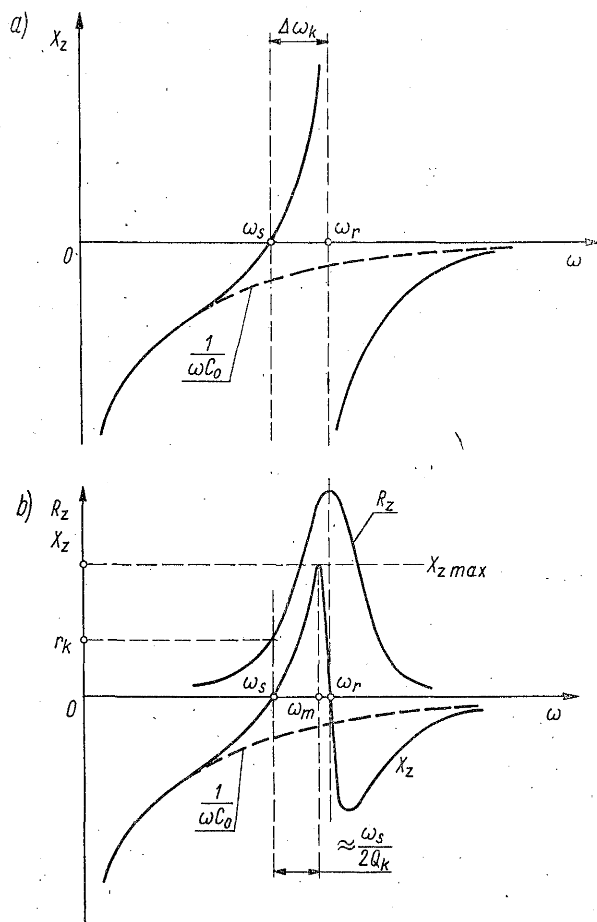
$$L_z = \frac{X_z(\omega)}{\omega} \approx 2L_k \frac{\omega - \omega_s}{\omega_s} \tag{2/162}$$

Z zależności tej wynika, że ze wzrostem częstotliwości bardzo szybko rośnie zastępcza indukcyjność rezonatora (duża wartość $2L_k$).

---

[1] Bardziej szczegółowe dane — patrz np. [5].

Dlatego też, rezonator kwarcowy, użyty jako element indukcyjny obwodu drgającego ma bardzo dobre właściwości stabilizacyjne. Zmiany indukcyjności lub pojemności pozostałej części obwodu są bowiem wyrównywane odpowiednimi zmianami zastępczej indukcyjności rezonatora, przy bardzo małej zmianie częstotliwości.



2/43 Charakterystyki częstotliwościowe rezonatora kwarcowego: a) przy pominięciu strat; b) z uwzględnieniem stratności

Na rysunku 2/43b pokazano przebiegi zastępczej rezystancji R_z i reaktancji X_z stratnego rezonatora kwarcowego. Dla pulsacji ω_s mamy

$$Z_k(\omega_s) = R_z(\omega_s) + jX_z(\omega_s) \approx r_k.$$

Wartość maksymalna reaktancji $X_{z\max}$ występuje przy pulsacji

$$\omega_m \approx \omega_r - \frac{\omega_s}{2Q_k}$$

i wynosi

$$X_{z\max} \approx \frac{1}{2} Q_k \left(\frac{C_k}{C_o}\right)^2 \omega_m L_k$$

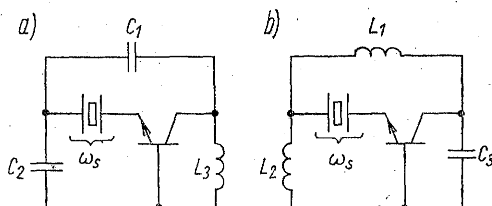
Jak widać, w przedziale $\omega_s...\omega_m$, nieco węższym niż odstęp rezonansowy, zastępcza indukcyjność szybko rośnie ze wzrostem częstotliwości. W tym przedziale przybliżona wartość L_z może być wyznaczona z zależności (2/161), obowiązującej dla rezonatora bezstratnego.

Przejdźmy teraz do krótkiego omówienia generatorów kwarcowych, rozpoczynając od wstępnej ich klasyfikacji.

Ze względu na rodzaj pracy rezonatora kwarcowego układy te można podzielić na dwie grupy:

1. Generatory, w których rezonator zastosowany jest jako selektywny element rezystancyjny o małej rezystancji (praca przy ω_s).

2. Generatory, w których rezonator zastosowany jest jako zastępcza indukcyjność L_z, o wartości bardzo szybko rosnącej z częstotliwością (praca w przedziale $\omega_s...\omega_m$).



2/44 Podstawowe układy Butlera: a) z czwórnikiem sprzęgającym Colpittsa; b) z czwórnikiem sprzęgającym Hartleya

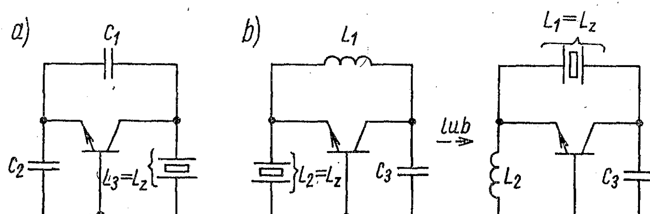
Najbardziej rozpowszechnionymi przedstawicielami grupy pierwszej są generatory pokazane na rys. 2/44, często nazywane podstawowymi *generatorami Butlera*. Jak widać, są to zmodyfikowane wersje układów typu Colpittsa i Hartleya. W układach tych rezonator jest użyty jako element sprzęgający, dzięki czemu wzmocnienie pętli osiąga bardzo ostre maksimum w otoczeniu pulsacji ω_s. Przy spełnieniu amplitudowego warunku generacji uzyskuje się drgania o częstotliwości kontrolowanej kwarcem.

Spośród układów drugiej grupy dość często są stosowane generatory typu Colpittsa i Hartleya, przedstawione na rys. 2/45. Układy te wywodzą się bezpośrednio z układów pokazanych na rys. 2/32a i b. Rezonator kwarcowy zastępuje tu jeden z elementów indukcyjnych czwórnika sprzężenia zwrotnego.

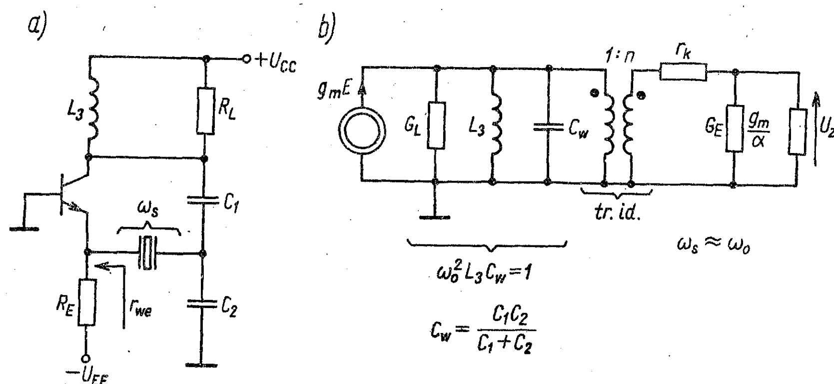
Przedstawione na rysunkach 2/44 i 2/45 uproszczone schematy generatorów kwarcowych należy uzupełnić o obwód zasilania i stabilizacji spoczynkowego punktu pracy tranzystora (może to być również tranzystor unipolarny). Schematy powinny uwzględniać także rezystancję obciążenia oraz przyjętą konfigurację tranzystora.

Zilustrowano to na rys. 2/46a na przykładzie generatora Butlera z tranzystorem bipolarnym pracującym w konfiguracji WB.

Generatorem Colpittsa w wersji z konwencjonalnym obwodem *LC* zajmowaliśmy się dość szczegółowo w p. 2.6.1. Zauważmy więc, że w generatorze Butlera (rys. 2/46a), w odróżnieniu od układu z rys. 2/33a, napięcie zwrotne występujące na dzielniku pojemnościowym C_1, C_2 nie jest doprowadzane do



2/45 Trójwęzłowe generatory kwarcowe: a) typu Colpittsa; b) typu Hartleya



2/46 Generator Butlera z czwórnikiem sprzęgającym Colpittsa: a) schemat ideowy; b) model małosygnałowy dla pulsacji ω_s (pętla otwarta)

emitera bezpośrednio, lecz przez dzielnik napięciowy składający się z rezonatora kwarcowego i rezystancji wejściowej r_{we}. Uwzględnienie tego faktu prowadzi do małosygnałowego modelu generatora, pokazanego na rys. 2/46b.

Małosygnałowe wzmocnienie pętli dla $\omega = \omega_s$

$$A_L = \frac{U_z}{E} = \frac{ng_m}{G_L[1+(G_E+g_m/\alpha)r_k]+n^2(G_E+g_m/\alpha)} \tag{2/163}$$

a zatem warunek amplitudy możemy zapisać w postaci

$$g_m > g_{m\min} = \frac{G_L(1+r_k G_E)+n^2 G_E}{n[1-(n+r_k G_L)/\alpha]} \tag{2/164}$$

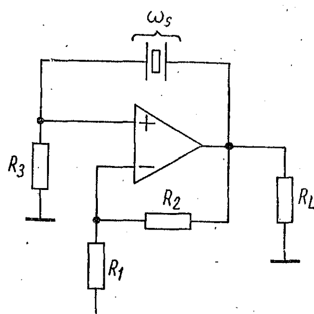
Jak już wiemy, stałość częstotliwości generatora jest wprost proporcjonalna

do dobroci równoważnej Q_R obwodu (lub współczynnika S_F). Dla układu z rys. 2/46a dobroć tę możemy oszacować jako

$$Q_R \approx Q_k \frac{r_k}{r_k + r_{we}} = Q'_k$$

gdyż rezonator kwarcowy jest obciążony rezystancją wejściową r_{we}, a wobec bardzo dużych wartości Q'_k wpływ pozostałych elementów obwodu drgań jest w pierwszym przybliżeniu do pominięcia. Przyjmując $Q_k = 2 \cdot 10^4 ... 2 \cdot 10^6$ i $r_{we} \approx r_k$, mamy $Q_R \approx 10^4 ... 10^6$. Ponieważ w konwencjonalnym układzie Colpittsa (rys. 2/33a) jako typowe wartości można przyjąć $Q_R = Q_T \approx \omega_s C_w R_L \approx$ $\approx 100...200$, zatem stabilizacja kwarcowa zwiększa stałość częstotliwości o ok. 2...4 rzędów wielkości.

Zalety mostkowych układów generacyjnych są już nam znane (p. 2.4.3). W związku z tym, warto jeszcze na koniec wspomnieć, że w zakresie stosunkowo niedużych częstotliwości (do ok. kilkuset kiloherców, zależnie od szerokopasmowości wzmacniacza) bardzo dobre właściwości ma generator o schemacie pokazanym na rys. 2/47, nazywany *generatorem Meachama*. Bezinercyjny



2/47 Generator kwarcowy Meachama

wzmacniacz napięciowy jest objęty pętlą selektywnego dodatniego sprzężenia zwrotnego. Sprzężenie to osiąga maksimum dla pulsacji ω_s. Przyjmując, że wzmacniaczem jest idealny wzmacniacz operacyjny, małosygnałowy warunek amplitudy możemy zapisać w postaci

$$\frac{R_2}{R_1} > \left.\frac{R_2}{R_1}\right|_{min} = \frac{r_k}{R_3} \tag{2/165}$$

Stabilizację amplitudy drgań można więc uzyskać za pomocą nieliniowej pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego, stosując np. rozwiązania omówione w p. 2.5.2.

Orientacyjnie można przyjąć, że opisane tu proste generatory kwarcowe mogą zapewnić względną stałość częstotliwości rzędu $10^{-4}...10^{-6}$.

Główny wpływ na niestałość częstotliwości ma temperatura. Dlatego też, w celu uzyskania większej stałości częstotliwości konieczne jest stosowanie układów bardziej złożonych, z termokompensacją (stałość rzędu $5 \cdot 10^{-6}$ ... ...$5 \cdot 10^{-8}$) lub z termostatowaniem (stałość rzędu $10^{-7}...10^{-11}$) [5].

2.7 GENERATORY PRZESTRAJANE NAPIĘCIEM

Generator przestrajany napięciem, oznaczany zwykle symbolem VCO (ang. *voltage controlled oscillator*), jest układem o okresie drgań regulowanych za pomocą napięcia sterującego u_{REG}. Do układów tego rodzaju są zaliczane nie tylko generatory sinusoidalne, ale również generatory wytwarzające przebiegi o innej postaci, np. trójkątne, prostokątne. W niektórych zastosowaniach, np.: generacja sygnałów *FM* (rozdz. 5), układy z pętlą fazową (rozdz. 8), woltomierze cyfrowe, przetworniki analogowo-cyfrowe, itd., żąda się aby podstawowa częstotliwość drgań była uzależniona liniowo od napięcia sterującego. Układy spełniające to wymaganie są często nazywane *konwertorami napięciowo-częstotliwościowymi.*

Z generatorami sinusoidalnymi o częstotliwości przestrajanej napięciem mieliśmy już do czynienia w p. 2.5.3 i p. 2.5.4.

Spośród wielu innych możliwych i realizowanych w praktyce rozwiązań omówimy poniżej dwie typowe realizacje, w których oprócz przebiegu sinusoidalnego są również dostępne symetryczne przebiegi prostokątny i trójkątny. Podstawowym podzespołem takich układów jest przerzutnik Schmitta (p. 1.8).

Typowy schemat generatora przebiegów prostokątnego i trójkątnego (rys. 2/48a) zawiera nieodwracający przerzutnik Schmitta (W_1) i integrator odwracający (W_2), objęte pętlą sprzężenia zwrotnego. Działanie układu polega na cyklicznej zmianie stanów przerzutnika i wytwarzaniu na wyjściu integratora ujemnego i dodatniego zbocza kolejnych impulsów trójkątnych.

Aby wyznaczyć parametry wytwarzanych przebiegów (rys. 2/48b) załóżymy, że w chwili t_o przerzutnik został przełączony do stanu $U_{O\max}$. Napięcie to jest doprowadzone do wejścia integratora, zatem jego napięcie wyjściowe, równe $u_2(t_o) = U_{2\max}$, będzie dla $t > t_o$ maleć liniowo wg zależności

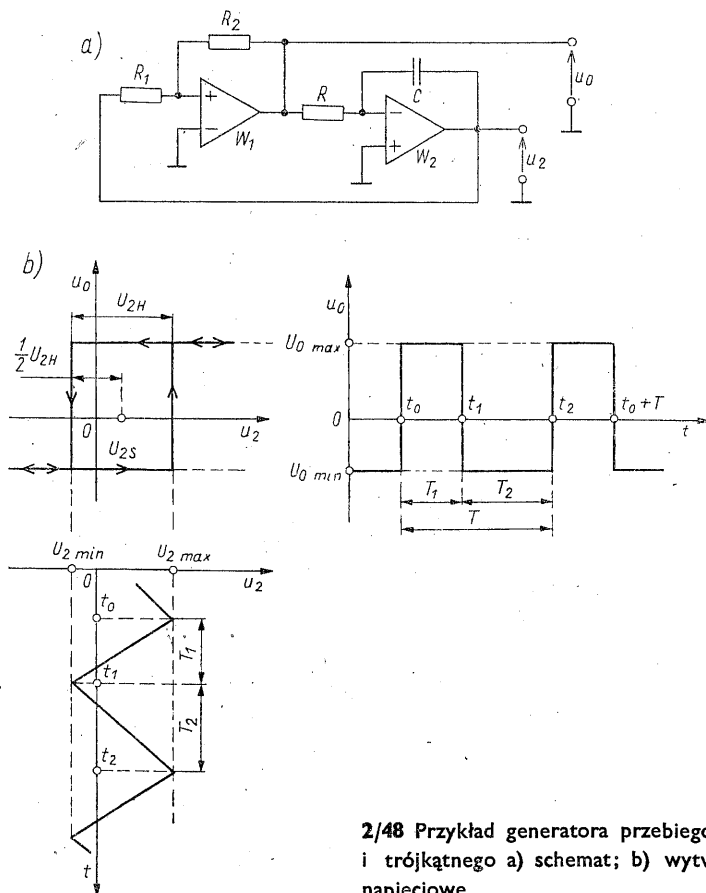
$$u_2(t) = -\frac{1}{RC}U_{O\max}(t-t_o)+U_{2\max}$$

aż do wartości $u_2(t_1) = U_{2\min} < 0$, której przekroczenie powoduje zmianę stanu przerzutnika, tj. zmianę napięcia u_O z wartości $U_{O\max}$ na $U_{O\min} < 0$. Po zmianie stanu przerzutnika napięcie wyjściowe integratora będzie teraz z upływem czasu narastało liniowo zgodnie z zależnością

$$u_2(t) = -\frac{1}{RC}U_{O\min}(t-t_1)+U_{2\min}$$

To narastanie napięcia trwa dopóty, dopóki nie osiągnie ono z powrotem wartości progowej: $u_2(t_2) = u_2(t_o) = U_{2\max}$. Dalsze zmiany $u_2(t)$ i $u_O(t)$ zachodzą cyklicznie z okresem

$$T = t_2-t_o = T_1+T_2 = RC\frac{U_{2H}}{U_{O\max}}\left(1-\frac{U_{O\max}}{U_{O\min}}\right) \quad (2/166)$$



2/48 Przykład generatora przebiegów prostokątnego i trójkątnego a) schemat; b) wytwarzane przebiegi napięciowe

gdzie

$$U_{2H} = U_{2\max} - U_{2\min} = \frac{R_1}{R_2}(U_{O\max} - U_{O\min}) \tag{2/167}$$

jest napięciem histerezy.

Międzyszczytowe wartości przebiegów trójkątnego i prostokątnego wynoszą odpowiednio U_{2H} i $(U_{O\max} - U_{O\min})$, zaś współczynnik wypełnienia impulsów prostokątnych jest równy

$$\frac{T_1}{T} = \left(1 - \frac{U_{O\max}}{U_{O\min}}\right)^{-1}$$

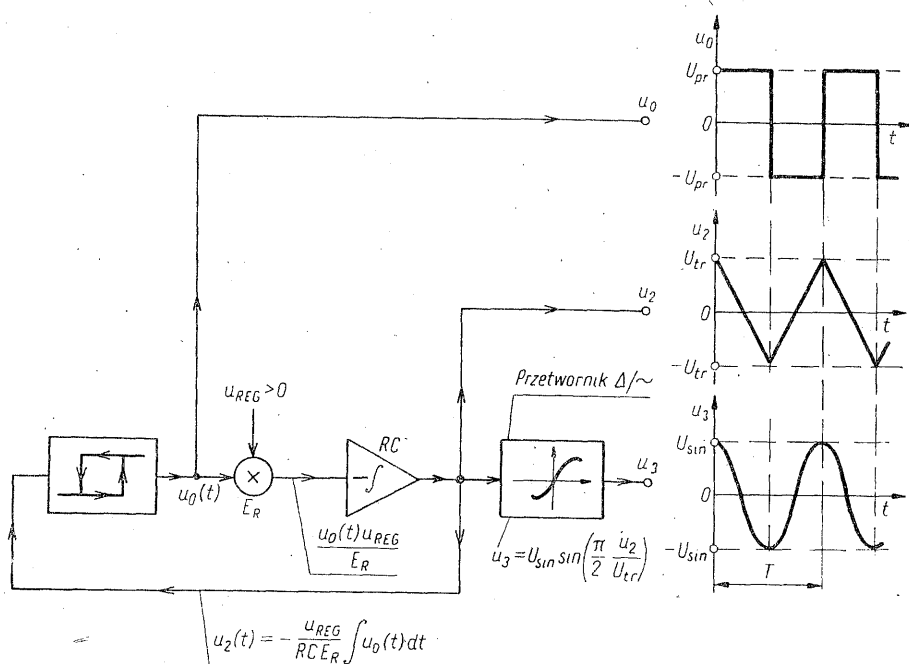
Jeśli $U_{O\max} = -U_{O\min}$, co się dalej zakłada, to układ wytwarza przebiegi symetryczne o zerowej wartości średniej. Okres drgań

$$T = 4RC\frac{R_1}{R_2} \tag{2/168}$$

zaś amplitudy przebiegów trójkątnego i prostokątnego są odpowiednio równe

$$U_{tr} = \frac{R_1}{R_2} U_{O\,max}; \qquad U_{pr} = U_{O\,max}$$

Jeżeli układ zmodyfikujemy w sposób pokazany na rys. 2/49, tzn. wprowadzimy dodatkowo układ mnożący oraz przetwornik typu trójkąt-sinus (p. 1.7),



2/49 Schemat funkcjonalny generatora przebiegów: prostokątnego, trójkątnego i sinusoidalnego o częstotliwości podstawowej sterowanej napięciem u_{REG}

to otrzymamy generator, w którym częstotliwość podstawowa trzech przebiegów wyjściowych $u_O(t)$, $u_2(t)$ i $u_3(t)$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \frac{R_2}{4R_1 RC} \frac{u_{REG}}{E_R} \tag{2/169}$$

jest uzależniona liniowo od napięcia regulacyjnego u_{REG}. Przetwornik powinien realizować funkcję

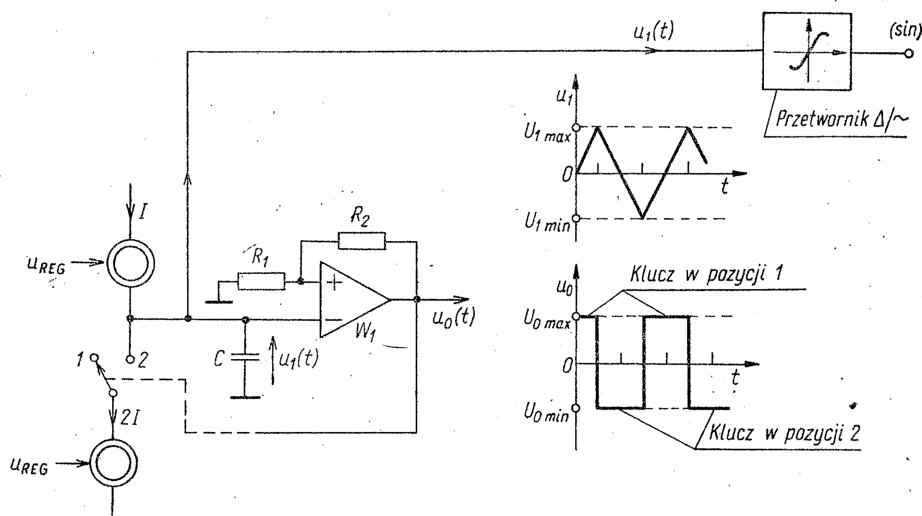
$$u_3 = U_{sin} \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{u_2}{U_{tr}}\right)$$

Przekształca on wówczas napięcie trójkątne w napięcie sinusoidalne

$$u_3(t) = U_{sin} \sin \omega t$$

Inną wersję generatora VCO przedstawiono na rys. 2/50. Działanie układu jest następujące. Jeżeli klucz jest w pozycji *1*, co odpowiada wysokiemu stanowi przerzutnika W_1, to kondensator C jest ładowany stałym prądem I, wskutek

czego napięcie u_1 na kondensatorze narasta liniowo. Z chwilą, gdy napięcie to przekroczy wartość górnego progu U_{1max}, następuje zmiana stanu przerzutnika oraz przełączenie klucza do pozycji *2*. Kondensator jest teraz rozładowywany prądem $2I-I = I$, zatem napięcie u_1 maleje liniowo, aż do osiągnięcia wartości dolnego progu przerzutnika $U_{1min} = -U_{1max}$. Z chwilą przekroczenia tej wartości progowej przerzutnik powraca do stanu pierwotnego, klucz włączany jest jednocześnie z powrotem do pozycji *1*, i cykl pracy generatora powtarza się.



2/50 Schemat blokowy generatora VCO ze źródłami prądowymi sterowanymi napięciem u_{REG}

Częstotliwość podstawowa wytwarzanych przebiegów jest opisana zależnością

$$f = \frac{I}{2C(U_{1\,max}-U_{1\,min})} = \frac{I}{2CU_{1H}} = \left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{I}{4CU_{O\,max}} \tag{2/170}$$

w której U_{1H} jest napięciem histerezy (1/168).

Jak widać, częstotliwość drgań jest wprost proporcjonalna do prądu *I*. Zapewniając uzależnienie liniowe prądu *I* od napięcia sterującego u_{REG}, otrzymujemy liniową charakterystykę $f = g(u_{REG})$ przestrajania generatora.

Na koniec należy powiedzieć, że szeroko są stosowane również generatory sinusoidalne *LC* o częstotliwości przestrajanej za pomocą diody pojemnościowej lub sterowanego elementu reaktancyjnego. Zagadnienia te są omówione w rodz. 5.

Literatura

1. Бондаренко В. Г.: RC генераторы синусоидальных колебании. Связь, Москва 1976.
2. Clarke K. K., Hess D. T.: *Communication circuits: analysis and design*. Addison-Wesley Publ. Co., New York 1971.
3. Cunningham W. J.: *Analiza układów nieliniowych*. WNT, Warszawa 1966.

4. Filipkowski A.: *Układy elektroniczne analogowe i cyfrowe*. WNT, Warszawa 1978.
5. Gniewińska B., Klimek Cz.: *Rezonatory i generatory kwarcowe*. WKŁ, Warszawa 1980.
6. Golde W.: *Układy elektroniczne*. t. II. WNT, Warszawa 1976.
7. Groszkowski J.: *Wytwarzanie drgań elektrycznych*. PWT, Warszawa 1958.
8. Hayashi Ch.: *Drgania nieliniowe w układach fizycznych*. WNT, Warszawa 1968.
9. Kudrewicz J.: *Częstotliwościowe metody w teorii nieliniowych układów dynamicznych*. WNT, Warszawa 1970.
10. Kudrewicz J., Osiowski J.: *Wybrane zagadnienia teorii obwodów*. Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1974.
11. Pawłowski J.: *Podstawowe układy elektroniczne. Wzmacniacze i generatory*. WKŁ, Warszawa 1980.
12. Popow E. P., Paltow I. P.: *Przybliżone metody badań nieliniowych układów automatycznych*. WNT, Warszawa 1964.
13. Ryżko S., Ebert J.: *Wzmacniacze rezonansowe i generatory mocy wielkiej częstotliwości*. WNT, Warszawa 1971.

3

MODULATORY AMPLITUDY

W rozdziale tym przedstawimy metody wytwarzania sygnałów zmodulowanych przy czym procesowi modulacji poddawany będzie przebieg harmoniczny. Podstawowe rodzaje takich sygnałów oraz ich właściwości zostały omówione w dodatku D5, do którego będziemy się w naszych rozważaniach często odwoływać, Wykorzystywać będziemy również ogólne zależności dotyczące filtracji pasmowej sygnałów zmodulowanych, wyprowadzone w dodatku D6[1].

Sposoby wytwarzania poszczególnych rodzajów sygnałów przeanalizujemy najpierw na przykładzie układów funkcjonalnych, bez wnikania w szczegóły ich realizacji technicznej. Pozwoli to na przedstawienie i porównanie zasad działania szerokiej klasy modulatorów amplitudy, a także na prześledzenie możliwości i ograniczeń, które z tych zasad działania wynikają.

Rozważania te zostaną następnie zilustrowane przykładami wybranych rozwiązań układowych. Należy jednak podkreślić, że z uwagi na rozmiar książki, omówione zostaną tylko podstawowe, najprostsze układy modulatorów analogowych.

3.1 METODY WYTWARZANIA SYGNAŁÓW ZMODULOWANYCH

3.1.1 Wytwarzanie sygnałów *AM* i *AM-SC*

Jak pokazano w dodatku D5, sygnały dwuwstęgowe z nośną lub bez nośnej tzn. *AM* lub *AM-SC*, można zapisać w jednakowej postaci

$$u(t) = \mathrm{Re}[a(t)e^{j\omega_0 t}] = a(t)\cos\omega_0 t \tag{3/1}$$

---

[1] Czytelnikowi, który uzna, że jego znajomość wymienionych zagadnień nie jest wystarczająca można zalecić, aby przed przystąpieniem do czytania niniejszego rozdziału zapoznał się z dodatkami D5 i D6.

przy czym $a(t)$ spełnia w poszczególnych przypadkach następujące warunki:

dla AM $\quad a(t) = U_o[1+mf(t)] \geqslant 0$ (3/2)

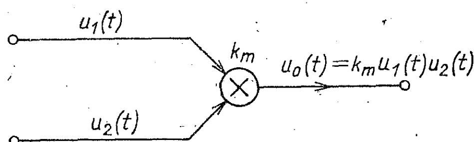
dla AM-SC $\quad \overline{a(t)} = mU_o\overline{f(t)} = 0$ (3/3)

Jak wynika z (D5/37) sygnał modulujący $f(t)$ jest wielkością unormowaną. Będziemy ponadto zakładać, że jego widmo jest ograniczone do pulsacji ω_M, przy czym $\omega_M < \omega_o$.

Metoda bezpośrednia

Sygnał o postaci (3/1) można uzyskać w każdym układzie, w którym sygnał wyjściowy jest proporcjonalny do iloczynu dwóch sygnałów wejściowych. Istotnie, jeśli w układzie pokazanym na rys. 3/1 przyjmiemy, że

$$u_1(t) = U_1 \cos\omega_o t; \quad u_2(t) = a(t) \tag{3/4}$$



3/1 Schemat funkcjonalny modulatora z układem mnożącym

to napięcie wyjściowe ma postać

$$u_o(t) = k_m u_1(t) u_2(t) = k_m U_1 a(t) \cos\omega_o t \tag{3/5}$$

W zależności od tego, czy $a(t)$ spełnia warunek (3/2), czy też (3/3) $u_o(t)$ jest sygnałem AM lub AM-SC.

Teoretycznie metoda ta nie ma ograniczeń, w praktyce jednak układy mnożące można opisać zależnością (3/5) tylko dla ograniczonych wartości amplitud i częstotliwości sygnałów u_1 i u_2.

Modulacja na elemencie nieliniowym

Rozważmy układ przedstawiony na rys. 3/2a, w którym suma sygnałów modulującego i nośnego jest podawana na wejście układu nieliniowego, opisanego zależnością

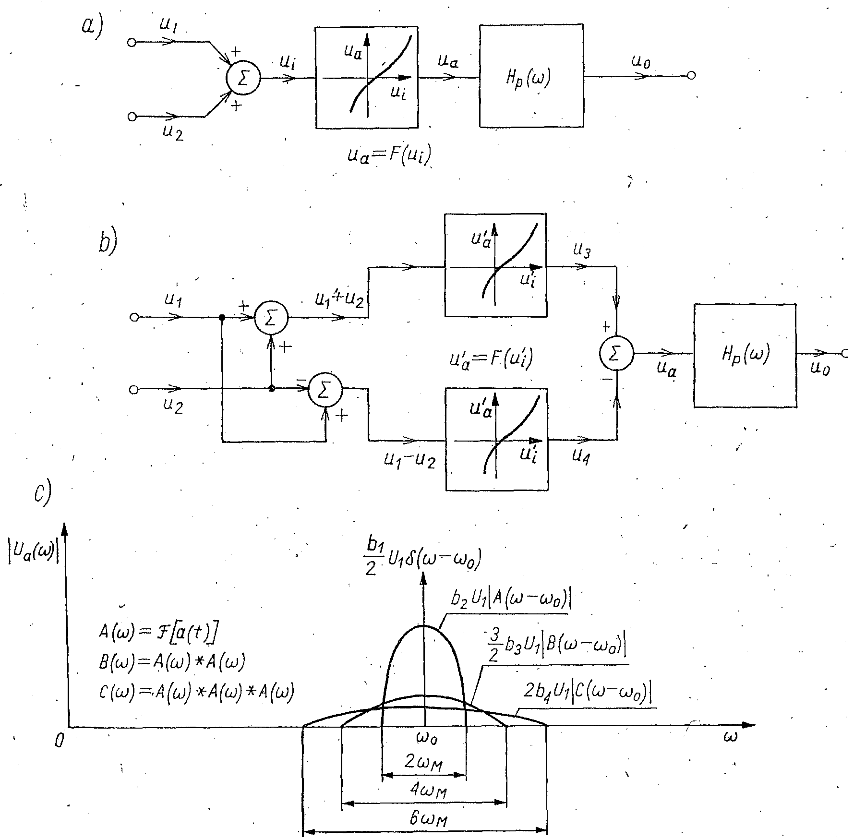
$$u_a = F(u_i) \tag{3/6}$$

Załóżmy, że charakterystykę nieliniową można aproksymować wielomianem potęgowym stopnia n

$$u_a = b_0 + b_1 u_i + b_2 u_i^2 + \ldots + b_n u_i^n \tag{3/7}$$

i wyznaczmy u_a, podstawiając $u_i = u_1 + u_2$.
Otrzymujemy

$$u_a = F(u_1+u_2) = 2b_2 u_1 u_2 + b_1(u_1+u_2) + b_2(u_1^2+u_2^2) + b_0 + \sum_{k=3}^{n} b_k(u_1+u_2)^k \tag{3/8}$$



3/2 Schemat funkcjonalny modulatora z elementem nieliniowym: a) układ niezrównoważony; b) układ pojedynczo zrównoważony; c) widmo sygnału użytecznego oraz sygnałów niepożądanych wg wyrażenia (3/9)

Jeżeli teraz przyjmiemy, że $u_1(t) = U_1 \cos\omega_o t$ i $u_2(t) = a(t)$ oraz wybierzemy tylko te składniki, które zawierają u_1 w potędze pierwszej, a więc mają widma skoncentrowane wokół pulsacji nośnej ω_o, to otrzymamy[1)]

$$b_1 U_1 \cos\omega_o t + 2b_2 U_1 a(t)\cos\omega_o t + 3b_3 U_1 a^2(t)\cos\omega_o t + \ldots$$
$$\ldots + nb_n U_1 a^{n-1}(t)\cos\omega_o t = b_1 U_1 \cos\omega_o t +$$
$$+ 2b_2 U_1 a(t)\left[1 + \frac{3}{2}\frac{b_3}{b_2}a(t) + 2\frac{b_4}{b_2}a^2(t) + \ldots\right]\cos\omega_o t \qquad (3/9)$$

Jak widać, sygnał pożądany reprezentuje wyraz drugi, tzn. $2b_2 U_1 a(t)\cos\omega_o t$. Dalsze wyrazy przedstawiają także sygnały zmodulowane amplitudowo, ale ich obwiednie są zniekształcone. Należy również zauważyć, że sygnał pożądany

[1)] Łatwo zauważyć, że wyrazy zawierające u_1 w potęgach nieparzystych dostarczają jeszcze innych składników o widmach skupionych wokół ω_o, ale dla przejrzystości rozważań nie będziemy ich tutaj przytaczać. Efekty, na które chcemy zwrócić uwagę będą widoczne także wówczas, gdy posłużymy się tylko wyrazami podanymi w (3/9).

zajmuje pasmo o szerokości $2\omega_M$, natomiast sygnały niepożądane mają widma odpowiednio szersze (np. $\mathscr{F}[a^2(t)] = A(\omega) * A(\omega)$, w wyniku czego szerokość widma trzeciego składnika wynosi $4\omega_M$, itd.), co pokazano na rys. 3/2c. Widać stąd, że sygnałów niepożądanych nie można usunąć drogą filtracji, gdyż każdy filtr, który przeniesie pożądany sygnał zmodulowany, przeniesie także — chociażby częściowo — widma pozostałych składników $u_a(t)$. Nasuwa się więc wniosek, że w układzie z rys. 3/2a, z elementem nieliniowym n-tego stopnia, zniekształceń modulacji nie można uniknąć, można je co najwyżej ograniczyć, na przykład przez ograniczenie poziomu sygnału modulującego $a(t)$.

Rozważmy teraz układ podany na rys. 3/2b, nazywany układem pojedynczo zrównoważonym. Sygnał wyjściowy dany jest w tym przypadku zależnością

$$u_a = F(u_1+u_2)-F(u_1-u_2) = 4b_2u_1u_2+2b_1u_2+ + \sum_{k=3}^{m} b_k[(u_1+u_2)^k-(u_1-u_2)^k] \tag{3/10}$$

Przyjmując, tak jak poprzednio, że $u_1(t) = U_1\cos\omega_o t$ oraz $u_2(t) = a(t)$ i wybierając w ten sam sposób składniki o widmie skoncentrowanym wokół ω_o, dostaniemy

$$4b_2U_1a(t)\cos\omega_o t+8b_4U_1a^3(t)\cos\omega_o t+12b_6U_1a^5(t)\cos\omega_o t+ \dots =$$
$$= 4b_2U_1a(t)\left[1+2\frac{b_4}{b_2}a^2(t)+3\frac{b_6}{b_2}a^4(t)+ \dots\right]\cos\omega_o t \tag{3/11}$$

Tym razem składniki niepożądane zawierają tylko obwiednie w potęgach nieparzystych. W wyniku zrównoważenia układu wyrazy z potęgami parzystymi nie występują. Zauważmy również, że przy $u_2 = 0$ także $u_a = 0$, czyli przy braku sygnału modulującego nie ma na wyjściu przebiegu o częstotliwości nośnej.

Dokonajmy teraz pewnego porównania układów z rys. 3/2a i b, zawierających te same przetworniki nieliniowe. Przyjmijmy mianowicie, że w każdym z rozważanych przypadków dopuszczamy istnienie zniekształceń. Żądamy jednak, aby wartość maksymalna pierwszego z wyrazów niepożądanych nie przekraczała każdorazowo 1% wartości maksymalnej sygnału pożądanego. Jak widać z zależności (3/9) oraz (3/11) oznacza to, że muszą zostać spełnione nierówności

$$\frac{3}{2}\left|\frac{b_3}{b_2}a(t)\right|_{\max} \leqslant 0{,}01 \tag{3/12}$$

dla układu niezrównoważonego oraz

$$2\left|\frac{b_4}{b_2}a^2(t)\right|_{\max} \leqslant 0{,}01 \tag{3/13}$$

dla układu zrównoważonego. Przyjmując w obu wyrażeniach znak równości otrzymujemy, że

$$\frac{|a(t)|_{\max\ \text{ukł. zrówn.}}}{|a(t)|_{\max\ \text{ukł. niezrów.}}} = \frac{10{,}6|b_3|}{\sqrt{|b_2b_4|}} \tag{3/14}$$

Jeżeli założymy dla przykładu, że wielomian (3/7) przybliża charakterystykę wykładniczą, a więc jego współczynniki dane są wzorem $b_k = 1/k!$, $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$, to dostaniemy

$$\frac{|a(t)|_{\text{max ukł. zrów.}}}{|a(t)|_{\text{max ukł. niezrów.}}} \approx 12 \tag{3/15}$$

Widać stąd, że w układzie zrównoważonym ten sam poziom zniekształceń osiąga się przy sygnale modulującym 12-krotnie większym niż w układzie niezrównoważonym.

Przeprowadźmy jeszcze jedno porównanie omawianych układów. Przyjmijmy, że współczynniki wielomianu (3/7) spełniają warunek: $b_n = 0$ dla $n \geqslant 3$. Przy tym ograniczeniu z wyrażenia (3/8) dla układu niezrównoważonego dostajemy natychmiast, że

$$u_a(t) = b_0 + \frac{1}{2} b_2 U_1^2 + b_1 a(t) + b_2 a^2(t) + \\ + b_1 U_1 \left[1 + 2\frac{b_2}{b_1} a(t)\right] \cos\omega_o t + \frac{1}{2} b_2 U_1^2 \cos\omega_o t \tag{3/16}$$

Ponieważ założyliśmy, że $a(t)$ ma widmo ograniczone do ω_M, więc składniki dolnopasmowe w (3/16) mają widmo ograniczone do $2\omega_M$. Jeśli zatem zostanie spełniona nierówność

$$\omega_M < \frac{\omega_o}{3} \tag{3/17}$$

to widmo sygnału pożądanego oraz widmo składników niepożądanych będą rozłączne. Przyjmując, że filtr z rys. 3/2a ma charakterystyki amplitudową i fazową symetryczne względem ω_o, pokazane na rys. D6/6a i b, a jego pasmo przenoszenia pozwala na całkowite usunięcie sygnałów niepożądanych, możemy — zgodnie z (D6/40) — napisać, iż napięcie wyjściowe $u_o(t)$ dane jest zależnością

$$u_o(t) = [g(t) * h_d(t)] \cos[\omega_o t + \theta_p(\omega_o)] \tag{3/18}$$

gdzie $h_d(t)$ jest odpowiedzią impulsową odpowiednika dolnoprzepustowego (rys. D6/6c i d) filtru pasmowego o charakterystyce $H_p(\omega)$, a przez $g(t)$ oznaczyliśmy wyrażenie

$$g(t) = b_1 U_1 \left[1 + 2\frac{b_2}{b_1} a(t)\right] \tag{3/19}$$

Jak widać, nawet gdy $\overline{a(t)} = 0$, otrzymujemy tylko sygnał *AM* o współczynniku głębokości modulacji zależnym od stosunku b_2/b_1.

Zastosowanie elementów nieliniowych o charakterystyce (3/7), dla której $b_n = 0$ dla $n \geqslant 3$ w układzie zrównoważonym daje korzystniejsze wyniki. Z zależności (3/10) wynika, że wówczas

$$u_a(t) = 2b_1 a(t) + 4b_2 U_1 a(t) \cos\omega_o t \tag{3/20}$$

Możemy więc teraz przy $\overline{a(t)} = 0$ uzyskać sygnał dwuwstęgowy bez nośnej,

czyli *AM-SC*, a nierówność zapewniająca rozłączność widm składowych jest łagodniejsza, niż (3/17), gdyż ma postać

$$\omega_M < \frac{\omega_o}{2} \tag{3/21}$$

Szczególna sytuacja pojawia się wtedy, kiedy w układzie zrównoważonym zastosujemy kwadratory, to znaczy układy nieliniowe o charakterystyce parabolicznej

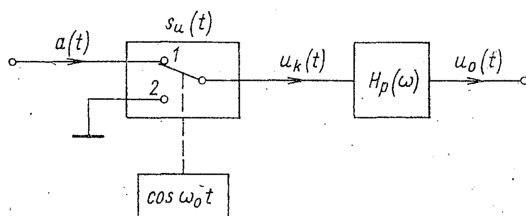
$$F(u) = b_2 u^2 \tag{3/22}$$

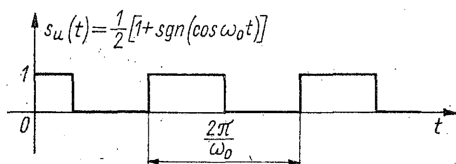
Sygnał $u_a(t)$ nie zawiera wówczas żadnych składowych niepożądanych i filtr w układzie z rys. 3/2b — oczywiście w przypadku idealnym — staje się zbędny.

Z uwagi na zademonstrowane tutaj zalety układy zrównoważone znajdują częste zastosowania w praktyce, w szczególności do wytwarzania sygnałów *AM-SC*. Oprócz układów pojedynczo zrównoważonych są stosowane także układy podwójnie zrównoważone, w których wykorzystuje się cztery przetworniki nieliniowe.

Metoda kluczowania

Metoda, którą chcemy teraz omówić polega na kluczowaniu sygnału modulującego z częstotliwością fali nośnej. Operacji tej dokonuje się za pomocą klucza synchronicznego, sterowanego przebiegiem nośnym. Układ funkcjonalny modulatora wykorzystującego tę metodę jest pokazany na rys. 3/3a. Zastosowano





3/3 Modulator z niesymetrycznym kluczem synchronicznym: a) schemat funkcjonalny; b) przebieg funkcji kluczującej

w nim klucz niesymetryczny, którego działanie opisuje funkcja $s_u(t)$, zdefiniowana w następujący sposób:

$$s_u(t) = \frac{1}{2}[1+\mathrm{sgn}(\cos\omega_o t)] = \begin{cases} 1; & \cos\omega_o t \geqslant 0 \\ 0; & \cos\omega_o t < 0 \end{cases} \tag{3/23}$$

W związku z tym możemy napisać, że

$$u_k(t) = s_u(t)a(t) = \begin{cases} a(t); & \cos\omega_o t \geqslant 0 \\ 0; & \cos\omega_o t < 0 \end{cases} \tag{3/24}$$

Jak widać z rys. 3/3b funkcja $s_u(t)$ ma postać unipolarnego przebiegu prostokątnego, któremu odpowiada następujące rozwinięcie w szereg Fouriera:

$$s_u(t) = \frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\omega_o t-\frac{2}{3\pi}\cos 3\omega_o t+ \ldots \tag{3/25}$$

Po podstawieniu (3/25) do (3/24) otrzymujemy

$$u_k(t) = \frac{a(t)}{2}+\frac{2a(t)}{\pi}\cos\omega_o t-\frac{2a(t)}{3\pi}\cos 3\omega_o t+ \ldots \tag{3/26}$$

Zauważmy, że $u_k(t)$ jest sumą sygnałów zmodulowanych amplitudowo o pulsacjach nośnych równych ω_o, $3\omega_o$, $5\omega_o$, ... Jeśli przyjmiemy — tak jak poprzednio — że filtr pasmowy ma charakterystyki takie, jak na rys. D6/6a i b, i pasmo przepuszczania na tyle wąskie, iż przenosi tylko sygnał pożądany, to na jego wyjściu otrzymamy

$$u_o(t) = \frac{2}{\pi}[a(t) * h_d(t)]\cos[\omega_o t+\theta_p(\omega_o)] \tag{3/27}$$

Przykładowe przebiegi czasowe sygnałów występujących w układzie pokazano na rys. 3/4, a rozkład widmowy $u_k(t)$ na rys. 3/5. Aby uzupełnić rozważania podane w dodatku D5, przyjęto tutaj, że $a(t)$ nie spełnia żadnego z warunków (3/2) i (3/3). W rezultacie otrzymujemy, że w pewnym przedziale czasu obwiednie górna i dolna sygnału zmodulowanego zmieniają znak. Zjawisko to nazywamy *przemodulowaniem sygnału AM*. Jak zobaczymy w rozdziale poświęconym demodulacji może ono powodować zniekształcenia przy stosowaniu niektórych rodzajów demodulatorów. Z rysunku 3/5 widać ponadto, że wydzielenie sygnału pożądanego drogą filtracji jest możliwe, gdy spełniona jest nierówność

$$\omega_M < \frac{\omega_o}{2} \tag{3/28}$$

Zbadajmy jeszcze, jaki efekt uzyskamy zastępując w układzie klucz niesymetryczny kluczem symetrycznym, jak to pokazano na rys. 3/6a. Funkcja kluczująca $s_b(t)$ jest teraz prostokątnym przebiegim bipolarnym (rys. 3/6b), bez składowej stałej, czyli

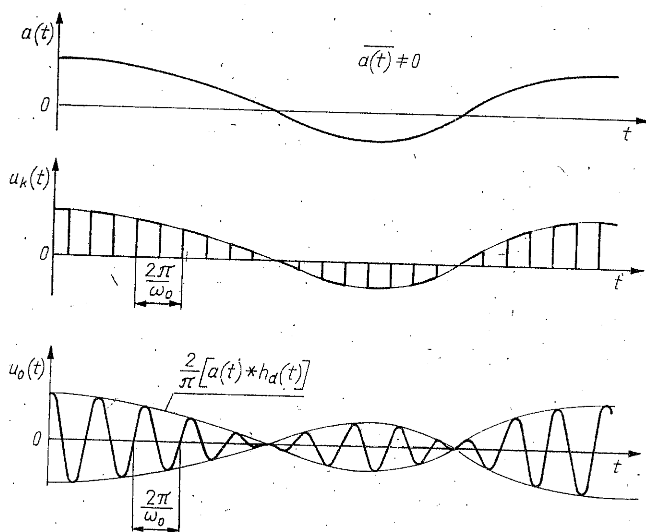
$$s_b(t) = \operatorname{sgn}(\cos\omega_o t) = \begin{cases} 1; & \cos\omega_o t \geqslant 0 \\ -1; & \cos\omega_o t < 0 \end{cases} \tag{3/29}$$

zatem

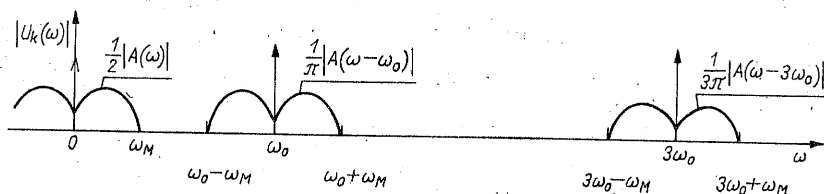
$$u_k(t) = s_b(t)a(t) = \begin{cases} a(t); & \cos\omega_o t \geqslant 0 \\ -a(t); & \cos\omega_o t < 0 \end{cases} \tag{3/30}$$

Szereg Fouriera $s_b(t)$ ma postać

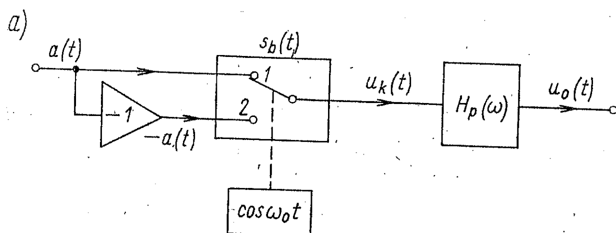
$$s_b(t) = \frac{4}{\pi}\cos\omega_o t-\frac{4}{3\pi}\cos 3\omega_o t+ \ldots \tag{3/31}$$

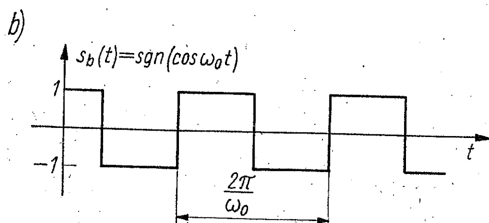


3/4 Przebiegi czasowe sygnałów w modulatorze z niesymetrycznym kluczem synchronicznym



3/5 Widmo sygnału $u_k(t)$





3/6 Modulator z symetrycznym kluczem synchronicznym: a) schemat funkcjonalny; b) przebieg funkcji kluczującej

co po podstawieniu do (3/30) daje

$$u_k(t) = \frac{4}{\pi} a(t)\cos\omega_o t - \frac{4}{3\pi} a(t)\cos 3\omega_o t + \dots \qquad (3/32)$$

Na wyjściu filtru otrzymamy

$$u_o(t) = \frac{4}{\pi} [a(t) * h_d(t)]\cos[\omega_o t + \theta_p(\omega_o)] \qquad (3/33)$$

czyli sygnał ma teraz dwukrotnie większą amplitudę.

Wskutek braku w $u_k(t)$ składnika małoczęstotliwościowego warunek rozłączności widm sygnałów składowych jest łagodniejszy, gdyż zamiast (3/28) otrzymujemy

$$\omega_M < \omega_o \qquad (3/34)$$

Należy zauważyć, że w systemach wąskopasmowych takie nierówności, jak (3/17), (3/21), (3/28) czy (3/34), określające warunki rozłączności widm sygnału użytecznego oraz sygnałów niepożądanych, są zawsze spełnione, gdyż jest spełniona zależność $\omega_M \ll \omega_o$.

Jak wynika z przeprowadzonej analizy w modulatorze z idealnym kluczem synchronicznym możemy uzyskać sygnały *AM* lub *AM-SC* w zależności od tego, czy spełniony jest warunek (3/2), czy też (3/3). Do zalet metody kluczowania można zaliczyć również to, że nie występują sygnały niepożądane o widmie położonym w tym samym pasmie częstotliwości, co widmo sygnału użytecznego, a ponadto — jak zobaczymy później — realizacja praktyczna klucza synchronicznego jest możliwa w szerokim zakresie częstotliwości.

3.1.2 Wytwarzanie sygnałów *SSB-SC* i *SSB*

W dodatku D5 pokazano, że sygnał *SSB-SC* wyraża się wzorem

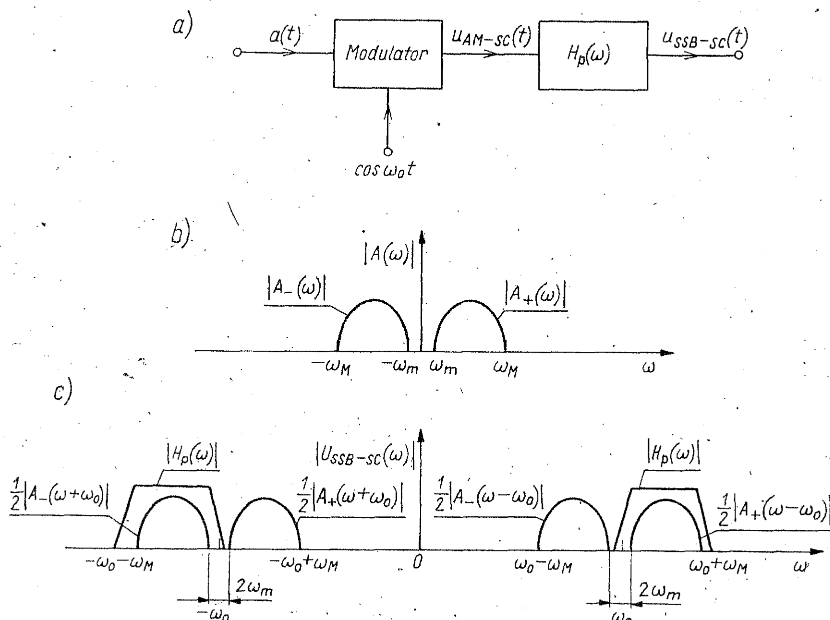
$$u_{SSB\text{-}SC}(t) = \mathrm{Re}\{[a(t) \pm j\hat{a}(t)]e^{j\omega_o t}\} = a(t)\cos\omega_o t \mp \hat{a}(t)\sin\omega_o t \qquad (3/35)$$

gdzie $a(t)$ i $\hat{a}(t)$ stanowią parę transformat Hilberta. Górny znak w obu wyrażeniach dotyczy przypadku występowania tylko górnej wstęgi bocznej, a dolny jest związany z występowaniem tylko wstęgi dolnej. Widma takich sygnałów zostały pokazane na rys. D5/6.

Metoda filtracyjna

Najprostszą koncepcyjnie metodą uzyskania sygnału *SSB-SC* jest wytworzenie najpierw sygnału *AM-SC*, a następnie odfiltrowanie jednej ze wstęg bocznych, jak to pokazano na rys. 3/7a. Przyjmijmy, że sygnał modulujący $a(t)$ ma widmo różne od zera tylko w przedziale (ω_m, ω_M), to znaczy ograniczone od góry i od dołu. Jest to sytuacja typowa np. przy transmisji sygnałów mowy. Przy tym założeniu istnieje wokół pulsacji ω_o przedział o szerokości $2\omega_m$, w którym gęstość widmowa sygnału jest równa zeru. Jeśli więc chcemy odfiltrować

jedną ze wstęg bocznych całkowicie, a drugą przenieść bez zniekształceń, to zastosowany filtr środkowoprzepustowy musi mieć charakterystykę o bardzo stromych zboczach, jak to pokazano na przykładzie charakterystyki idealizowanej na rys. 3/7c. W takich przypadkach stosuje się filtry kwarcowe, ceramiczne



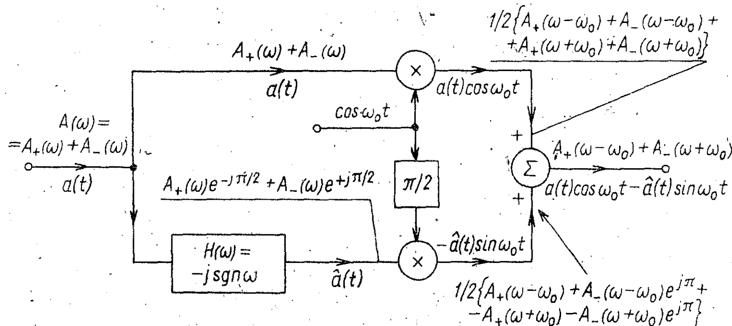
3/7 Wytwarzanie sygnału *SSO-SC* metodą filtracji: a) schemat funkcjonalny; b) widmo sygnału modulującego; c) odfiltrowywanie jednej wstęgi bocznej z sygnału *AM-SC*

lub mechaniczne, w których można uzyskać dużą dobroć. Dla zmniejszenia trudności w praktycznej realizacji filtru o odpowiednio stromych zboczach, filtracji dokonuje się na niezbyt dużych częstotliwościach radiowych (kilkadziesiąt do kilkuset kHz), a następnie przesuwa się widmo sygnału do właściwego poziomu drogą mieszania.

Metoda przesuwania fazy

Bezpośrednio z zależności (3/35) wynika inna metoda generacji sygnału *SSB-SC*, którą ilustruje schemat funkcjonalny podany na rys. 3/8. Stosując dla większej przejrzystości odrębne oznaczenia $A_+(\omega)$ oraz $A_-(\omega)$ na części widma sygnału modulującego $a(t)$, określone odpowiednio dla pulsacji dodatnich i ujemnych (patrz rys. 3/7b), zaznaczono na schemacie postaci czasowe oraz widma sygnałów w poszczególnych punktach układu. Pozwala to na swobodne śledzenie wyników kolejnych operacji dokonywanych na sygnałach zarówno w dziedzinie czasu, jak i dziedzinie częstotliwości. Przyjmując, że faza nośnej podawanej na dolny układ mnożący zostaje przesunięta o $\pi/2$ otrzymaliśmy

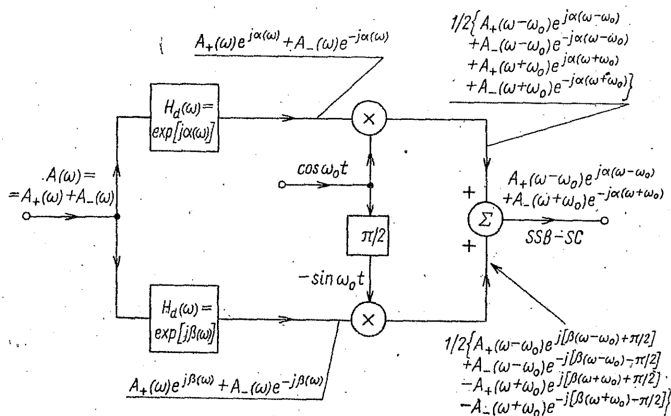
sygnał *SSB-SC* zawierający tylko górne wstęgi boczne. Łatwo sprawdzić, że przesunięcie nośnej o $-\pi/2$ daje na wyjściu sygnał posiadający tylko wstęgę dolną. Zamiast zmiany znaku przesunięcia fazowego można oczywiście dobrać znak, z jakim sygnał z dolnej gałęzi jest dodawany w sumatorze.



3/8 Wytwarzanie sygnału *SSB-SC* metodą przesuwania fazy

Wykonanie przesuwnika fazy, który daje przesunięcie $\pm\pi/2$ dla harmonicznego przebiegu nośnego jest sprawą prostą. Inaczej jest z układem o charakterystyce $H(\omega)$, który ma zapewnić stałe przesunięcie fazowe o $-\pi/2$ w przedziale (ω_m, ω_M). Jak wiemy z dodatku D5, układ, który daje takie przesunięcie w całym zakresie częstotliwości — nazywany filtrem kwadraturowym lub filtrem Hilberta — nie jest fizycznie realizowalny. Aczkolwiek w rozważanym przypadku chodzi tylko o skończony przedział częstotliwości, to jednak dobre przybliżenie pożądanej charakterystyki fazowej pozostaje wciąż zagadnieniem bardzo trudnym.

Nieco łatwiejsze w realizacji rozwiązanie otrzymujemy modyfikując omawiany układ funkcjonalny do postaci pokazanej na rys. 3/9. Zastosowano w nim



3/9 Wytwarzanie sygnału *SSB-SC* metodą kompensacji fazy

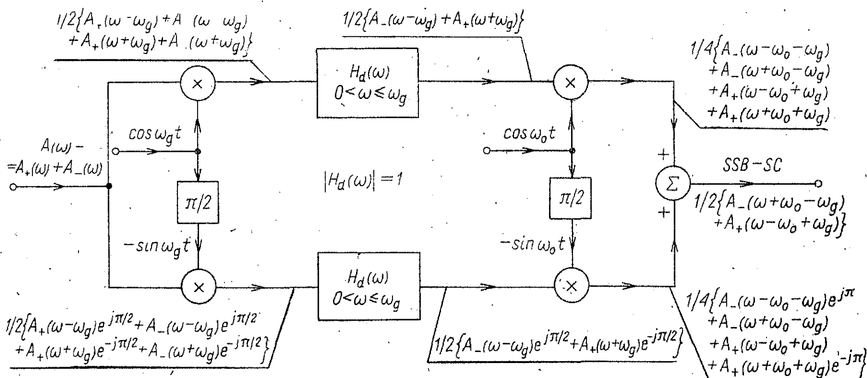
dwa układy przesuwające fazę. Układ górny ma charakterystykę fazową $\alpha(\omega)$, a układ dolny $\beta(\omega)$. Charakterystyki te są tak dobrane, że

$$\beta(\omega)-\alpha(\omega) = \pm\frac{\pi}{2} \tag{3/36}$$

w całym interesującym nas przedziale, tzn. dla $\omega \in (\omega_m, \omega_M)$. Charakterystyki amplitudowe obu układów są oczywiście w tym przedziale częstotliwości stałe, a dla zwiększenia jasności zapisu przyjęliśmy także, że są równe 1. W kolejnych punktach schematu funkcjonalnego podano widma przetwarzanych sygnałów przy założeniu, że $\beta(\omega)-\alpha(\omega) = -\pi/2$. Z uwagi na zależność (3/36) omawiana metoda jest nazywana niekiedy metodą kompensacji fazy. Jak widać, uzyskany sygnał posiada tylko górną wstęgę boczną (patrz rys. 3/7c). Porównując sygnały wyjściowe na schematach z rys. 3/8 i 3/9 widzimy, że w układzie z kompensacją fazy widmo fazowe sygnału uległo zniekształceniu wskutek pojawienia się czynnika $\exp[j\alpha(\omega)]$. Przy transmisji sygnałów mowy nie ma to jednak większego znaczenia, gdyż ucho ludzkie jest nieczułe na zniekształcenia fazowe.

Metoda podwójnego przesunięcia częstotliwości (Weavera)

Jeszcze inną metodę wytwarzania sygnału jednowstęgowego, nie wymagającą stosowania szerokopasmowych przesuwników fazowych, przedstawiono na rys. 3/10. Po każdym z bloków wykonujących kolejno operacje na sygnałach podano rozkłady widmowe sygnałów wyjściowych.

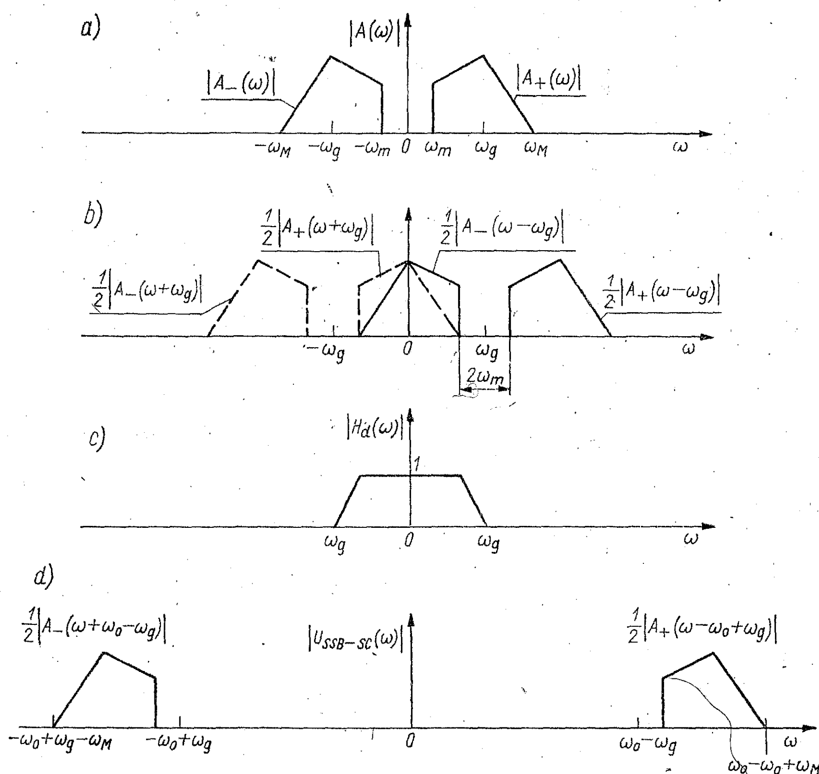


3/10 Wytwarzanie sygnału *SSB-SC* metodą podwójnego przesunięcia częstotliwości (Weavera)

Dodatkowego wyjaśnienia wymaga tylko wybór pulsacji ω_g i jej wpływ na proces filtracji dolnopasmowej. Przyjmijmy, jak to pokazano na rys. 3/11a, że sygnał modulujący ma widmo ograniczone do przedziału (ω_m, ω_M). Oznaczmy pulsację środkową tego widma przez ω_g, tzn.

$$\omega_g = \frac{1}{2}(\omega_m+\omega_M) \tag{3/37}$$

Jeśli sygnał modulujący wymnożymy teraz przez przebieg harmoniczny o pulsacji ω_g, to na wyjściu pierwszej pary układów mnożących otrzymamy widma amplitudowe pokazane na rys. 3/11b. Należy zwrócić uwagę na fakt, że widma składowe $A_+(\omega+\omega_g)$ i $A_-(\omega-\omega_g)$ zajmują ten sam przedział częstotliwości, a wokół pulsacji ω_g istnieje przedział o szerokości $2\omega_m$, w którym gęstość wid-



3/11 Widma sygnałów w modulatorze Weavera: a) widmo sygnału modulującego; b) widmo sygnału po pierwszym układzie mnożącym; c) charakterystyka filtru dolnoprzepustowego; d) widmo wyjściowego sygnału *SSB-SC*

mowa jest równa zeru. Filtr dolnoprzepustowy o pasmie przenoszenia ω_g przenosi oba te widma składowe, eliminuje natomiast $A_-(\omega+\omega_g)$ oraz $A_+(\omega-\omega_g)$. Z uwagi na odstęp widm pożądanych od niepożądanych o długości $2\omega_m$, można zastosować filtr, którego charakterystyka ma duże, ale skończone nachylenie zboczy, co uwidoczniono na rys. 3/11c, rysując idealizowaną, trapezoidalną charakterystykę amplitudową. Gdybyśmy przyjęli, że $\omega_m = 0$, to pożądane widma składowe wydzielić by można tylko za pomocą filtru o prostokątnej, nie realizowalnej charakterystyce. Wynika stąd, że metoda Weavera może mieć zastosowanie przy transmisji sygnału mowy, którego pasmo podstawowe ogranicza się zwykle do przedziału (300 Hz ... 3,5 kHz).

Na wyjściu układu otrzymujemy sygnał *SSB-SC* zawierający tylko górne

wstęgi boczne, co pokazano na rys. 3/11d. Należy zauważyć, że pokazane widmo można traktować, jako górną wstęgę boczną sygnału o pulsacji nośnej równej $\omega_0 - \omega_g$.

Przy wyznaczaniu widm, które podano na schemacie funkcjonalnym przyjęliśmy, że filtry dolnoprzepustowe nie wprowadzają żadnego przesunięcia fazowego. Gdybyśmy to założenie wycofali, to okazałoby się, że widmo fazowe sygnału wyjściowego zostałoby zniekształcone, ale — jak już wspominaliśmy poprzednio — nie ma to znaczenia przy transmisji sygnałów mowy.

Jeśli w sumatorze nie nastąpi dokładne wyzerowanie się niepożądanych widm składowych, to usunąć je można za pomocą filtru, jeśli tylko $\omega_0 > 2\omega_g$. Jest to warunek nie zachodzenia na siebie widm składowych, który otrzymuje się przy założeniu, że $\omega_m = 0$. W rzeczywistości, z uwagi na stosowane zakresy częstotliwości, zawsze zachodzi nierówność $\omega_0 \gg \omega_g$.

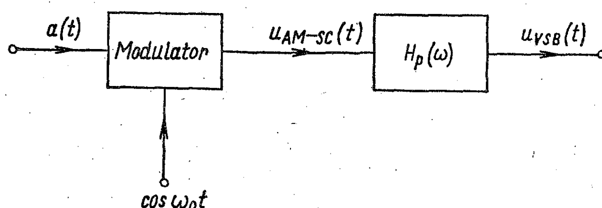
Wytwarzanie sygnału *SSB* nie wymaga odrębnych rozważań. Jest oczywiste, że należy tylko dodać do sygnału *SSB-SC* nośną o odpowiedniej amplitudzie.

3.1.3 Sygnał ze szczątkową wstęgą boczną *VSB* i sposób jego wytwarzania

Trudności, jakie występują przy realizacji praktycznej omówionych poprzednio modulatorów jednowstęgowych, a z drugiej strony zbytecznie szerokie pasmo zajmowane przez sygnał *AM-SC*, którego wytworzenie jest z kolei znacznie prostsze, doprowadziły do opracowania systemu *VSB* (ang.; *Vestigial Sideband*) Sygnał ze szczątkową wstęgą boczną ma następującą postać:

$$u_{VSB}(t) = \mathrm{Re}\{[a(t)+j\tilde{a}(t)]e^{j\omega_0 t}\} = a(t)\cos\omega_0 t - \tilde{a}(t)\sin\omega_0 t \tag{3/38}$$

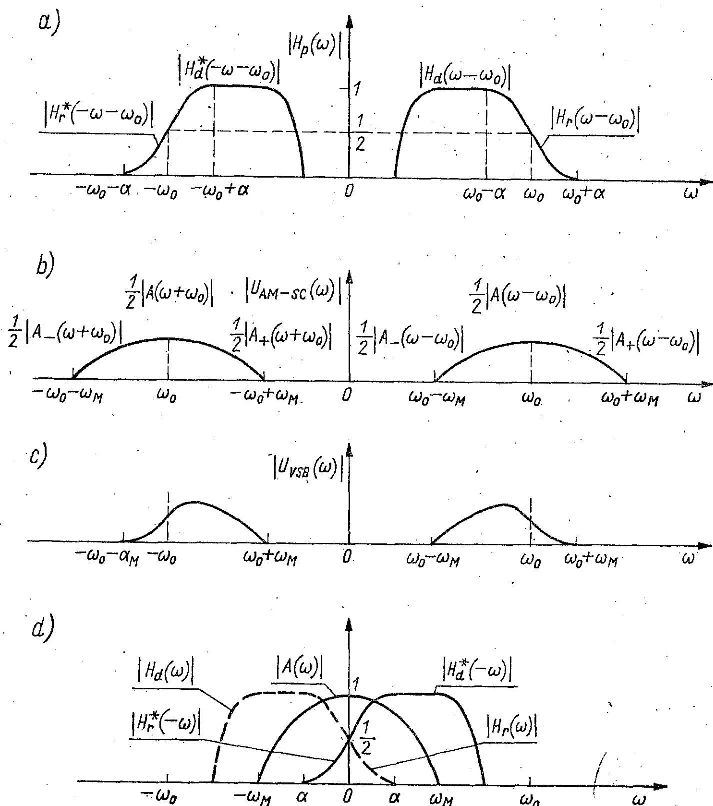
W systemie *VSB* stosuje się filtr o specjalnie kształtowanej charakterystyce, odbiegającej od idealnego prostokątnego kształtu, w wyniku czego jest transmitowana zniekształcona w pewien kontrolowany sposób jedna wstęga boczna oraz szczątkowe widmo drugiej wstęgi bocznej. Ten szczególny kształt charakterystyki filtru powoduje, że obwiednią składowej synfazowej sygnału $u_{VSB}(t)$ jest niezniekształcony sygnał modulujący $a(t)$, natomiast obwiednia $\tilde{a}(t)$ składowej kwadraturowej nie stanowi już — jak to miało miejsce w przypadku *SSB-SC* — transformaty Hilberta sygnału $a(t)$, ale jest z nim związana inną zależnością, która zostanie wyprowadzona w toku dalszych rozważań. W rezultacie sygnał *VSB* zajmuje pasmo nieco szersze niż sygnał *SSB-SC*, ale jego generacja jest tylko nieznacznie trudniejsza, niż wytworzenie sygnału *AM-SC*.



3/12 Schemat funkcjonalny modulatora *VSB* z filtrem pasmowym

Aby wyprowadzić warunek, który pozwoli na przesyłanie w systemie *VSB* niezniekształconej informacji, rozważmy układ funkcjonalny pokazany na rys. 3/12. Charakterystyka amplitudowa filtru pasmowego przedstawiona jest na rys. 3/13a. Jedno zbocze tej charakterystyki, które będzie nas szczególnie interesować, oznaczyliśmy symbolem $H_r(\omega)$. Zauważmy, że charakterystyka $H_p(\omega)$ spełnia warunek

$$H_p(\omega) = H_p^*(-\omega) \tag{3/39}$$



3/13 Wytwarzanie sygnału *VSB*: a) charakterystyka amplitudowa filtru pasmowego; b) widmo amplitudowe sygnału *AM-SC*; c) widmo amplitudowe sygnału *VSB*; d) charakterystyka amplitudowa równoważnego filtru dolnoprzepustowego

ale nie wykazuje symetrii względem pulsacji ω_0, a więc przy wyznaczaniu odpowiedzi filtru na wymuszenie w postaci sygnału zmodulowanego *AM-SC* najwygodniej będzie posłużyć się pojęciem obwiedni zespolonej i zależnościami ogólnymi, wyprowadzonymi w dodatku D6.

Sygnał wejściowy podawany na filtr

$$u_{AM\text{-}SC}(t) = a(t)\cos\omega_0 t \tag{3/40}$$

ma obwiednię zespoloną o postaci

$$v_i(t) = v_{iI}(t) + jv_{iQ}(t) = a(t) + j0 \qquad (3/41)$$

gdzie $v_{iI}(t)$ oraz $v_{iQ}(t)$ stanowią odpowiednio składową synfazową i kwadraturową. Przykładowe widmo amplitudowe sygnału $u_{AM\text{-}SC}(t)$ przy założeniu, że $a(t)$ ma widmo ograniczone do $\omega_M < \omega_o$ pokazano na rys. 3/13b, a odpowiadające mu widmo amplitudowe sygnału wyjściowego na rys. 3/13c.

$\mathscr{F}$ — transformaty składowych synfazowej i kwadraturowej obwiedni zespolonej sygnału wyjściowego są dane wzorami (D6/26) i (D6/27), jednak wobec faktu, że

$$V_{iQ}(\omega) = \mathscr{F}[v_{iQ}(t)] = 0 \qquad (3/42)$$

zależności te upraszczają się do postaci

$$V_{oI}(\omega) = V_{iI}(\omega) H_{dI}(\omega) \qquad (3/43)$$

$$V_{oQ}(\omega) = V_{iI}(\omega) H_{dQ}(\omega) \qquad (3/44)$$

gdzie

$$H_{dI}(\omega) = \frac{1}{2}[H_d(\omega) + H_d^*(-\omega)] \qquad (3/45)$$

$$H_{dQ}(\omega) = \frac{1}{2j}[H_d(\omega) - H_d^*(-\omega)] \qquad (3/46)$$

a $H_d(\omega)$ stanowi charakterystykę amplitudowo-fazową równoważnego filtru dolnoprzepustowego. Moduły $H_d(\omega)$ i $H_d^*(-\omega)$ oraz $V_i(\omega) = A(\omega)$ pokazano na rys. 3/13d.

Przyjmijmy, że

$$H_{dI}(\omega) = \frac{1}{2}[H_d(\omega) + H_d^*(-\omega)] = 1 \text{ dla } |\omega| \leqslant \omega_M \qquad (3/47)$$

Wówczas składowa synfazowa obwiedni zespolonej sygnału wyjściowego ma postać

$$v_{oI}(t) = \mathscr{F}^{-1}[V_{iI}(\omega)] = a(t) \qquad (3/48)$$

Jeśli składową kwadraturową tej obwiedni oznaczymy przez $\tilde{a}(t)$, tzn.

$$\tilde{a}(t) = \mathscr{F}^{-1}[V_{iI}(\omega) H_{dQ}(\omega)] \qquad (3/49)$$

to $v_o(t)$ można zapisać jako

$$v_o(t) = a(t) + j\tilde{a}(t) \qquad (3/50)$$

i ostatecznie sygnał wyjściowy przyjmuje postać (3/38), tj.

$$u_{VSB}(t) = a(t)\cos\omega_o t - \tilde{a}(t)\sin\omega_o t$$

Jak więc widzimy, przy spełnieniu warunku (3/47) składowa synfazowa zawiera niezniekształcony sygnał informacyjny, co — jak zobaczymy w następnym rozdziale — ma istotne znaczenie przy demodulacji sygnału *VSB*.

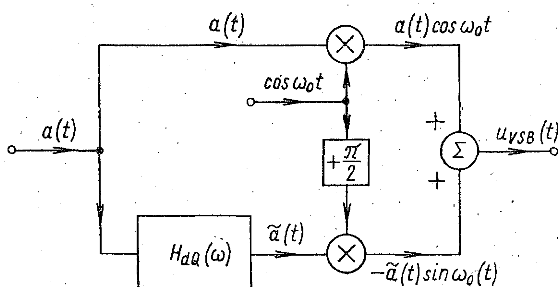
Jak widać z rys. 3/13d warunek (3/47) oznacza, że $H_p(\omega)$ musi mieć tzw.

symetrię uzupełniającą (szczątkowe widmo usuwanej wstęgi bocznej kompensuje stłumioną część widma wstęgi przenoszonej), lub inaczej, część charakterystyki oznaczona przez $H_r(\omega)$ musi wykazywać symetrię nieparzystą względem linii pionowej, przechodzącej przez ω_0. Realizacja filtru, którego charakterystyka przybliża z żądaną dokładnością warunek (3/47) nie przedstawia specjalnych trudności.

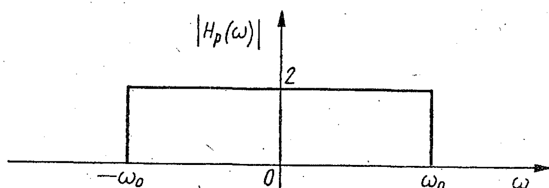
Łatwo zauważyć, że równość (3/47) może być zastąpiona — bez wprowadzenia zniekształceń do składowej synfazowej — warunkiem ogólniejszym

$$H_d(\omega)+H_d^*(-\omega) = C \neq 1 \quad \text{dla} \quad |\omega| \leqslant \omega_M \tag{3/51}$$

gdyż wówczas, jak wynika z (3/43), obwiednia $a(t)$ jest tylko mnożona przez stałą C.



3/14 Schemat funkcjonalny modulatora *VSB* z filtrem dolnoprzepustowym



3/15 Charakterystyka amplitudowa filtru idealnego, eliminującego górne wstęgi boczne

Wykorzystując zależności (3/48), (3/49) i (3/38) możemy narysować, zamiast układu podanego na rys. 3/12, układ funkcjonalny modulatora *VSB* zawierający filtr dolnoprzepustowy, jak to pokazano na rys. 3/14. Nietrudno również sprawdzić, że jeśli zamiast filtru o charakterystyce z rys. 3/13a zastosujemy filtr idealny o charakterystyce prostokątnej, pokazanej na rys. 3/15, to

$$H_{dI}(\omega) = 1 \quad \text{a} \quad H_{dQ}(\omega) = j\,\mathrm{sgn}\,\omega \tag{3/52}$$

i w układzie tym otrzymamy sygnał *SSB-SC* zawierający tylko dolną wstęgę boczną. Będzie to wówczas jedynie modyfikacja układu z rys. 3/9a, który eliminował dolną, a zachowywał górną wstęgę boczną.

W uzupełnieniu tych rozważań dokonajmy jeszcze porównania mocy średnich przenoszonych przez składowe synfazowe i kwadraturowe sygnałów *SSB-SC*

i *VSB*. Ponieważ dla sygnału *SSB-SC* $a(t)$ i $\hat{a}(t)$ stanowią parę transformat Hilberta, więc ich widma amplitudowe są identyczne. Wynika stąd, że moce średnie sygnałów $a(t)$ i $\hat{a}(t)$ są takie same. Inaczej jest w przypadku *VSB*. Z zależności (3/49) oraz (3/46) i rys. 3/13d widać, że widma amplitudowe $a(t)$ i $\tilde{a}(t)$ różnią się od siebie w istotny sposób i dlatego moc średnia przenoszona przez $\tilde{a}(t)$ będzie z reguły znacznie mniejsza, niż moc sygnału modulującego $a(t)$. Fakt ten ma istotne znaczenie przy demodulacji sygnałów *SSB-SC* i *VSB*.

3.1.4 Sygnał z kwadraturową modulacją amplitudy *QAM* i sposób jego wytwarzania

Ostatnio coraz szersze zastosowanie znajduje system przesyłania informacji wykorzystujący tak zwaną *kwadraturową modulację amplitudy*, lub inaczej modulację amplitudy z nośnymi w kwadraturze — *QAM* (ang.; *Quadrature Amplitude Modulation*). W systemie tym dwa niezależne sygnały modulujące są przesyłane w tym samym pasmie częstotliwości za pomocą dwu ortogonalnych harmonicznych nośnych, o tej samej pulsacji ω_0. Dlatego mówi się o zwielokrotnieniu ortogonalnym w dziedzinie częstotliwości.

Niech $a(t)$ i $b(t)$ oznaczają dwa sygnały modulujące. Sygnałem *QAM* nazywamy sygnał o postaci

$$u_{QAM}(t) = \text{Re}\{[a(t)+\text{j}b(t)]e^{j\omega_0 t}\} = a(t)\cos\omega_0 t - b(t)\sin\omega_0 t \tag{3/53}$$

Jak widać $a(t)$ i $b(t)$ stanowią odpowiednio składową synfazową i składową kwadraturową obwiedni zespolonej, tj.

$$v_I(t) = a(t) \quad \text{oraz} \quad v_Q(t) = b(t) \tag{3/54}$$

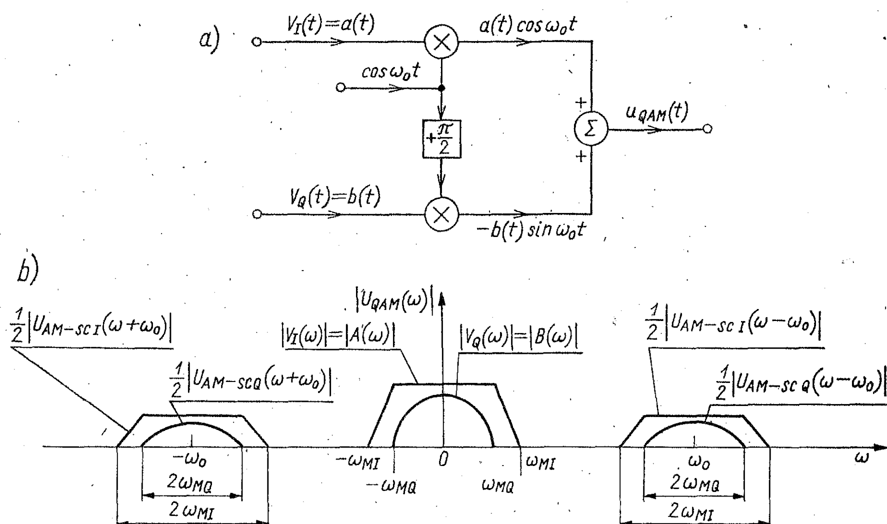
Jeśli oba sygnały modulujące spełniają warunek

$$\overline{a(t)} = \overline{b(t)} = 0 \tag{3/55}$$

to $u_{QAM}(t)$ jest sumą dwóch sygnałów *AM-SC*, których nośne są przesunięte w fazie o 90°. Należy przy tym zauważyć, że aczkolwiek każdy z sygnałów składowych należy do klasy modulacji liniowych, to sygnał wypadkowy, *QAM*, nie spełnia warunku liniowości podanego dla operatora modulacji w dodatku D5.

Sposób wytwarzania sygnału *QAM* wynika bezpośrednio z zależności (3/53) i został przedstawiony za pomocą schematu funkcjonalnego na rys. 3/16a, natomiast widma amplitudowe sygnałów modulujących oraz sygnału zmodulowanego pokazano na rys. 3/16b. Założyliśmy przy tym, że $v_I(t)$ i $v_Q(t)$ mają widma ograniczone odpowiednio do $\omega_{MI} < \omega_0$ oraz $\omega_{MQ} < \omega_0$. Szerokość zajętego pasma określa zatem sygnał o szerszym widmie.

W związku ze specyficzną strukturą sygnału *QAM* jest jeszcze jedno zagadnienie, na które chcemy zwrócić uwagę. Z reguły sygnał wyjściowy z modulatora jest podawany na filtr pasmowy, który usuwa sygnały niepożądane o widmach leżących poza przedziałem częstotliwości zajętym przez sygnał użyteczny. Filtracji pasmowej sygnałów zmodulowanych poświęciliśmy dodatek D6. Pokazaliśmy tam, między innymi, że jeśli charakterystyka amplitudowa $H_p(\omega)$ wykazuje symetrię parzystą względem pulsacji ω_0, a charakterystyka fazowa $\theta_p(\omega)$



3/16 Wytwarzanie sygnału *QAM*: a) schemat funkcjonalny modulatora; b) widma amplitudowe sygnału *QAM* oraz sygnałów składowych

symetrię nieparzystą, to w procesie filtracji nie występuje wpływ składowej synfazowej na składową kwadraturową i odwrotnie (patrz zależności (D6/30)... ...(D6/33)). Ma to istotne znaczenie dla sygnału *QAM*, gdyż w przypadku istnienia takich powiązań (zależności (D6/24)...(D6/27)) następuje przenikanie informacji z jednego sygnału do drugiego, a zatem pojawiają się bardzo groźne zniekształcenia.

3.2 PRZYKŁADY ROZWIĄZAŃ UKŁADOWYCH

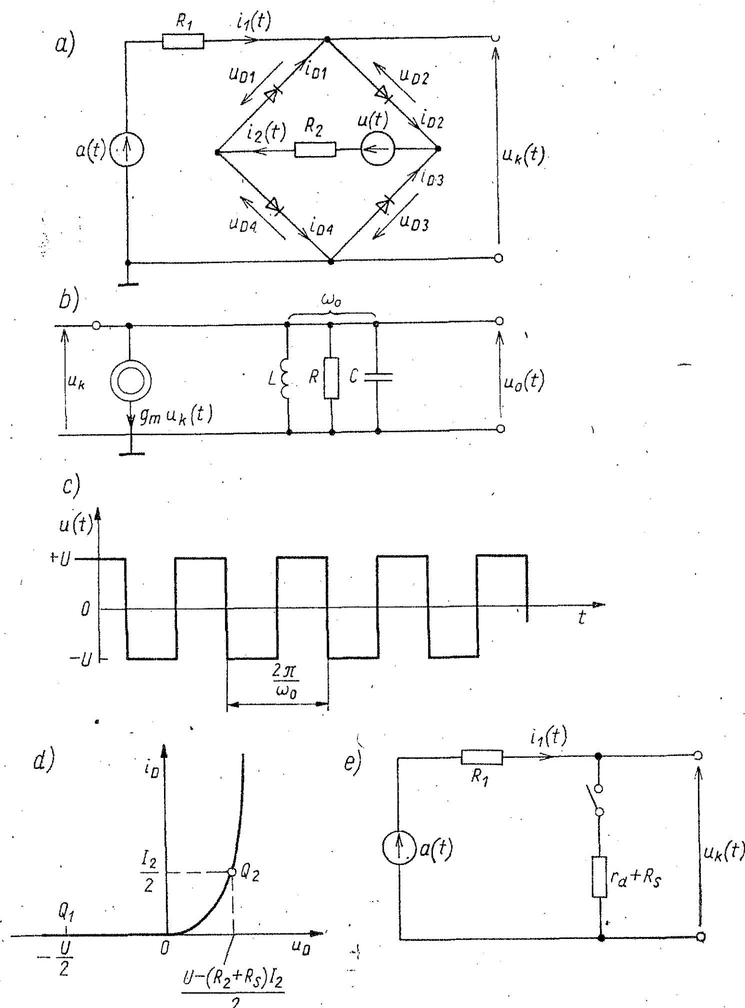
Jak wynika z analizy układów funkcjonalnych, podstawowym zagadnieniem jest wytworzenie sygnałów dwuwstęgowych z nośną i bez nośnej, czyli *AM* i *AM-SC*, pokazaliśmy bowiem, że w wyniku dodatkowych operacji wykonanych na sygnale *AM-SC* można uzyskać także sygnały *SSB-SC, VSB* czy *QAM*. Dlatego ograniczymy się tutaj tylko do omówienia modulatorów wytwarzających sygnały dwuwstęgowe.

Przy omawianiu rozwiązań układowych położymy główny nacisk na układy, które mogą pracować wg metody kluczowania, a to zarówno ze względu na zalety samej metody, jak i na możliwość uzyskania czytelnego opisu analitycznego ich działania. Istotnym elementem w modulatorach tej klasy jest układ, którego funkcjonowanie dostatecznie dobrze przybliża pracę idealnego klucza synchronicznego. W praktyce często stosuje się do tego celu odpowiednie konfiguracje diod. Dlatego obecnie są produkowane scalone zestawy dwu- i czterodiodowe (przy użyciu diod krzemowych Schottky'ego), które cechuje precyzyjna symetria charakterystyk poszczególnych diod w bardzo szerokim zakresie częstotliwości.

3.2.1. Modulator z niesymetrycznym kluczem diodowym

Rozważmy układ pokazany na rys. 3/17, odpowiadający schematowi funkcjonalnemu z rys. 3/3a. Układ modulatora przedstawiono w dwóch fragmentach. Na rysunku 3/17a pokazano sam przetwornik nieliniowy pełniący funkcję jednobiegunowego klucza synchronicznego, a na rys. 3/17b małosygnałowy model wzmacniacza, który pełni rolę separatora pomiędzy przetwornikiem i prostym filtrem pasmowym.

Zbadajmy najpierw działanie przetwornika diodowego przyjmując, że $a(t)$ jest sygnałem modulującym, a $u(t)$ przebiegim prostokątnym o pulsacji podsta-



3/17 Modulator z niesymetrycznym kluczem diodowym: a) układ pełniący rolę klucza synchronicznego; b) małosygnałowy układ zastępczy wzmacniacza z filtrem pasmowym; c) napięcie sterujące; d) charakterystyka pojedynczej diody; e) układ zastępczy przetwornika diodowego

wowej ω_0, przedstawionym na rys. 3/17c. Jak łatwo zauważyć, gdy $u(t)$ ma zwrot podany na rysunku, mostek stanowi w przybliżeniu zwarcie i $u_k(t)$ jest bliskie zeru. Przy zwrocie przeciwnym $u(t)$ polaryzuje diody w kierunku zaporowym, mostek stanowi rozwarcie i $u_k(t) = a(t)$.

Rozważmy oba te stany mostka w sposób bardziej szczegółowy. Przyjmijmy najpierw, że $u(t) = -U$ i wyznaczmy taką wartość tego napięcia, przy której diody będą spolaryzowane zaporowo przez całe pół okresu $2\pi/\omega_0$. Z rysunku 3/17a widać, że oprócz $u(t)$ na diody działa także napięcie sygnału modulującego $a(t)$. Jeśli przyjmiemy, że napięcie, przy którym diody zaczynają przewodzić wynosi U_D, to z bilansu napięć widać natychmiast, że dla $a(t) > 0$ diody D_2 i D_4 nie będą przewodziły, jeśli

$$U > a(t)_{\max} - 2U_D \tag{3/56}$$

Identyczny rezultat otrzymujemy dla diod D_1 i D_3 przyjmując, że $a(t) < 0$. Zatem nierówność (3/56) gwarantuje, że przez pół okresu kiedy $u(t) = -U$, mostek stanowi rozwarcie. Dla $a(t) = 0$ sytuacji tej odpowiada spoczynkowy punkt pracy Q_1, którego przykładowe położenie na charakterystyce pojedynczej diody zaznaczono na rys. 3/17d.

Załóżmy teraz, że napięcie sterujące mostkiem ma zwrot dodatni i przyjmuje wartość $u(t) = +U$, której odpowiada prąd $i_2(t) = I_2$. Z założenia o identyczności diod wynika, że prądy $i_1(t)$ oraz $i_2(t)$ rozpływają się pomiędzy odpowiednie ramiona mostka w sposób równomierny. Przy $a(t) = 0$ przez diody płynie więc prąd $I_2/2$, który określa nowy spoczynkowy punkt pracy Q_2, zaznaczony na rys. 3/17d. Jeśli $a(t) \neq 0$, to słuszne są równości

$$\begin{aligned} i_{D1}(t) &= \frac{1}{2}[I_2 - i_1(t)] = i_{D3}(t) \\ i_{D2}(t) &= \frac{1}{2}[I_2 + i_1(t)] = i_{D4}(t) \end{aligned} \tag{3/57}$$

Opisując charakterystykę każdej z diod zależnością

$$i_D = I_S\left[\exp\left(\frac{u_D - R_s i_D}{U_T}\right) - 1\right] \approx I_S \exp\left(\frac{u_D - R_s i_D}{U_T}\right) \tag{3/58}$$

gdzie R_s oznacza rezystancję szeregową diody, otrzymamy na podstawie (3/57) następujące wyrażenie na napięcie $u_k(t)$:

$$\begin{aligned} u_k(t) &= u_{D4} - u_{D1} = R_s(i_{D4} - i_{D1}) + \\ &+ U_T \ln\frac{i_{D4}}{i_{D1}} = R_s i_1 + U_T \ln\left(\frac{1 + i_1/I_2}{1 - i_1/I_2}\right) \end{aligned} \tag{3/59}$$

Po rozwinięciu wyrazu logarytmicznego w szereg potęgowy dostajemy

$$u_k = R_s i_1 + U_T \frac{2i_1}{I_2}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{i_1}{I_2}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{i_1}{I_2}\right)^4 + \dots\right] \tag{3/60}$$

Wprowadzając oznaczenie

$$r_d = \frac{1}{g_d} = \frac{U_T}{I_2/2} \tag{3/61}$$

na rezystancję różniczkową diody w punkcie Q_2 (czyli przy prądzie polaryzującym $I_2/2$) i porządkując wyrażenie (3/60), otrzymamy

$$u_k = r_d i_1 (1+g_d R_s)\left[1+\frac{1}{3(1+g_d R_s)}\left(\frac{i_1}{I_2}\right)^2+\ldots\right] \tag{3/62}$$

Jak widać z (3/62) napięcie $u_k(t)$ jest nieliniową funkcją $i_1(t)$, a więc i sygnału modulującego $a(t)$. Dla uniknięcia zniekształceń należy zatem tak dobrać położenie punktu Q_2, aby wyrazy nieliniowe w szeregu (3/62) były pomijalnie małe w porównaniu z wyrazem liniowym. Powinna więc być spełniona nierówność

$$\frac{1}{3(1+g_d R_s)}\left(\frac{i_1}{I_2}\right)^2 \ll 1 \tag{3/63}$$

gdyż wówczas zależność (3/62) upraszcza się do postaci

$$u_k = r_d(1+g_d R_s) i_1 = (R_s+r_d) i_1 \tag{3/64}$$

Z uzyskanych dotychczas rezultatów widać, że przy spełnieniu nierówności (3/56) oraz (3/63) pracę układu z rys. 3/17a — w obu rozważanych stanach mostka — można zilustrować za pomocą układu zastępczego podanego na rys. 3/17e. Mostek diodowy jest reprezentowany przez gałąź zawierającą klucz idealny oraz rezystancję (R_s+r_d), stanowiącą rezystancję zastępczą mostka w stanie przewodzenia.

Wyznaczmy teraz taką wartość napięcia sterującego $u(t) = +U$, przy której będzie spełniona nierówność (3/63), czyli punkt pracy Q_2 przyjmie pożądane położenie. Zauważmy w związku z tym, że z punktu widzenia źródła $u(t)$ mostek jest zrównoważony, a każda z gałęzi zawierającej dwie diody jest dołączona do jego zacisków przez rezystancję R_2. W zależności (3/58) uwidoczniono, że rezystancja szeregowa diod w stanie przewodzenia wynosi R_s. Wpływ takiej rezystancji na charakterystykę diody przeanalizowaliśmy w dodatku D1. Z rozważań tych wynika, że jeśli spełniony zostanie warunek $1+g_d R_s \gg 1$, to każdą diodę rzeczywistą zastąpić można diodą idealną połączoną w szereg z rezystancją R_s oraz źródłem napięcia stałego o wydajności U_D, gdzie

$$U_D = U_T \ln\frac{I_2}{2I_s} \tag{3/65}$$

Z bilansu napięć otrzymujemy więc natychmiast, że

$$I_2 = \frac{U-2U_D}{R_2+R_s} \tag{3/66}$$

Po podstawieniu tej wartości prądu do (3/61), r_d można wyrazić wzorem

$$r_d = (R_2+R_s)\frac{2U_T}{U-2U_D} \tag{3/67}$$

Przyjmijmy, że zniekształcenia nieliniowe będą pomijalne, jeśli nierówność (3/63) zostanie spełniona w następujący sposób:

$$\frac{1}{3(1+g_d R_s)}\left[\frac{i_1(t)_{max}}{I_2}\right]^2 < 0{,}01 \tag{3/68}$$

Jeśli teraz do (3/68) podstawimy za I_2 wyrażenie (3/66), a za $i_1(t)_{max}$ zależność

$$i_1(t)_{max} = \frac{a(t)_{max}}{R_1+R_s+r_d} \tag{3/69}$$

uzyskaną na podstawie układu zastępczego z rys. 3/17e, to otrzymamy nierówność określającą najmniejszą dopuszczalną wartość napięcia sterującego dla stanu przewodzenia mostka

$$U > \frac{5{,}8|a(t)|_{max}}{(1+g_d R_s)^{1/2}}\,\frac{R_2+R_s}{R_1+R_s+r_d}+2U_D \tag{3/70}$$

Ponieważ zwykle R_2 i R_1 są znacznie większe niż R_s i r_d nierówność (3/70) można zapisać w uproszczonej formie

$$U > \frac{5{,}8|a(t)|_{max}}{\sqrt{1+g_d R_s}}\,\frac{R_2}{R_1}+2U_D \tag{3/71}$$

Aby więc mostek diodowy spełniał prawidłowo rolę klucza synchronicznego — przy założonym nierównością (3/68) dopuszczalnym poziomie zniekształceń nieliniowych — muszą zostać spełnione równocześnie dwie nierówności: (3/56) oraz (3/71). Układ z rys. 3/17a sprowadza się wówczas do układu zastępczego podanego na rys. 3/17e.

Z układu zastępczego widać, że napięcie $u_k(t)$ wyraża się zależnością

$$u_k(t) = s_u'(t)a(t) \tag{3/72}$$

gdzie

$$s_u'(t) = \begin{cases} 1 & u(t) = -U \\ \dfrac{R_s+r_d}{R_1+R_s+r_d} & u(t) = +U \end{cases} \tag{3/73}$$

Jak łatwo sprawdzić, $s_u'(t)$ można wyrazić za pomocą funkcji $s_u(t)$ określonej dla idealnego klucza niesymetrycznego wzorem (3/23), w następujący sposób:

$$s_u'(t) = s_u(t)+\frac{R_s+r_d}{R_1+R_s+r_d}[1-s_u(t)] = \frac{R_s+r_d}{R_1+R_s+r_d}+\frac{R_1}{R_1+R_s+r_d}s_u(t) \tag{3/74}$$

Wynika stąd, że szereg Fouriera $s_u(t)$ można otrzymać z szeregu (3/25) przez zmianę wartości średniej (stałej) oraz pomnożenie amplitud wszystkich harmonicznych przez stały czynnik. Można więc wykorzystać rezultaty analizy przeprowadzonej dla układu funkcjonalnego z rys. 3/3 wprowadzając we wzorach stosowne korekty. I tak składnik $u_k(t)$ mający nośną o pulsacji ω_o ma postać

$$\frac{2}{\pi}\,\frac{R_1}{R_1+R_s+r_d}\,a(t)\cos\omega_o t \tag{3/75}$$

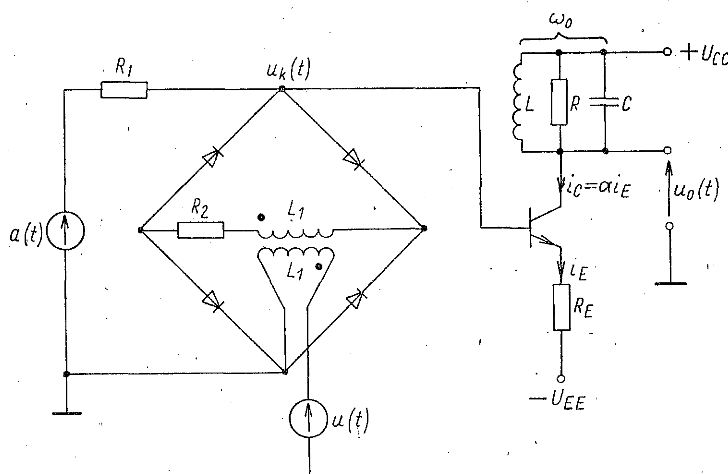
Jeśli przyjmiemy, że filtr pasmowy z rys. 3/17b usunie pozostałe składniki, to napięcie wyjściowe wyrazi się wzorem

$$u_O(t) = -\frac{2}{\pi}\frac{R_1}{R_1+R_s+r_d} g_m[a(t) * h_d(t)]\cos\omega_o t \tag{3/76}$$

gdzie $h_d(t)$ jest odpowiedzią impulsową odpowiednika dolnoprzepustowego równoległego obwodu rezonansowego (dla tego filtru $\theta_p(\omega_o) = 0$). Przy założeniu, iż charakterystyka amplitudowa obwodu jest stała w przedziale, w którym istnieje widmo sygnału pożądanego, można napisać w przybliżeniu, że

$$u_O(t) \approx -\frac{2}{\pi}\frac{R_1}{R_1+R_s+r_d} g_m Ra(t)\cos\omega_o t \tag{3/77}$$

Z powyższych wzorów widać, że istnienie rezystancji (R_s+r_d) w gałęzi zawierającej klucz powoduje zmniejszenie napięcia wyjściowego modulatora w stosunku $R_1/(R_1+R_s+r_d)$.



3/18 Schemat ideowy modulatora z niesymetrycznym kluczem synchronicznym

Realizację praktyczną omawianego modulatora przedstawiono na rys. 3/18. Dołączenie napięcia sterującego poprzez transformator umożliwia uziemienie każdego z generatorów. Na schemacie przyjęliśmy przekładnię transformatora równą 1 wyłącznie po to, aby oznaczenia tam stosowane miały dokładnie to samo znaczenie, co oznaczenia używane w poprzednio analizowanym układzie. Jeżeli założymy, że

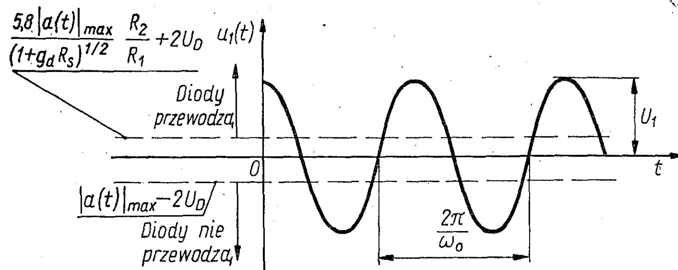
$$(1+\beta)R_E \gg R_1$$

to tranzystor nie obciąża mostka. Przyjmując ponadto, iż rezystancja R obwodu opisuje wystarczająco dobrze jego właściwości w przedziale, w którym istnieje

widmo składnika pożądanego, możemy wyrazić $u_O(t)$ w następujący, uproszczony sposób:

$$u_O(t) \approx U_{CC} - \frac{2}{\pi} \frac{R_1}{R_1 + R_s + r_d} \frac{\alpha R}{R_E} a(t) \cos\omega_o t \tag{3/78}$$

Jak wykazała przeprowadzona analiza, sterowanie mostkiem diodowym za pomocą przebiegu prostokątnego powoduje, iż punkt pracy diod okresowo przyjmuje położenie Q_1 lub Q_2, dzięki czemu układ z rys. 3/17a można było zastąpić układem zawierającym klucz idealny i stałą rezystancję $R_s + r_d$ (rys. 3/17e). Taki kształt napięcia $u(t)$ nakłada jednakże odpowiednie wymagania na transformator, który musi przenieść przynajmniej kilka harmonicznych tego przebiegu. Wymagania te można złagodzić, stosując jako napięcie sterujące przebieg sinusoidalny $u_1(t)$ o odpowiednio dużej amplitudzie U_1. Pokazano to na rys. 3/19, gdzie liniami przerywanymi zaznaczono także wartości napięć



3/19 Sterowanie przetwornikiem diodowym za pomocą napięcia sinusoidalnego

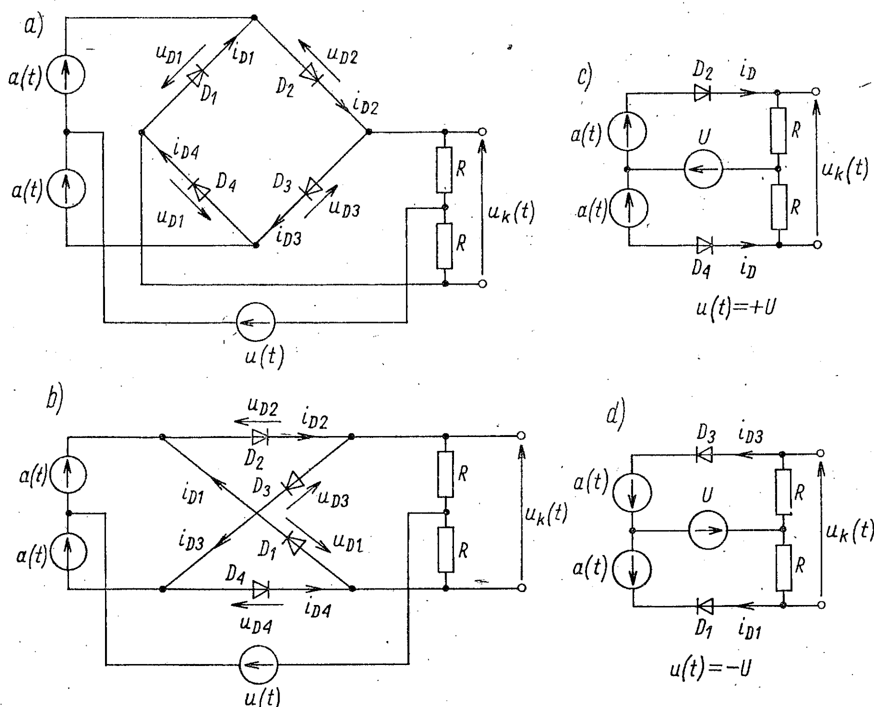
określone prawymi stronami nierówności (3/56) i (3/71). Jak widać, przebieg $u_1(t)$ pomiędzy tymi dwiema wartościami jest zbliżony do przebiegu prostokątnego. Przekroczenie przez $u_1(t)$ linii górnej oznacza, że punkt pracy diod przesuwa się na prawo od Q_2, wędrując po coraz bardziej liniowej części charakterystyk, a więc nierówność (3/71) jest cały czas spełniona (aczkolwiek r_d ulega pewnym zmianom). To samo dotyczy nierówności (3/56), gdy punkt pracy znajduje się na lewo od Q_1. Zauważmy, że gdybyśmy zastosowali napięcie sinusoidalne o takiej amplitudzie, jaką poprzednio określiliśmy dla prostokątnego przebiegu sterującego, to punkt pracy przemieszczał by się w sposób ciągły po charakterystykach diod, osiągając pozycje Q_1 i Q_2 jedynie w tych momentach czasu, kiedy $u_1(t)$ przyjmowałoby swoje wartości ekstremalne. Oznaczałoby to, że z punktu widzenia sygnału $a(t)$ mostka diodowego nie można zastąpić układem zawierającym w gałęzi z kluczem rezystancję liniową, jak to pokazano na rys. 3/17e.

3.2.2 Modulator z symetrycznym kluczem diodowym

Inne połączenie diod w mostku, niż na rys. 3/17a pozwala na uzyskanie klucza symetrycznego. Rozważmy układ nazywany modulatorem pierścieniowym, którego schemat w dwu postaciach spotykanych w literaturze podano na rys.

3/20a i b. Załóżmy tak jak poprzednio, że $a(t)$ jest dolnopasmowym sygnałem modulującym, a napięcie $u(t)$ ma postać podaną na rys. 3/17c i rozważmy dwa stany układu, związane z przyjmowaniem przez $u(t)$ wartości $+U$ i $-U$.

Przyjmijmy dla uproszczenia, że każda z diod zaczyna przewodzić, gdy napięcie na jej zaciskach przekroczy wartość U_D. Z bilansu napięć wynika wów-



3/20 Modulator z symetrycznym kluczem diodowym (pierścieniowy): a) i b) schematy modulatora; c) układ dla $u(t) = +U$, przewodzą diody D_2 i D_4; d) układ dla $u(t) = -U$, przewodzą diody D_1 i D_3

czas, że gdy $u(t) = +U$, czyli ma zwrot podany na rys. 3/20a(b), to diody D_2 i D_4 przewodzą przez pół okresu $2\pi/\omega_o$, jeśli spełniona jest nierówność

$$U > |a(t)|_{max} + U_D \qquad (3/79)$$

Aby w tym samym czasie diody D_1 i D_3 nie przewodziły musi być spełniony słabszy warunek, tj.

$$U > |a(t)|_{max} - U_D \qquad (3/80)$$

Jak widać, spełnienie (3/79) gwarantuje poprawną pracę wszystkich czterech diod. Jeśli $u(t) = -U$, to przy tym samym warunku (3/79) przewodzą diody D_1 i D_3, a nie przewodzą D_2 i D_4.

Z rozważań tych wynika natychmiast, że dla dwu rozpatrywanych stanów napięcia sterującego $u(t)$ układ z rys. 3/20a(b) przybiera odpowiednio postaci podane na rys. 3/20c i d.

Załóżmy $u(t) = +U$ i rozważmy układ z rys. 3/20c. Oznaczmy prąd, który płynie przez diody przy $a(t) = 0$ symbolem I_D. Z uwagi na symetrię układu zachodzi oczywiście równość $I_{D1} = I_{D2} = I_D$. Opisując każdą z diod zależnością (3/58) otrzymamy przy $a(t) \neq 0$ następujące równania napięciowe:

$$u_1 = U+a(t) = (R+R_s)i_{D2}+U_T \ln \frac{i_{D2}}{I_D}+U_D$$
$$u_2 = U-a(t) = (R+R_s)i_{D3}+U_T \ln \frac{i_{D3}}{I_D}+U_D \qquad (3/81)$$

gdzie

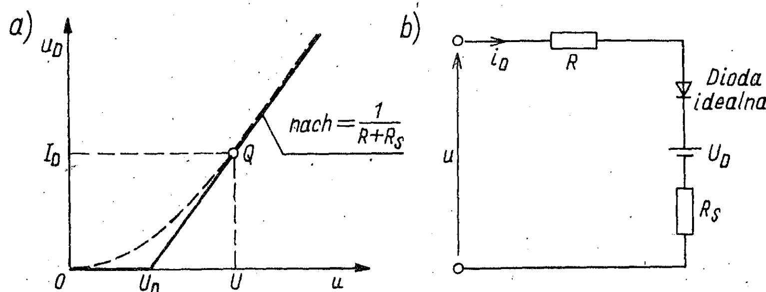
$$U_D = U_T \ln \frac{I_D}{I_s} \qquad (3/82)$$

a R_s oznacza rezystancję szeregową diody. Napięcie wyjściowe wynosi zatem

$$u_k = R(i_{D2}-i_{D3}) \qquad (3/83)$$

i jak widać z (3/81) jego zależność od u_1 i u_2 jest nieliniowa.

Zauważmy, że gałęzie górna i dolna analizowanego układu zawierają diody połączone szeregowo z rezystorem R. W dodatku D1 pokazaliśmy, że rezystancja szeregowa ma wpływ linearyzujący na charakterystykę wynikową takiej gałęzi. Przy wzrastającej wartości iloczynu $g_d(R+R_s)$ — gdzie g_d jest konduktancją różniczkową diody wyznaczoną w punkcie pracy określonym przez współrzędne (U, I_D) — charakterystyka ta ma coraz dłuższe odcinki zbliżone do linii prostej, osiągając dla $g_d(R+R_s) \to \infty$ kształt pokazany na rys. 3/21a. Takiej charakte-



3/21 Charakterystyka wynikowa gałęzi zawierającej diodę i rezystancję szeregową (a) i układ zastępczy takiej gałęzi (b)

rystyce odpowiada układ zastępczy podany na rys. 3/21b. Na rysunku 3/21a zaznaczono także linią przerywaną przebieg charakterystyki wynikowej dla skończonej wartości $g_d(R+R_s)$.

Zapiszmy prądy płynące przez każdą z diod w postaci

$$i_{D2} = I_D+i_D \quad \text{oraz} \quad i_{D4} = I_D-i_d \qquad (3/84)$$

gdzie i_d oznacza składową wywołaną napięciem $a(t)$, I_D zostało określone po-

przednio, a znaki przed i_d wynikają z postaci u_1 i u_2. Podstawiając (3/84) do (3/81) otrzymamy

$$u_1 - u_2 = 2a(t) = (R+R_s)2i_d + U_T \ln \frac{1+i_d/I_D}{1-i_d/I_D} \tag{3/85}$$

Po rozwinięciu wyrazu logarytmicznego w szereg potęgowy i wprowadzeniu oznaczenia

$$r_d = \frac{U_T}{I_D} \tag{3/86}$$

na rezystancję różniczkową diod w punkcie pracy (U, I_D), otrzymamy ostatecznie

$$a(t) = r_d i_d [1+g_d(R+R_s)] \left\{ 1 + \frac{1}{3[1+g_d(R+R_s)]} \left(\frac{i_d}{I_D} \right)^2 + \ldots \right\} \tag{3/87}$$

Przyjmując tak, jak w p. 3.2.1, że spełniona jest nierówność

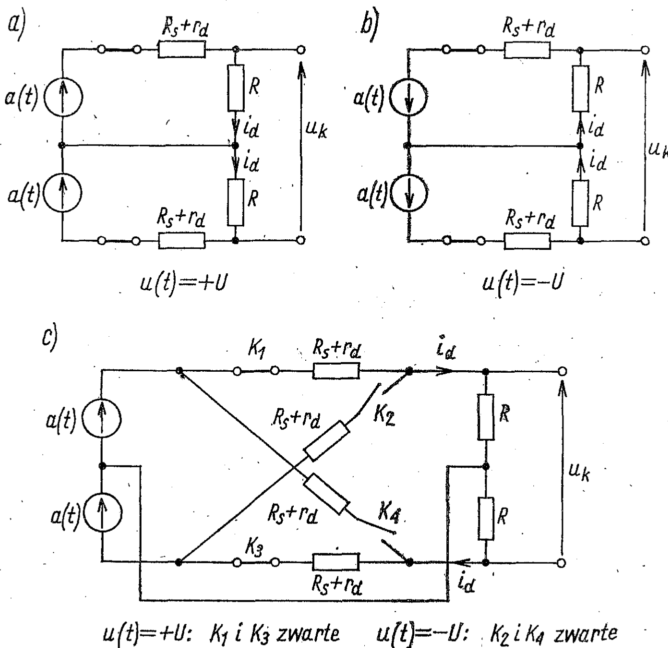
$$\frac{1}{3[1+r_d(R+R_s)]} \left(\frac{i_d(t)_{\max}}{I_D} \right)^2 \leqslant 0{,}01 \tag{3/88}$$

możemy zależność (3/87) uprościć do następującej, liniowej postaci:

$$a(t) = (R+R_s+r_d)i_d \tag{3/89}$$

której odpowiada układ zastępczy z rys. 3/22a. W tym układzie

$$i_d(t) = \frac{a(t)}{R+R_s+r_d} \tag{3/90}$$



3/22 Układy zastępcze modulatora pierścieniowego: a) dla $u(t) = +U$; b) dla $u(t) = -U$; c) dla obu stanów napięcia sterującego

a stąd

$$u_k(t) = \frac{2R}{R+R_s+r_d} a(t) \tag{3/91}$$

Przyjmując $u(t) = -U$ i postępując analogicznie otrzymamy układ zastępczy z rys. 3/22b, w którym

$$u_k(t) = -\frac{2R}{R+R_s+r_d} a(t) \tag{3/92}$$

Układ zastępczy ujmujący oba stany napięcia sterującego $u(t)$ przedstawiono na rys. 3/22c.

Warunek (3/88) można przekształcić do postaci określającej minimalną wartość napięcia sterującego, przy której jest on spełniony. Przyjmując, że $g_d(R+R_s) \gg 1$ każdą z gałęzi zawierającą diodę można w przybliżeniu zastąpić układem z rys. 3/21b, a stąd dostajemy natychmiast (patrz np. rys. 3/20c przy $a(t) = 0$)

$$I_D = \frac{U-U_D}{R+R_s} \tag{3/93}$$

Podstawiając (3/90) i (3/93) do (3/88) oraz przyjmując, że $(R+R_s) \gg r_d$ otrzymujemy nierówność

$$U > \frac{5{,}8|a(t)|_{\max}}{\sqrt{1+g_d(R+R_s)}} + U_D \tag{3/94}$$

przy czym na podstawie (3/86) i (3/93)

$$r_d = \frac{1}{g_d} = (R+R_s)\frac{U_T}{U-U_D} \tag{3/95}$$

Dla prawidłowej pracy analizowanego układu jest więc konieczne równoczesne spełnienie nierówności (3/79) oraz (3/94). Łatwo sprawdzić, że jeśli $g_d(R+R_s) < 32{,}5$, to warunek (3/94) daje większą wartość U i jest decydujący.

Z zależności (3/91) i (3/92) widać, że zapisując $u_k(t)$ w postaci

$$u_k(t) = s_b'(t)a(t) \tag{3/96}$$

dostajemy

$$s_b'(t) = \begin{cases} \dfrac{2R}{R+R_s+r_d}; & u(t) = +U \\ \dfrac{-2R}{R+R_s+r_d}; & u(t) = -U \end{cases} \tag{3/97}$$

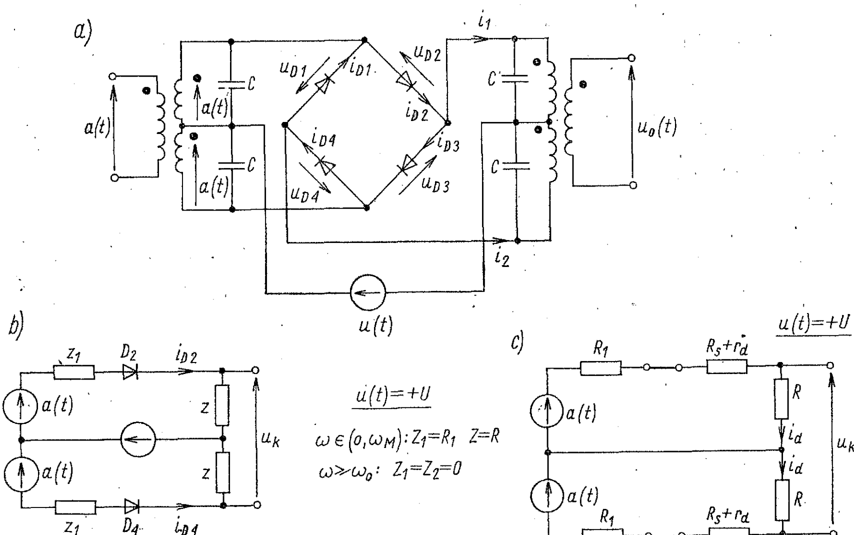
Funkcja $s_b'(t)$ wiąże się z funkcją $s_b(t)$, określoną dla idealnego klucza symetrycznego wzorem (3/29) w następujący sposób:

$$s_b'(t) = \frac{2R}{R+R_s+r_d} s_b(t) \tag{3/98}$$

co należy uwzględnić przy korzystaniu z zależności wyprowadzonych poprzednio dla układu funkcjonalnego z rys. 3/6.

Sygnał $u_k(t)$ należy dalej poddać filtracji pasmowej. Można to zrobić na przykład analogicznie, jak to robiliśmy w p. 3.1.1 uwzględniając fakt, że w układzie z rys. 3/20 mamy wyjście symetryczne.

Bardzo często modulator pierścieniowy wykonuje się w układzie pokazanym na rys. 3/23a. Przyjmijmy, że $u(t)$ jest przebiegiem prostokątnym jak na rys. 3/17c. Jeśli założymy, że pojemności C są tak dobrane, iż dla $\omega \geqslant \omega_0$ stanowią zwarcie, natomiast obwody wejściowy i wyjściowy można dla dolnopasmowego sygnału $a(t)$ zastąpić odpowiednio rezystancjami R_1 i R, to przy $u(t) = +U$ układ z rys. 3/23a sprowadzi się do postaci podanej na rys. 3/23b.



3/23 Modulator pierścieniowy z wejściem i wyjściem transformatorowym: a) schemat modulatora; b) i c) układy zastępcze dla $u(t) = +U$

Przyjmując teraz — tak, jak dla układu z rys. 3/20a — że dla małych wartości $a(t)$ prądy płynące przez diody D_2 i D_4 można zapisać w postaci (3/84), dostajemy następujące równania napięciowe

$$
\begin{aligned}
u_1 &= U+a(t) = R_s i_{D2}+(R_1+R)i_d+U_T \ln\frac{i_{D2}}{I_D}+U_D \\
u_2 &= U-a(t) = R_s i_{D4}-(R_1+R)i_d+U_T \ln\frac{i_{D4}}{I_D}+U_D
\end{aligned}
\tag{3/99}
$$

Tworząc różnicę u_1-u_2 otrzymamy

$$
2a(t) = (R_s+R_1+R)2i_d+U_T \ln\frac{i_{D2}}{i_{D4}} \tag{3/100}
$$

Postępując dalej tak, jak dla układu bezinercyjnego z rys. 3/20a dostaniemy, że

przy spełnieniu nierówności analogicznej do (3/88) można zależność nieliniową (3/100) przybliżyć następującym równaniem liniowym:

$$a(t) = (R_1+R+R_s+r_d)i_d \tag{3/101}$$

któremu odpowiada układ podany na rys. 3/23c.

Wyznaczmy z układu na rys. 3/23b prąd I_D. Przyjmując $a(t) = 0$ dostajemy natychmiast, że

$$I_D = \frac{U-U_D}{R_s} \tag{3/102}$$

Jeżeli teraz skorygujemy formę nierówności (3/88) uwzględniając wprowadzony dodatkowo rezystor R_1 i podstawimy do niej I_D oraz i_d wyznaczone z (3/101), to warunek (3/94) przekształci się do postaci

$$U > \frac{5{,}8|a(t)|_{\max}}{[1+g_d(R_1+R+R_s)]^{3/2}}\,\frac{R_s}{r_d}+U_D \tag{3/103}$$

Postępując w analogiczny sposób dla $u(t) = -U$ otrzymamy, że napięcie $u_k(t)$ można zapisać w postaci

$$u_k(t) = s_b'(t)a(t) \tag{3/104}$$

gdzie

$$s_b'(t) = \begin{cases} \dfrac{2R}{R_1+R+R_s+r_d}; & u(t) = +U \\ \dfrac{-2R}{R_1+R+R_s+r_d}; & u(t) = -U \end{cases} \tag{3/105}$$

Jeśli przyjmiemy, że przekładnia transformatora wyjściowego jest równa 1, to

$$u_O(t) = u_k(t)$$

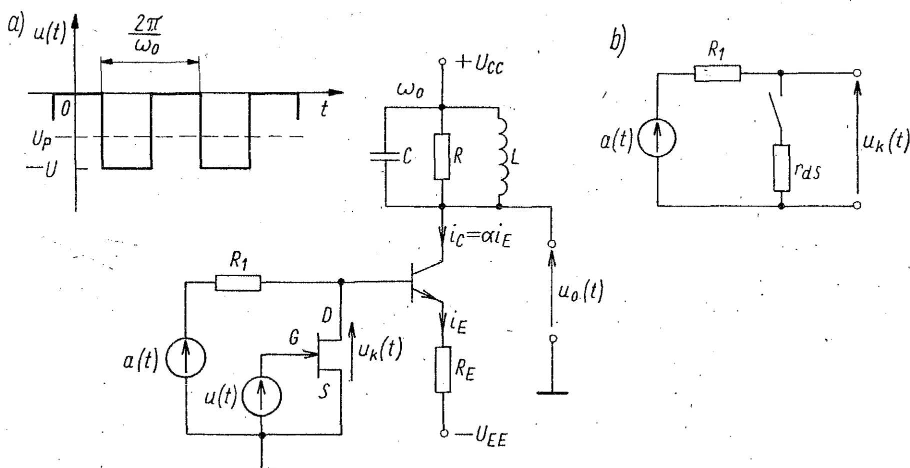
W analizie układów z rys. 3/17, 3/20 i 3/23 przyjmowaliśmy, że napięcie nośnej, sterujące diodami, jest przebiegiem prostokątnym. Spełnienie tego warunku jest w układach praktycznych na ogół kłopotliwe i dlatego najczęściej stosuje się przebieg sinusoidalny. Uwzględnienie tego faktu w analizie matematycznej okazuje się być sprawą bardzo trudną. Aby uzyskać czytelne wyniki analityczne trzeba wprowadzić bardzo ostre ograniczenia na poziom sygnału modulującego, co z kolei nie znajduje potwierdzenia w praktyce. Dlatego przypadkiem tym nie będziemy się tutaj zajmować. Należy tylko podkreślić, że wyprowadzone poprzednio warunki poprawnej pracy układów trzeba przy sinusoidalnym napięciu sterującym traktować bardziej jakościowo, niż ilościowo.

Omówione układy służą do wytwarzania sygnałów *AM-SC*. Wytworzenie sygnału *AM* wymaga założenia, że $a(t) \geqslant 0$, a więc że sygnał modulujący zawiera składową stałą. Istnienie takiego stałego napięcia spowodowałoby przesunięcie punktów pracy poszczególnych diod (czyli układy nie byłyby zrównoważone) a w rezultacie pojawienie się zniekształceń nieliniowych.

Na zakończenie warto jeszcze dodać, że układy pierścieniowe wraz z odpowiednio skonstruowanymi obwodami dopasowującymi są obecnie wykonywane w postaci hermetycznie zamkniętych modułów. Producent podaje wówczas dopuszczalne poziomy sygnałów, zakresy częstotliwości oraz inne parametry interesujące użytkownika.

3.2.3 Modulator z tranzystorem polowym

Funkcję klucza synchronicznego może spełniać również tranzystor polowy sterowany napięciem prostokątnym. Rozważmy układ pokazany na rys. 3/24a, gdzie tranzystor unipolarny z kanałem n jest sterowany napięciem $u(t)$ oraz



3/24 Modulator z tranzystorem polowym: a) schemat modulatora; b) układ zastępczy tranzystora polowego pracującego jako klucz synchroniczny

dolnopasmowym sygnałem modulującym $a(t)$. Jeśli przyjmiemy, że tranzystor pracuje w obszarze nasycenia, to jego charakterystyka przejściowa może być przybliżona zależnością

$$i_D = I_{DSS}\left(1-\frac{u_{GS}}{U_P}\right)^2 \tag{3/106}$$

gdzie U_P jest napięciem odcięcia, a I_{DSS} prądem drenu przy $u_{GS} = 0$ oraz $u_{DS} = -U_P$.

Jeśli $u(t) = -U < U_P$, to kanał jest odcięty, tranzystor nie przewodzi i $u_k(t) = a(t)$. Przy $u(t) = 0$ tranzystor pracuje w zakresie triodowym i można jego działanie opisać konduktancją

$$g_{ds} = \left.\frac{\partial i_D}{\partial u_{GS}}\right|_{u_{GS}=0} = -\frac{2I_{DSS}}{U_P}\left.\left(1-\frac{u_{GS}}{U_P}\right)\right|_{u_{GS}=0} = \frac{2I_{DSS}}{-U_P} \tag{3/107}$$

Konduktancja ta pozostaje w przybliżeniu stała, jeśli $|u_{DS}| = |u_k| < U_o$. Dla większości tranzystorów U_o mieści się w granicach 100...200 mV. Przy speł-

nieniu tego warunku tranzystor można więc zastąpić niesymetrycznym kluczem synchronicznym z rezystancją szeregową $r_{ds} = 1/g_{ds}$, co pokazano na rys. 3/24b. Napięcie $u_k(t)$ przyjmuje więc dla dwu stanów napięcia sterującego następujące wartości:

$$u_k(t) = a(t); \quad u(t) = -U \tag{3/108}$$

$$u_k(t) = \frac{r_{ds}}{R_1 + r_{ds}} a(t); \quad u(t) = 0 \tag{3/109}$$

Z warunku $|u_k(t)|_{max} < U_o$ oraz zależności (3/109) możemy wyznaczyć taką wartość R_1, przy której praca tranzystora w zakresie triodowym będzie miała charakter liniowy. Otrzymujemy nierówność

$$R_1 > r_{ds}\left(\frac{|a(t)|_{max}}{U_o} - 1\right) \tag{3/110}$$

Jeśli przyjmiemy, że rezystancja wejściowa wzmacniacza jest na tyle duża, że nie ma wpływu na pracę układu kluczującego, to funkcję $s_u'(t)$ można wyrazić następująco:

$$s_u'(t) = \frac{r_{ds}}{R_1 + r_{ds}} + \frac{R_1}{R_1 + r_{ds}} s_u(t) \tag{3/111}$$

gdzie $s_u(t)$, dane wzorem (3/23), opisuje działanie idealnego klucza niesymetrycznego.

Przyjmując, że obwód rezonansowy jest wystarczająco selektywnym filtrem, aby usunąć sygnały niepożądane, dostajemy

$$u_O(t) \approx U_{CC} - \frac{2}{\pi} \frac{R_1}{R_1 + r_{ds}} \frac{\alpha R}{R_E} a(t) \cos \omega_o t \tag{3/112}$$

Zauważmy, że w omawianym układzie możemy uzyskać sygnał *AM-SC* jeśli $\overline{a(t)} = 0$, lub też sygnał *AM* gdy $a(t) \geqslant 0$.

3.2.4 Modulator z układem mnożącym

Omówimy teraz modulator, w którym jako przetwornik nieliniowy wykorzystuje się układ mnożący przedstawiony na rys. 3/25. Układ ten był analizowany w rozdz. 1, gdzie pokazano, że przy spełnieniu warunków

$$R_Y I_Y \gg 2U_T \quad \text{oraz} \quad |a(t)|_{max} \leqslant R_Y I_Y \tag{3/113}$$

napięcie wyjściowe $u_k(t)$ wyraża się następującym wzorem:

$$u_k = R_C(i_B - i_C) = 2\frac{R_C}{R_Y} a(t) \operatorname{tgh} \frac{u(t)}{U_T} \tag{3/114}$$

Przyjmijmy, że $u(t)$ ma postać sinusoidalną, tj.

$$u(t) = U \cos \omega_o t \tag{3/115}$$

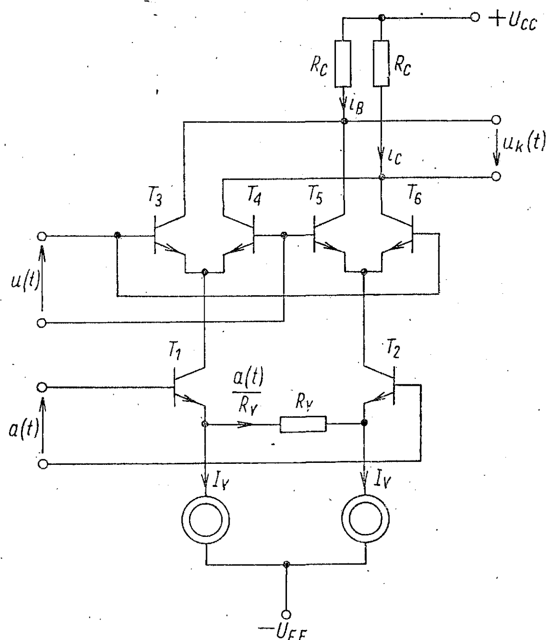
Jeśli $U \ll 2U_T$, to

$$\operatorname{tgh}\frac{u(t)}{2U_T} \approx \frac{u(t)}{2U_T} \tag{3/116}$$

i z (3/114) otrzymujemy

$$u_k(t) = \frac{R_C}{R_Y}\frac{U}{U_T}a(t)\cos\omega_o t \tag{3/117}$$

Przy $\overline{a(t)} = 0$ dostajemy więc sygnał *AM-SC*, natomiast dla $a(t) \geqslant 0$ sygnał *AM* ze współczynnikiem głębokości modulacji $m \leqslant 1$.



3/25 Modulator z układem mnożącym

Przyjmijmy teraz, że amplituda sygnału sterującego $u(t)$ ulega zwiększeniu i wzór (3/117) przestaje być słuszny. Możemy wówczas $\operatorname{tgh}(u/2U_T)$, jako funkcję okresową, rozwinąć w szereg Fouriera. Wprowadzając zmienną unormowaną $x = U/U_T$, otrzymujemy

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{x}{2}\cos\omega_o t\right) = A_1\cos\omega_o t + A_3\cos 3\omega_o t + A_5\cos 5\omega_o t + \ldots \tag{3/118}$$

gdzie

$$A_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\{\left[\operatorname{tgh}\left(\frac{x}{2}\cos\omega_o t\right)\right]\cos k\omega_o t\right\}d(\omega_o t) \tag{3/119}$$

Łatwo zauważyć, że dla $x \to \infty$, to znaczy przy dużych poziomach wysterowania, możemy napisać

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{x}{2}\cos\omega_o t\right) \approx \operatorname{sgn}(\cos\omega_o t) = s_b(t) = \frac{4}{\pi}\left(\cos\omega_o t - \frac{1}{3}\cos 3\omega_o t + \ldots\right) \tag{3/120}$$

czyli działanie układu przybliża pracę idealnego klucza symetrycznego. W dodatku D3, na rys. D3/3a podano wykresy współczynników $a_k(x) = 2A_k(x)$, z których wynika, że już dla wartości x rzędu 10 przybliżenie (3/120) uznać można za zadowalające.

Należy tu jeszcze podkreślić, że praktyczne znaczenie mają układy z rys. 3/25 wykonywane w postaci scalonej, gdyż wówczas są spełnione warunki identyczności tranzystorów, jednakowej temperatury złącz itp., przy których jest słuszna zależność (3/114).

Literatura

1. Baghdady E. J.: *Lectures on Communication System Theory*. McGraw-Hill, New York 1961.
2. Clarke K. K., Hess D. T.: *Communication Circuits: Analysis and Design*. Addison-Wesley, London 1971.
3. Filipkowski A.: *Układy elektroniczne analogowe i cyfrowe*. WNT, Warszawa 1978.
4. Golde W.: *Układy elektroniczne*. T. II. WNT, Warszawa 1976.
5. Gregg W. D.: *Podstawy telekomunikacji analogowej i cyfrowej*. WNT, Warszawa 1983.
6. Korzec Z., Kacprzak T.: *Tranzystory polowe złączowe*. WNT, Warszawa 1984.
7. Lathi B. P.: *Systemy telekomunikacyjne*. WNT, Warszawa 1972.
8. Panter P. F.: *Modulation, Noise and Spectral Analysis*. McGraw-Hill, New York 1965.
9. Pawłowski J.: *Podstawowe układy elektroniczne: nieliniowe układy analogowe*. WKŁ, Warszawa 1979.
10. Shanmugam K. Sam.: *Digital and Analog Communication Systems*. J. Wiley, New York 1979.

4

DEMODULATORY AMPLITUDY

W niniejszym rozdziale omówimy najpierw metody demodulacji sygnałów zmodulowanych amplitudowo, zwracając szczególną uwagę na ograniczenia, jakie wynikają bądź to z samych metod, bądź też z charakteru demodulowanych sygnałów. Następnie rozpatrzymy bardziej szczegółowo układy detektorów obwiedni. Analizę działania detektorów synchronicznych, w których wykorzystuje się układy z fazową pętlą sprzężenia zwrotnego, przeprowadzimy wyłącznie w oparciu o schematy funkcjonalne, a niezbędne uzupełnienia zostaną podane w rozdz. 8, poświęconym w całości pętlom fazowym.

4.1 METODY DEMODULACJI

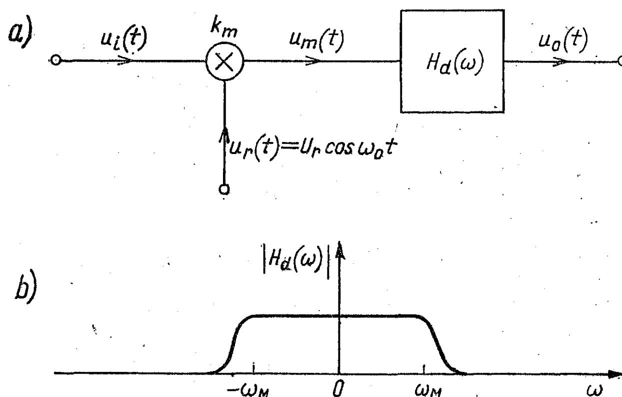
Proces wydzielania sygnału modulującego (przenoszącego informację) z sygnału zmodulowanego jest nazywany *demodulacją*, a układy, które do tego celu służą — *demodulatorami* lub *detektorami*[1]. Z uwagi na zasadę działania demodulatory dzieli się na *synchroniczne* (koherentne) i *asynchroniczne* (niekoherentne). Detektory synchroniczne można stosować do demodulacji wszystkich omówionych poprzednio rodzajów sygnałów zmodulowanych, podczas gdy detektory asynchroniczne mają zastosowanie głównie do demodulacji sygnałów *AM*, aczkolwiek w szczególnych przypadkach, przy spełnieniu dodatkowych warunków, można je wykorzystać również do demodulacji sygnałów *VSB*.

[1] Z uwagi na brak wyraźnego rozgraniczenia w stosowaniu tych terminów (zarówno w literaturze krajowej, jak i zagranicznej), wykorzystywać je będziemy w sposób wymienny. Należy jednak zauważyć, że ich znaczenia pokrywają się tylko częściowo.

4.1.1 Demodulacja synchroniczna

Demodulacja w warunkach zgodności sygnału odniesienia i nośnej.

Zasadę działania demodulatora synchronicznego wyjaśnia schemat funkcjonalny pokazany na rys. 4/1a. Zmodulowany *sygnał wejściowy* $u_i(t)$ zostaje wymnożony przez *sygnał odniesienia* $u_r(t)$, którego częstotliwość i faza są identyczne z częstotliwością i fazą nośnej, a produkty mnożenia są podane na filtr dolnoprzepustowy o charakterystyce $H_d(\omega)$. Przykładowy kształt $|H_d(\omega)|$ pokazano na rys. 4/1b.



4/1 Podstawowy układ demodulatora synchronicznego (a) i przykładowa charakterystyka amplitudowa filtru dolnoprzepustowego (b)

Wyznaczmy najpierw $u_m(t)$ przyjmując, że na wejście demodulatora są podawane kolejno sygnały *AM* lub *AM-SC, SSB-SC* oraz *VSB*, których przebiegi czasowe są określone odpowiednio wzorami (3/1) (z warunkiem (3/2) lub (3/3)), (3/35) oraz (3/50). Po wymnożeniu tych wyrażeń przez

$$u_r(t) = U_r \cos\omega_0 t \tag{4/1}$$

i dokonaniu prostych przekształceń trygonometrycznych otrzymamy, że dla *AM* i *AM-SC*

$$u_m(t) = k_m[a(t)\cos\omega_0 t][U_r\cos\omega_0 t] = \frac{1}{2}k_m U_r[a(t)+a(t)\cos 2\omega_0 t] \tag{4/2}$$

dla *SSB-SC*

$$u_m(t) = k_m[a(t)\cos\omega_0 t \mp \hat{a}(t)\sin\omega_0 t][U_r\cos\omega_0 t] =$$
$$= \frac{1}{2}k_m U_r[a(t)+a(t)\cos 2\omega_0 t \mp \hat{a}(t)\sin 2\omega_0 t] \tag{4/3}$$

oraz dla *VSB*

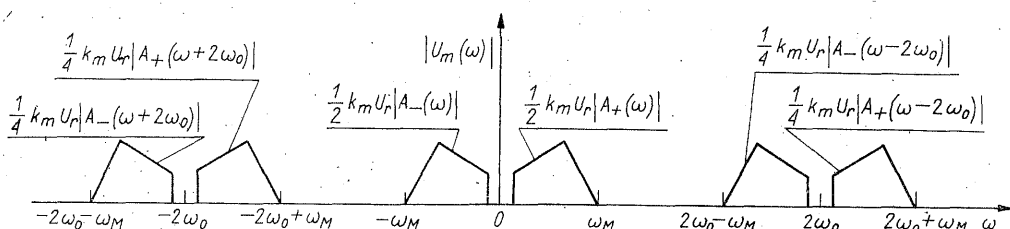
$$u_m(t) = k_m[a(t)\cos\omega_0 t - a(t)\sin\omega_0 t][U_r\cos\omega_0 t] =$$
$$= \frac{1}{2}k_m U_r[a(t)+\tilde{a}(t)\cos 2\omega_0 t - \tilde{a}(t)\sin 2\omega_0 t] \tag{4/4}$$

Przyjmując, że filtr dolnoprzepustowy usunie składniki niepożądane, których widma są skoncentrowane wokół pulsacji $2\omega_o$ otrzymamy, że w każdym z rozważanych przypadków sygnał wyjściowy ma postać

$$u_O(t) = \frac{1}{2}k_m U_r a(t) * h_d(t) \tag{4/5}$$

gdzie $h_d(t)$ stanowi odpowiedź impulsową filtru. Jak widać, jeśli filtr dolnoprzepustowy nie wprowadzi zniekształceń, to zgodnie z oczekiwaniem na wyjściu demodulatora otrzymamy sygnał modulujący $a(t)$.

Warunki, przy których składowe niepożądane można oddzielić od sygnału $a(t)$ drogą filtracji wynikają natychmiast z rys. 4/2, na którym przedstawiliśmy widmo amplitudowe $u_m(t)$, zaznaczając w znany już sposób wstęgi dolne i górne.



4/2 Widmo amplitudowe sygnału przed filtracją

Warunkiem nie zachodzenia na siebie widm składowych jest więc dla sygnałów *AM*, *AM-SC* oraz *SSB-SC* z dolną wstęgą boczną nierówność

$$\omega_M < \omega_o \tag{4/6}$$

a dla sygnału *SSB-SC* z górną wstęgą boczną nierówność

$$\omega_M < 2\omega_o \tag{4/7}$$

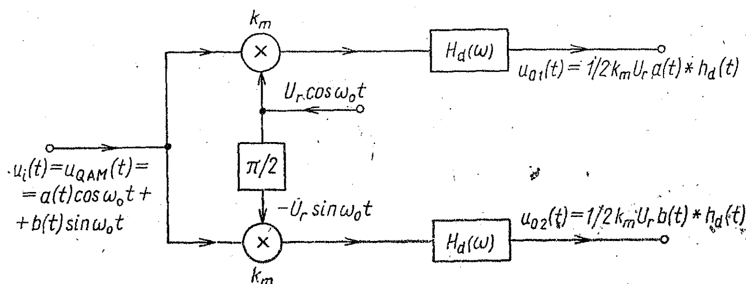
Dla sygnału *VSB*, którego widmo nie zostało podane na rys. 4/2, otrzymamy nierówność łagodniejszą od (4/6), ale ostrzejszą od (4/7), w zależności od tego, jak szeroka jest szczątkowa wstęga boczna (np. w telewizji czarno-białej pasmo zajęte przez tę wstęgę wynosi około 30% szerokości pasma zajmowanego przez wstęgę przenoszoną).

Dla demodulacji synchronicznej sygnału *QAM* układ funkcjonalny z rys. 4/1a trzeba zmodyfikować, gdyż jak widać z wyrażenia (3/53) $u_{QAM}(t)$ ma postać

$$u_{QAM}(t) = \mathrm{Re}[a(t)+jb(t)]e^{j\omega_o t} = a(t)\cos\omega_o t - b(t)\sin\omega_o t$$

a więc składowe synfazowa i kwadraturowa obwiedni zespolonej przenoszą dwa różne sygnały informacyjne za pomocą dwóch ortogonalnych nośnych. Należy więc oddzielnie dokonać demodulacji każdego z sygnałów składowych. Można to uzyskać w jednym układzie pokazanym na rys. 4/3. Przyjmując, tak jak poprzednio, że filtry dolnoprzepustowe usuną niepożądane widma składowe skupione wokół pulsacji $2\omega_o$ dostaniemy, iż

$$u_{O1}(t) = \frac{1}{2}k_m U_r a(t) * h_d(t) \tag{4/8}$$



4/3 Demodulacja synchroniczna sygnału *QAM*

$$u_{O2}(t) = \frac{1}{2}k_m U_r b(t) * h_d(t) \tag{4/9}$$

Filtry dolnoprzepustowe, oznaczone dla uproszczenia na rys. 4/3 tym samym symbolem, nie muszą być identyczne; ich charakterystyki powinny być dopasowane do właściwości widmowych sygnału przesyłanego w danym kanale.

Wpływ niezgodności częstotliwości i fazy na wynik demodulacji

Nie wnikając na razie w sposób uzyskiwania sygnału odniesienia zbadajmy, jaki skutek wywołuje brak zgodności pomiędzy częstotliwością i fazą tego sygnału, a takimi samymi wielkościami sygnału nośnego, użytego w modulatorze.

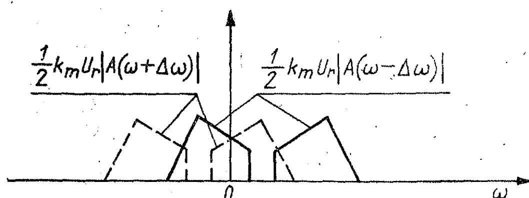
Przyjmijmy najpierw, że występuje niezgodność częstotliwości. Niech pulsacja sygnału odniesienia wynosi ω_r i różni się od ω_o o wartość $\Delta\omega$, np.

$$\omega_r = \omega_o + \Delta\omega \tag{4/10}$$

Dla sygnałów *AM* i *AM-SC* otrzymamy wówczas na wyjściu filtru $u_O(t)$ o postaci

$$u_O(t) = \frac{1}{2}[k_m U_r a(t)\cos\Delta\omega t] * h_d(t) \tag{4/11}$$

Moduł $\mathscr{F}$-transformaty wyrażenia zawartego w nawiasie kwadratowym (przy założeniu, że $|A(\omega)|$ ma postać z rys. 4/2) jest pokazany na rys. 4/4. Jak widać, widmo sygnału zmodulowanego $u_i(t)$ nie zostało w wyniku mnożenia przez sygnał



4/4 Przesunięcie widma sygnału zdemodulowanego w przypadku niezgodności częstotliwości sygnału odniesienia z częstotliwością nośnej

odniesienia przesunięte do początku układu współrzędnych. Powoduje to zniekształcenia, których charakter wyjaśni prosty przykład. Przyjmijmy dla przejrzystości rozumowania, że widmo $a(t)$ jest prążkowe i wybierzmy z niego dwa prążki o pulsacjach ω_1 i ω_2. Załóżmy ponadto, że pulsacje te pozostają do siebie w stosunku harmonicznym, to znaczy $\omega_2/\omega_1 = n$, gdzie n jest liczbą całkowitą. Po demodulacji otrzymamy przebiegi o pulsacjach $\omega_1+\Delta\omega$ oraz $n\omega_1+\Delta\omega$, czyli innych niż w sygnale pierwotnym. Jeszcze ważniejsze jest jednak to, że zostaje zakłócona zależność harmoniczna między pulsacjami tych przebiegów, gdyż teraz $(n\omega_1+\Delta\omega)/(\omega_1+\Delta\omega) \neq n$. Badania eksperymentalne wykazują, że przy transmisji sygnałów akustycznych właściwości ucha ludzkiego powodują, iż utrata zależności harmonicznych może być tolerowana, jeśli różnica częstotliwości pomiędzy sygnałem odniesienia i nośną sygnału zmodulowanego nie przekracza 20 Hz.

W przypadku, gdy $u_i(t)$ jest sygnałem *SSB-SC*, zamiast (4/5) otrzymujemy

$$u_O(t) = \frac{1}{2}k_m U_r[a(t)\cos\Delta\omega t \mp \hat{a}(t)\sin\Delta\omega t] * h_d(t) \tag{4/12}$$

czyli sygnał wyjściowy zostaje dodatkowo zniekształcony wskutek pojawienia się składnika $\hat{a}(t)\sin\Delta\omega t$, którego widmo jest również przesunięte względem początku układu współrzędnych.

Z przeprowadzonej dyskusji wynika, że przy demodulacji synchroniczne różnica częstotliwości nośnej i sygnału odniesienia może być tolerowana tylko w wyjątkowych przypadkach, dlatego dalej zajmiemy się wyłącznie wpływem różnicy faz tych przebiegów na wynik demodulacji. Przyjmijmy zatem, że $\omega_r = \omega_o$, natomiast różnica faz odniesiona w całości do $u_r(t)$[1] wynosi $\Delta\varphi$, tj.

$$u_r(t) = U_r\cos(\omega_o t+\Delta\varphi) \tag{4/13}$$

Przeprowadzając ponownie proste przekształcenia trygonometryczne otrzymamy, że dla przypadku *AM* i *AM-SC* sygnał na wyjściu filtru ma postać

$$u_O(t) = \frac{1}{2}k_m U_r[a(t)\cos\Delta\varphi] * h_d(t) \tag{4/14}$$

natomiast dla *SSB-SC* $u_O(t)$ wyraża się wzorem

$$u_O(t) = \frac{1}{2}k_m U_r[a(t)\cos\Delta\varphi \mp \hat{a}(t)\sin\Delta\varphi] * h_d(t) \tag{4/15}$$

Z wyrażenia (4/14) widzimy, że w przypadku sygnału dwuwstęgowego różnica faz $\Delta\varphi$ ma wpływ wyłącznie na poziom sygnału wyjściowego. Gdy $\Delta\varphi = 0$, to (4/14) przyjmuje postać (4/5) i $u_O(t)$ osiąga największą wartość, natomiast dla $\Delta\varphi = \pm\pi/2$ sygnał $u_O(t)$ zanika. Inną sytuację mamy w przypadku demodulacji sygnału jednowstęgowego. Dla $\Delta\varphi = 0$ (4/15) także przyjmie postać (4/5), jed-

---

[1] Przypominamy, że w wyrażeniach (3/1), (3/35) oraz (3/50) fazie początkowej nośnej nadano wartość zerową.

nakże dla $\Delta\varphi = \pm\pi/2$ zanika tylko składowa synfazowa i $u_O(t)$ dane jest wyrażeniem

$$u_O(t) = \mp\frac{1}{2}k_m U_r \hat{a}(t) * h_d(t) \tag{4/16}$$

W sytuacjach pośrednich sygnał wyjściowy zawiera zarówno składową synfazową $a(t)$ jak i składową kwadraturową $\hat{a}(t)$. Jak pokazaliśmy w dodatku D5, $\hat{a}(t)$ jest transformatą Hilberta sygnału $a(t)$, a zatem widma amplitudowe $a(t)$ i $\hat{a}(t)$ są identyczne, natomiast faza każdej składowej $\hat{a}(t)$ jest przesunięta o $-\pi/2$ w stosunku do fazy odpowiedniej składowej $a(t)$. Ponieważ ucho ludzkie jest w szerokich granicach niewrażliwe na zniekształcenia fazowe, przekazywany sygnał akustyczny jest zrozumiały nawet wówczas, gdy $\Delta\varphi$ przyjmuje skrajne wartości, tj. $\pm\pi/2$. Inaczej jest, gdy istnieje potrzeba zachowania kształtu przesyłanego sygnału, jak np. przy transmisji sygnałów wizyjnych. Wówczas dopuszczalna różnica faz zależy od poziomu zniekształceń, które można zaakceptować.

Rozważmy teraz przypadek sygnału *VSB*. Jeśli różnica faz wynosi $\Delta\varphi$, to zamiast (4/5) otrzymujemy

$$u_O(t) = \frac{1}{2}k_m U_r[a(t)\cos\Delta\varphi - \tilde{a}(t)\sin\Delta\varphi] * h_d(t) \tag{4/17}$$

Jak widać, tylko pierwszy składnik w nawiasie kwadratowym wyrażenia (4/17) zawiera niezniekształcony sygnał modulujący $a(t)$. Sygnał $\tilde{a}(t)$, związany z $a(t)$ zależnością (3/48) wprowadza zniekształcenia. Ponieważ filtr o charakterystyce $H_{dQ}(\omega)$ zmienia nie tylko widmo fazowe sygnału $a(t)$, lecz także jego widmo amplitudowe (inaczej mówiąc, $a(t)$ i $\tilde{a}(t)$ nie stanowią pary transformat Hilberta), maksymalna wartość $\Delta\varphi$, która zapewnia jeszcze prawidłową pracę demodulatora zależy od dopuszczalnego poziomu zniekształceń.

Dla sygnału *QAM* różnica faz $\Delta\varphi$ między nośnymi, a sygnałami odniesienia powoduje następującą modyfikację zależności (4/8) i (4/9)

$$u_{O1}(t) = \frac{1}{2}k_m U_r[a(t)\cos\Delta\varphi + b(t)\sin\Delta\varphi] * h_d(t) \tag{4/18}$$

$$u_{O2}(t) = \frac{1}{2}k_m U_r[b(t)\cos\Delta\varphi - a(t)\sin\Delta\varphi] * h_d(t) \tag{4/19}$$

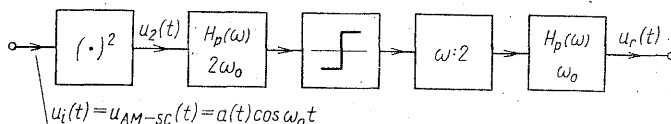
Z równań (4/18) oraz (4/19) widać, że tylko wtedy, kiedy sygnały odniesienia podawane na układy mnożące są zgodne w fazie z nośnymi sygnałów $a(t)$ i $b(t)$ otrzymujemy całkowite rozdzielenie obu sygnałów modulujących i prawidłową demodulację. Jeśli $\Delta\varphi \neq 0$, to występuje zjawisko wzajemnego przenikania sygnałów informacyjnych pomiędzy kanałami synfazowym i kwadraturowym. Zniekształcenia wprowadzane w ten sposób noszą nazwę zniekształceń interferencyjnych i są bardzo niepożądane, gdyż w istotny sposób mogą ograniczyć zrozumiałość przesyłanych informacji. Jak więc widzimy, w systemie *QAM* ograniczenia maksymalnej wartości $\Delta\varphi$, wynikające z dopuszczalnego poziomu zniekształceń, mogą być szczególnie ostre.

Odtwarzanie częstotliwości i fazy nośnej

Z przeprowadzonej analizy wiemy już, że dla dokonania demodulacji synchronicznej jest niezbędna znajomość częstotliwości i fazy harmonicznego przebiegu nośnego. W przypadkach, gdy sygnał zmodulowany zawiera prążek nośnej o odpowiednio dużej amplitudzie możliwe jest wydzielenie tego przebiegu, a następnie wykorzystanie go, jako sygnału odniesienia. Przykładem jest sygnał *AM*, którego postać można zapisać następująco:

$$u_i(t) = u_{AM}(t) = a(t)\cos\omega_o t = U_i[1+mf(t)]\cos\omega_o t = \\ = \underbrace{U_i\cos\omega_o t}_{\text{nośna}} + \underbrace{mU_i f(t)\cos\omega_o t}_{u_{AM\text{-}SC}(t)} \tag{4/20}$$

Jeśli widmo sygnału modulującego jest ograniczone do przedziału (ω_m, ω_M), to stosując filtr wąskopasmowy o bardzo stromych zboczach możemy wydzielić sygnał o pulsacji ω_o i stałej amplitudzie $U_i' \cos\omega_o t$, który posłuży jako sygnał odniesienia. Tak wąskopasmowy filtr jest zwykle wykonywany jako filtr kwarcowy lub mechaniczny, a stabilność jego częstotliwości środkowej musi być tego samego rzędu, co stabilność generatora nośnej, użytego w modulatorze.



4/5 Odtwarzanie nośnej sygnału *AM-SC*

W przypadku sygnału *AM-SC*, który co prawda nie zawiera prążka nośnej, ale posiada widmo wykazujące symetrię względem ω_o, nośną można odtworzyć stosując pewne operacje nieliniowe, przekształcające sygnał wejściowy. Rozważmy układ funkcjonalny pokazany na rys. 4/5. Przyjmijmy, że

$$u_i(t) = a(t)\cos\omega_o t \tag{4/21}$$

gdzie $\overline{a(t)} = 0$. Po układzie kwadratującym otrzymamy

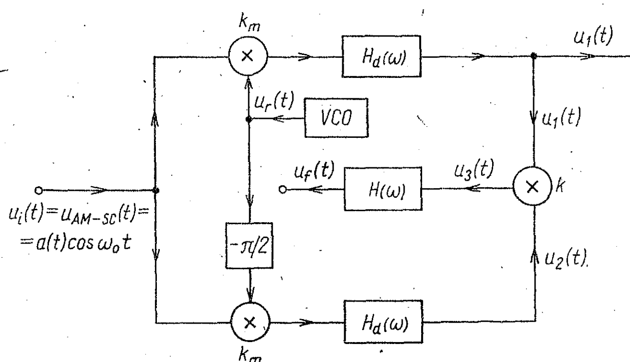
$$u_2(t) = \frac{1}{2}a^2(t) + \frac{1}{2}a^2(t)\cos 2\omega_o t \tag{4/22}$$

Ponieważ $a^2(t) \geqslant 0$, więc $\overline{a^2(t)} \neq 0$ i drugi składnik w równaniu (4/22) zawiera przebieg o pulsacji $2\omega_o$. Po odfiltrowaniu składnika $1/2a^2(t)$ filtrem wąskopasmowym o pulsacji środkowej $2\omega_o$ (łatwo zauważyć, że widma składowe nie zachodzą na siebie, jeśli $\omega_M < \omega_o/2$), sygnał podawany jest na ogranicznik, a uzyskany przebieg prostokątny na dzielnik częstotliwości. Zauważmy w tym miejscu, że $\cos 2\omega_o t$ można również zapisać następująco: $\cos(2\omega_o t + 2n\pi)$, gdzie n jest liczbą całkowitą. Sygnałowi temu na wyjściu dzielnika częstotliwości będzie odpowiadać przebieg podstawowy o postaci $\cos(\omega_o t + n\pi)$. Po filtrze wąskopasmowym o pulsacji środkowej ω_o otrzymamy ostatecznie

$$u_r(t) = U_r\cos(\omega_o t + n\pi) = \pm U_r\cos\omega_o t \tag{4/23}$$

Jak widać, gdy n przyjmie wartości nieparzyste, to operacja dzielenia wprowadza niejednoznaczność znaku odtwarzanej nośnej. W niektórych przypadkach ma to istotne znaczenie. Na przykład przy demodulacji sygnału, którego obwiednię stanowi ciąg impulsów bipolarnych powoduje to, że impuls dodatni jest odbierany jako ujemny i odwrotnie. Aby tego uniknąć stosuje się w takich przypadkach inne rozwiązania (np. kodowanie różnicowe), których nie będziemy tu omawiać. Aby uniknąć stałego przesunięcia fazowego sygnału w procesie filtracji pasmowej, należy stosować filtry o parzystych charakterystykach amplitudowych i nieparzystych charakterystykach fazowych względem ω_0, czy $2\omega_0$. Jak łatwo zauważyć na podstawie analizy prezentowanej w dodatku D6, pozwoli to także uniknąć pojawienia się składowej kwadraturowej sygnału.

Zamiast odtwarzać nośną sygnału *AM-SC* w sposób podany na rys. 4/5 można zastosować sygnał odniesienia wytwarzany lokalnie w odbiorniku, należy tylko zsynchronizować jego częstotliwość i fazę z częstotliwością i fazą nośnej.



4/6 Układ Costasa do odtwarzania nośnej sygnału *AM-SC*

Sygnał sterujący takim generatorem lokalnym (VCO) można uzyskać w układzie przedstawionym na rys. 4/6, noszącym nazwę *układu Costasa*. Prześledźmy sposób działania tego układu. Niech sygnał wejściowy ma postać (4/21), a sygnał odniesienia $u_r(t)$ postać (4/13), tj.

$$u_r(t) = U_r \cos(\omega_0 t + \Delta\varphi)$$

Zakładamy więc, że oba sygnały mają taką samą pulsację ω_0, natomiast różnica ich faz wynosi $\Delta\varphi$. Przyjmiemy ponadto dla przejrzystości zapisu, że filtry dolnoprzepustowe eliminujące wytworzone przy operacji mnożenia składniki o widmach skupionych wokół pulsacji $2\omega_0$ nie wprowadzają zniekształceń sygnału użytecznego, tzn. w pasmie przenoszenia $H_d(\omega) = 1$. Przy tych założeniach, po prostych przekształceniach trygonometrycznych otrzymujemy, że

$$u_1(t) = \frac{1}{2} k_m U_i U_r a(t) \cos\Delta\varphi \tag{4/27}$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2} k_m U_i U_r a(t) \sin\Delta\varphi \tag{4/28}$$

Po wymnożeniu $u_1(t)$ i $u_2(t)$ dostajemy

$$u_3(t) = \frac{1}{8}k_m^3 U_i^2 U_r^2 a^2(t) \sin 2\Delta\varphi \tag{4/29}$$

Jeżeli teraz uśrednimy $u_3(t)$ za pomocą filtru dolnoprzepustowego o bardzo wąskim pasmie przenoszenia, to na jego wyjściu otrzymamy napięcie, którego wielkość będzie zależała od różnicy faz $\Delta\varphi$. Dla małych $\Delta\varphi$ będzie to zależność liniowa

$$u_f(t) \approx \frac{1}{8}k_m^3 U_i^2 U_r^2 \overline{a^2(t)} 2\Delta\varphi \tag{4/30}$$

Napięcie to można wykorzystać do dokonania zmiany fazy sygnału odniesienia. Przy idealnej zgodności faz $\Delta\varphi = 0$ i w górnym torze otrzymujemy sygnał zdemodulowany, natomiast składowa kwadraturowa w torze dolnym jest równa zeru.

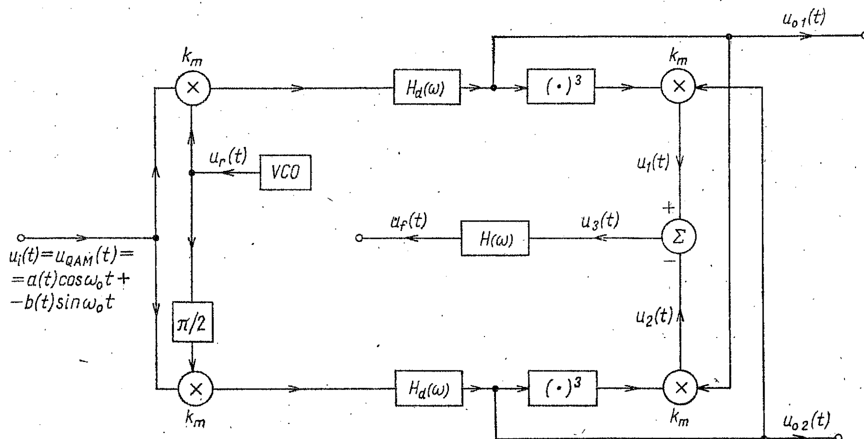
Jeśli pulsacja sygnału odniesienia w chwili przyłożenia sygnału wejściowego różni się od ω_o o $\Delta\omega$, to łatwo sprawdzić, że

$$u_3(t) = \frac{1}{3}k_m^3 U_i^2 U_r^2 a^2(t) \sin 2\Delta\omega t \tag{4/31}$$

a więc otrzymujemy sygnał wolnozmienny, który można wykorzystać do synchronizacji częstotliwości w generatorze odniesienia.

W przeprowadzonej analizie układu z rys. 4/6 staraliśmy się tylko wyjaśnić sposób uzyskiwania sygnału sterującego generatorem lokalnym, nazywanego też sygnałem błędu fazy, czy częstotliwości. Zauważmy, że doprowadzenie $u_f(t)$ do generatora sterowanego napięciem (VCO) zamyka pętlę sprzężenia zwrotnego, co umożliwia śledzenie w pewnych granicach częstotliwości i fazy sygnału wejściowego. Układy tego typu należą do klasy układów z fazową pętlą sprzężenia zwrotnego, a ich zasada działania oraz podstawowe właściwości omówione zostaną w rozdz. 8.

W przypadku systemu *QAM* sygnał błędu sterujący lokalnym generatorem sygnału odniesienia można uzyskać w układzie pokazanym na rys. 4/7. Jak



4/7 Układ Costasa do odtwarzania nośnej sygnału *QAM*

widać, jest to rozbudowany nieco wariant układu Costasa z rys. 4/6, dlatego w analizie możemy częściowo wykorzystać uzyskane już poprzednio wyniki. Przyjmijmy, że $u_i(t)$ jest określone wzorem (3/53), a $u_r(t)$ wzorem (4/13), tj.

$$u_i(t) = u_{QAM}(t) = a(t)\cos\omega_o t - b(t)\sin\omega_o t$$

$$u_r(t) = U_r\cos(\omega_o t + \Delta\varphi)$$

występuje więc pomiędzy tymi sygnałami różnica faz $\Delta\varphi$. Rozpatrując taką sytuację dla układu z rys. 4/3 otrzymaliśmy, że $u_{O1}(t)$ i $u_{O2}(t)$ wyrażają się wówczas wzorami (4/18) i (4/19). Jeśli założymy dodatkowo, że filtry dolnoprzepustowe mają w pasmie przenoszenia charakterystyki $H_d(\omega) = 1$, to wyrażenia te uproszczą się do postaci

$$u_{O1}(t) = \frac{1}{2}k_m U_r[a(t)\cos\Delta\varphi + b(t)\sin\Delta\varphi] \quad (4/32)$$

$$u_{O2}(t) = \frac{1}{2}k_m U_r[b(t)\cos\Delta\varphi - a(t)\sin\Delta\varphi] \quad (4/33)$$

Wykonując kolejno operacje pokazane na rys. 4/7 otrzymamy, że

$$u_3(t) = u_1(t) - u_2(t) = u_{O1}(t)u_{O2}(t)[u_{O1}^2(t) - u_{O2}^2(t)] \quad (4/34)$$

Po uśrednieniu $u_3(t)$ za pomocą filtru dolnoprzepustowego o bardzo wąskim pasmie przenoszenia (przyjmujemy również, że w pasmie tym $H(\omega) = 1$) otrzymujemy, że sygnał sterujący $u_f(t)$ ma w przybliżeniu postać

$$u_f(t) \approx \frac{1}{32}k_m^5 U_r^4[\overline{a^4(t)} + \overline{b^4(t)} - \overline{6a^2(t)b^2(t)}]\sin 4\Delta\varphi \quad (4/35)$$

Doprowadzenie $u_f(t)$ do generatora sterowanego napięciem (VCO) powoduje zamknięcie fazowej pętli sprzężenia zwrotnego i umożliwia synchronizację sygnału odniesienia.

Z wzorów (4/33) i (4/32) widać natychmiast, że dla $\Delta\varphi = 0$ na wyjściu toru górnego demodulatora otrzymujemy $a(t)$, a na wyjściu toru dolnego $b(t)$.

Do sygnałów *VSB* i *SSB-SC* dodaje się zwykle nośną o małym poziomie mocy, tzw. *sygnał pilotujący*, który umożliwia synchronizację generatora lokalnego i przeprowadzenie prawidłowej demodulacji. Sygnał ten wydziela się za pomocą wąskopasmowego filtru. Znajdują tu również zastosowanie pętle fazowe, które — jak zobaczymy później — zachowują się jak filtr wąskopasmowy umożliwiający śledzenie wolnych zmian częstotliwości i fazy sygnału synchronizującego. Ma to znaczenie wówczas, gdy modulatory nie są wystarczająco stabilne oraz gdy właściwości kanału ulegają zmianie.

W przypadku sygnału *SSB-SC*, jeśli wymagania na jakość demodulacji nie są zbyt wysokie, można stosować generator lokalny bez synchronizacji (np. strojony ręcznie). Jego częstotliwość i faza będą wówczas ulegać zmianom względem częstotliwości i fazy nośnej, co można ująć przyjmując, że sygnał odniesienia ma postać

$$u_r(t) = U_r\cos[\omega_o t + \varphi(t)] \quad (4/36)$$

Analizując układ z rys. 4/1a otrzymamy, że $u_O(t)$ wyraża się wówczas wzorem analogicznym do (4/15)

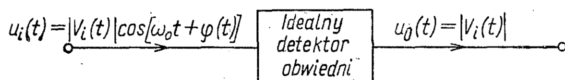
$$u_O(t) = \frac{1}{2} k_m U_r [a(t)\cos\varphi(t) \mp \hat{a}(t)\sin\varphi(t)] * h_d(t) \tag{4/37}$$

4.1.2 Demodulacja asynchroniczna

Demodulacji asynchronicznej można dokonać za pomocą *detektora obwiedni*. Aby zdefiniować jego działanie dla odpowiednio szerokiej klasy sygnałów, wykorzystajmy podany w dodatku D5 zapis sygnału zmodulowanego w postaci drgania uogólnionego. Zatem, zgodnie z wzorami (D5/21) i (D5/19) mamy

$$u_i(t) = |v_i(t)|\cos[\omega_o t + \varphi(t)] \tag{4/38}$$

gdzie ω_o jest pulsacją nośną sygnału, $v_i(t)$ jego obwiednią zespoloną, a $\varphi(t)$ fazą chwilową. Idealny detektor obwiedni pobudzony takim sygnałem daje odpowiedź proporcjonalną do $|v_i(t)|$, co pokazano na rys. 4/8. Jak z tego widać, detektor ten śledzi wartości chwilowe modułu obwiedni, ale jest całkowicie niewrażliwy na zmiany fazy sygnału wejściowego.



4/8 Idealny detektor obwiedni

Zbadajmy, jakie sygnały można demodulować za pomocą detektora obwiedni. Jako pierwszy weźmy sygnał dwuwstęgowy. Jego obwiednia zespolona ma postać

$$v_i(t) = a(t) + j0$$

a więc na wyjściu detektora otrzymamy

$$u_O(t) = |v_i(t)| = \sqrt{a^2(t)} = |a(t)| \tag{4/39}$$

ponieważ moduł obwiedni jest wielkością nieujemną. Dla sygnału *AM* obwiednia ma zawsze ten sam znak, tj. $a(t) \geqslant 0$ i zamiast (4/39) możemy napisać

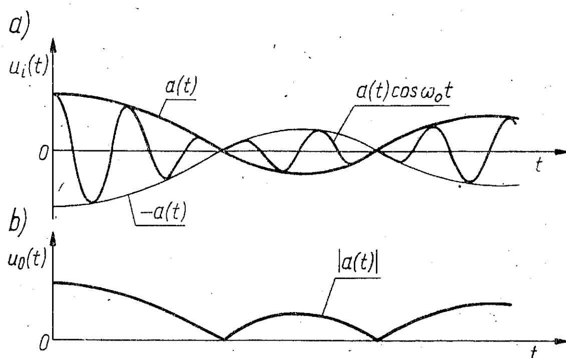
$$u_O(t) = a(t) \tag{4/40}$$

co oznacza, że sygnał wejściowy został zdemodulowany prawidłowo, bez zniekształceń. Inaczej jest dla sygnału *AM-SC*, którego obwiednia przyjmuje wartości dodatnie i ujemne, gdyż $\overline{a(t)} = 0$. Wówczas

$$u_O(t) = |a(t)| \neq a(t) \tag{4/41}$$

a więc sygnał wyjściowy różni się od sygnału modulującego, ponieważ stanowi „wyprostowaną" wersję obwiedni. Przypadek ten zilustrowano na rys. 4/9. Warto zauważyć, że analogiczne zniekształcenia wystąpią także dla sygnału dwuwstęgowego z nośną, jeśli tylko będą istniały takie przedziały czasu, w których

obwiednie górna i dolna zmieniają znak. Wyjaśnia to dlaczego o sygnale *AM* zakładaliśmy, że jego współczynnik głębokości modulacji musi spełniać warunek $m \leqslant 1$.



4/9 Przykład zastosowania detektora obwiedni do demodulacji sygnału *AM-SC*

Gdy do detektora obwiedni przyłożymy sygnał jednowstęgowy *SSB-SC*, dla którego

$$v_i(t) = a(t) \pm \mathrm{j}\hat{a}(t) \tag{4/42}$$

to otrzymamy

$$u_O(t) = \sqrt{a^2(t)+\hat{a}^2(t)} \neq a(t) \tag{4/43}$$

Jest to silnie zniekształcony sygnał modulujący, gdyż składowa kwadraturowa $\hat{a}(t)$ jest przebiegiem o tej samej mocy średniej, co i $a(t)$. Jeżeli do sygnału jednowstęgowego zostanie dodana nośna $U_n \cos\omega_0 t$ o amplitudzie na tyle dużej, że $U_n \gg |a(t)|$ oraz $U_n \gg |\hat{a}(t)|$, to zamiast (4/42) i (4/43) otrzymamy odpowiednio

$$v_i(t) = [U_n + a(t)] + \mathrm{j}\hat{a}(t) \tag{4/44}$$

oraz

$$u_O(t) = \sqrt{[U_n+a(t)]^2+\hat{a}^2(t)} \approx U_n + a(t)$$

Ze względów energetycznych rozwiązanie takie nie jest na ogół stosowane.

Inaczej nieco kształtuje się sytuacja dla sygnału *VSB*. Jeśli do sygnału tego

$$u_{VSB}(t) = a(t)\cos\omega_o t - \tilde{a}(t)\sin\omega_o t$$

dodamy nośną $U_n \cos\omega_o t$, to

$$v_i(t) = [U_n + a(t)] + \mathrm{j}\tilde{a}(t) \tag{4/46}$$

Różnica w stosunku do sygnału *SSB* polega na tym, że teraz składowa kwadraturowa $\tilde{a}(t)$ jest mała w porównaniu do składowej synfazowej $a(t)$. Gdy $U_n \gg |\tilde{a}(t)|$, to

$$u_O(t) = \sqrt{[U_n+a(t)]^2+\tilde{a}^2(t)} \approx U_n + a(t) \tag{4/47}$$

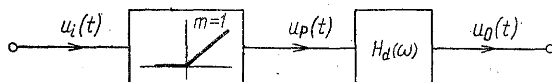
Dlatego do sygnału *VSB* z nośną można na ogół stosować bez większych zniekształceń detekcję obwiedni. Jako przykład można tu wymienić stosowanie detektorów obwiedni do demodulacji sygnału wizyjnego w odbiornikach telewizji czarno-białej.

W rozwiązaniach praktycznych funkcję detektora obwiedni spełniają detektory wartości średniej lub wartości szczytowej, których zasady działania teraz omówimy.

Detekcja wartości średniej

Rozważmy układ pokazany na rys. 4/10, złożony z idealnego prostownika jednopołówkowego oraz filtru dolnoprzepustowego. Na wejście tego układu został przyłożony sygnał *AM*

$$u_i(t) = a(t)\cos\omega_0 t; \qquad a(t) \geqslant 0 \tag{4/48}$$



4/10 Detektor wartości średniej

Przy założeniu nie ograniczającym ogólności rozważań, że nachylenie charakterystyki prostownika równe jest 1 otrzymamy, iż

$$u_P(t) = \begin{cases} u_i(t); & \cos\omega_0 t \geqslant 0 \\ 0; & \cos\omega_0 t < 0 \end{cases} \tag{4/49}$$

Zależność tę można zapisać w postaci

$$u_P(t) = s_u(t)u_i(t) \tag{4/50}$$

gdzie $s_u(t)$ jest funkcją kluczującą, zdefiniowaną w następujący sposób:

$$s_u(t) = \begin{cases} 1; & \cos\omega_0 t \geqslant 0 \\ 0; & \cos\omega_0 t < 0 \end{cases} \tag{4/51}$$

Po rozwinięciu $s_u(t)$ w szereg Fouriera

$$s_u(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos\omega_0 t - \frac{2}{3\pi}\cos 3\omega_0 t + \dots \tag{4/52}$$

i podstawieniu (4/48) oraz (4/52) do (4/50) otrzymujemy

$$u_P(t) = \frac{a(t)}{2}\cos\omega_0 t + \frac{2a(t)}{\pi}\cos^2\omega_0 t - \frac{2a(t)}{3\pi}\cos 3\omega_0 t\cos\omega_0 t + \dots \tag{4/53}$$

Porządkując wyrazy w (4/53) dostajemy ostatecznie

$$u_P(t) = \frac{a(t)}{\pi} + \frac{a(t)}{2}\cos\omega_0 t + [\text{wyrazy o pulsacjach nośnych } n\omega_0] \tag{4/54}$$

Jeśli filtr dolnoprzepustowy usunie składowe niepożądane o widmach skoncentrowanych wokół pulsacji $n\omega_0$, $n = 1, 2, \ldots$, to sygnał na jego wyjściu ma postać

$$u_O(t) = \frac{1}{\pi} a(t) * h_d(t) \tag{4/55}$$

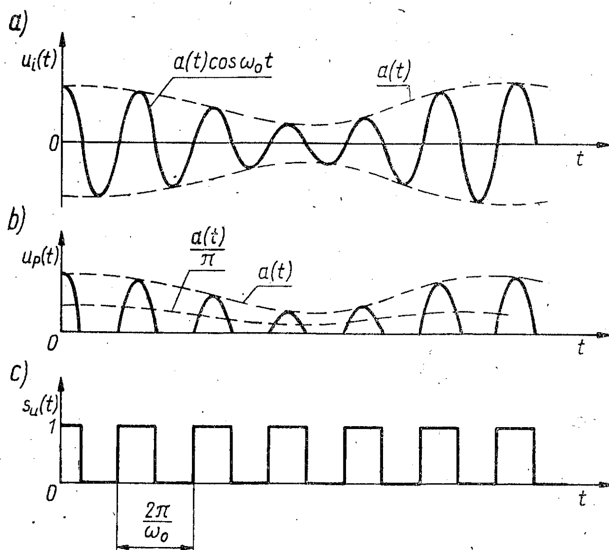
Gdy ponadto charakterystyka filtru ma w pasmie przenoszenia wartość stałą (patrz np. rys. 4/1b), równą $H_d(0)$, to otrzymujemy niezniekształcony sygnał modulujący, gdyż

$$u_O(t) = \frac{1}{\pi} a(t) H_d(0) \tag{4/56}$$

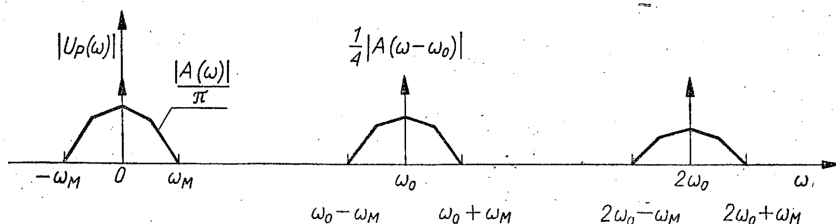
Na rysunku 4/11 przedstawiono przebiegi czasowe $u_i(t)$, $u_P(t)$ oraz funkcji $s_u(t)$, a na rys. 4/12 widmo $u_P(t)$. Z ostatniego rysunku widać, że warunek nie pokrywania się widm składowych ma postać

$$\omega_M < \omega_o/2 \tag{4/57}$$

Łatwo sprawdzić, że $a(t)/\pi$ stanowi wartość średnią sygnału $u_i(t)$ liczoną za okres nośnej. Z rysunku 4/11 widać także, iż detektor wartości średniej wydziela zawsze



4/11 Wejściowy sygnał *AM* (a), sygnał na wyjściu prostownika (b) i funkcja kluczująca (c)



4/12 Widmo amplitudowe sygnału $u_P(t)$

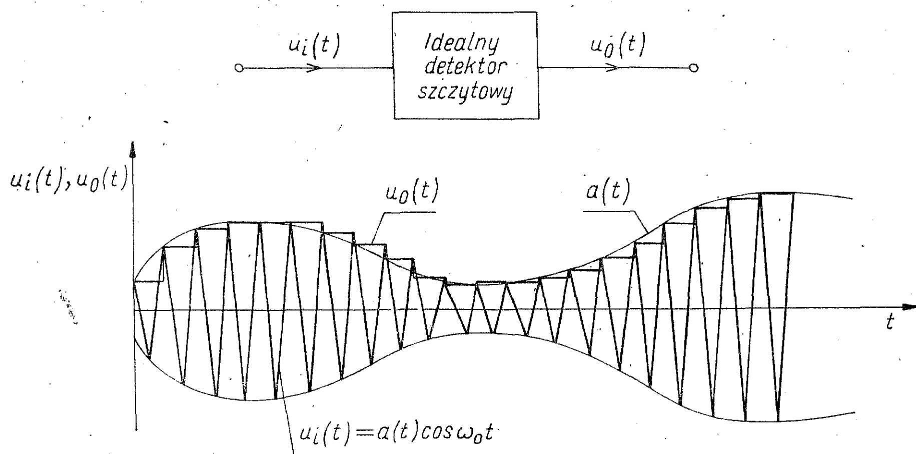
tylko obwiednię dodatnią. Przykładowo zamiana $a(t)\cos\omega_o t$ na $-a(t)\cos\omega_o t = a(t)\cos(\omega_o t+\pi)$ oznacza tylko przesunięcie początku układu współrzędnych, ale wciąż są przenoszone tylko dodatnie połówki sygnału $u_i(t)$. Dlatego zależność (4/56) w ściślejszym zapisie ma postać

$$u_O(t) = \frac{1}{\pi}|a(t)|H_d(0) \tag{4/58}$$

Zastosowanie w analizowanym układzie idealnego prostownika dwupołówkowego powoduje podwojenie sygnału wyjściowego oraz zniknięcie wyrazów z nośnymi o pulsacjach będących nieparzystymi wielokrotnościami ω_o, dzięki czemu nierówność (4/57) można zastąpić przez $\omega_M < \omega_o$.

Detekcja wartości szczytowej

Idealnym *detektorem szczytowym* jest układ *próbkująco-pamiętający*, który próbkuje w każdym okresie nośnej wartość szczytową sygnału i utrzymuje ją aż do wystąpienia w następnym okresie kolejnej wartości szczytowej. Skutek działania takiego detektora dla sygnału *AM* zilustrowano na rys. 4/13. Jest oczy-

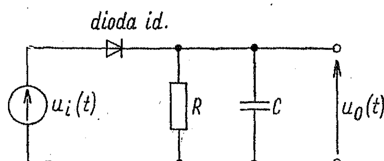


4/13 Sygnał wejściowy $u_i(t)$ oraz sygnał wyjściowy $u_O(t)$ w idealnym detektorze szczytowym

wiste, że jeśli nie zastosuje się odpowiedniej filtracji, to napięcie wyjściowe $u_O(t)$ będzie dobrze przybliżać przebieg obwiedni $a(t)$ jedynie wówczas, gdy maksymalna pulsacja w widmie sygnału modulującego ω_M, będzie znacznie mniejsza od pulsacji przebiegu nośnego ω_o. Gdy nierówność $\omega_M \ll \omega_o$ zachodzi, to z punktu widzenia zastosowań praktycznych omawianego układu można uważać, że $u_O(t)$ jest wystarczająco gładkie.

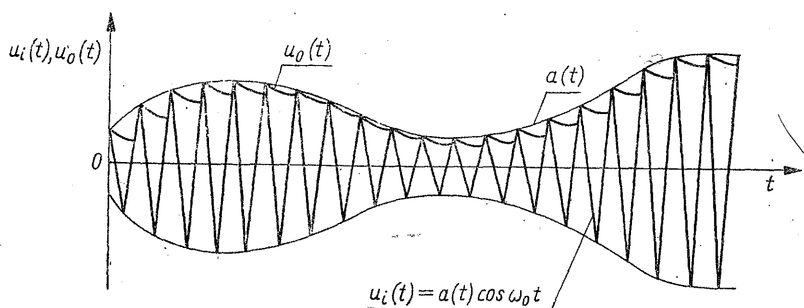
W większości praktycznych detektorów szczytowych, jako układ próbkująco-pamiętający stosuje się równoległe połączenie elementów *RC*, pobudzanych napięciem wejściowym przez diodę, jak to pokazano na rys. 4/14. Zasadę działania

tego układu można w sposób opisowy przedstawić następująco. Załóżmy, że w momencie początkowym kondensator nie jest naładowany. Niech $u_i(t)$ ma zwrot dodatni i narasta od zera do aktualnej wartości szczytowej. Przy takiej polaryzacji dioda przewodzi, kondensator ładuje się i napięcie na nim osiąga tę



4/14 Detektor diodowy

samą wartość szczytową. Następnie $u_i(t)$ zaczyna maleć i gdy jego wartość spadnie poniżej wartości napięcia $u_O(t)$, istniejącego na kondensatorze i polaryzującego diodę w kierunku zaporowym, dioda przestaje przewodzić. Kondensator rozładowuje się wówczas przez rezystor R ze stałą czasową $\tau = RC$. Dopiero wówczas, gdy napięcie $u_i(t)$ przyjmie ponownie polaryzację dodatnią i stanie się większe od aktualnej wartości $u_O(t)$ diodą zaczyna znów przewodzić i następuje doładowanie kondensatora do kolejnej wartości szczytowej $u_i(t)$. Dalej cykl się powtarza, jak to pokazano na rys. 4/15. Z rysunku tego widać także, że dobór stałej czasowej τ ma istotny wpływ na przebieg $u_O(t)$. Jeśli τ jest zbyt małe, to następuje szybkie



4/15 Sygnał wejściowy $u_i(t)$ oraz sygnał wyjściowy $u_O(t)$ w idealizowanym detektorze diodowym

rozładowywanie się kondensatora i $u_O(t)$ jest bardzo „postrzępione". Jeśli natomiast τ jest zbyt duże, to przy malejącej wartości obwiedni $u_i(t)$ spadek napięcia $u_O(t)$ może być za wolny i w konsekwencji nie nadąża ono za zmianami $a(t)$, co powoduje duże zniekształcenia.

Z zasady działania detektora szczytowego widać (analiza szczegółowa podana zostanie przy omawianiu układów praktycznych), że $u_O(t)$ jest proporcjonalna do $a(t)$; detektor ten nadaje się więc doskonale do demodulacji sygnałów *AM* (a także *VSB* z nośną), nie można go natomiast stosować w przypadku sygnałów *AM-SC*, czy *SSB-SC*.

4.2 PRZYKŁADY ROZWIĄZAŃ UKŁADOWYCH DETEKTORÓW OBWIEDNI

Omówimy teraz działanie prostych, ale szeroko stosowanych detektorów obwiedni. Ponieważ jako element nieliniowy są stosowane najczęściej diody, główną uwagę poświęcimy układom zawierającym takie właśnie przetworniki.

4.2.1 Detektor wartości średniej

W analizie układu funkcjonalnego detektora wartości średniej podanego na rys. 4/10 przyjmowaliśmy, że zastosowany został idealny prostownik jednopołówkowy, czyli element progowy z napięciem progowym równym zeru. Zastosowanie zamiast takiego elementu diody, której charakterystykę opisać można zależnością

$$i_D \approx I_S \exp\left(\frac{u_D}{U_T}\right) \tag{4/59}$$

zmienia w istotny sposób warunki pracy układu i może prowadzić do znacznych zniekształceń demodulowanego sygnału. Charakterystykę o kształcie zbliżonym do pożądanego można jednak uzyskać przez wprowadzenie w szereg z diodą dodatkowej rezystancji. Rozważmy w związku z tym układ podany na rys. 4/16, składający się z gałęzi zawierającej diodę i rezystor R, stopnia separującego reprezentowanego przez źródło sterowane o wydajności αi_D oraz filtru dolnoprzepustowego o elementach R_0C_0. Z uwagi na istnienie rezystora R prąd jest związany z napięciem wejściowym następującym równaniem:

$$u_i = u_R + u_D = Ri_D + U_T \ln\frac{i_D}{I} \tag{4/60}$$

W dodatku D1 pokazaliśmy[1], że rezystancja R ma wpływ linearyzujący na charakterystykę wynikową gałęzi. Wykazaliśmy tam, że można ją przybliżyć zależnością

$$i_D \approx \begin{cases} \dfrac{u_i - U_P}{R} & u_i \geqslant U_P \\ 0 & u_i < U_P \end{cases} \tag{4/61}$$

przy czym napięcie progowe U_P zależy od wartości rezystancji R oraz prądu nasycenia diody I_S i wyraża się następującym wzorem:

$$U_P = U_T\left(5 - \ln\frac{RI_S}{U_T}\right) \tag{4/62}$$

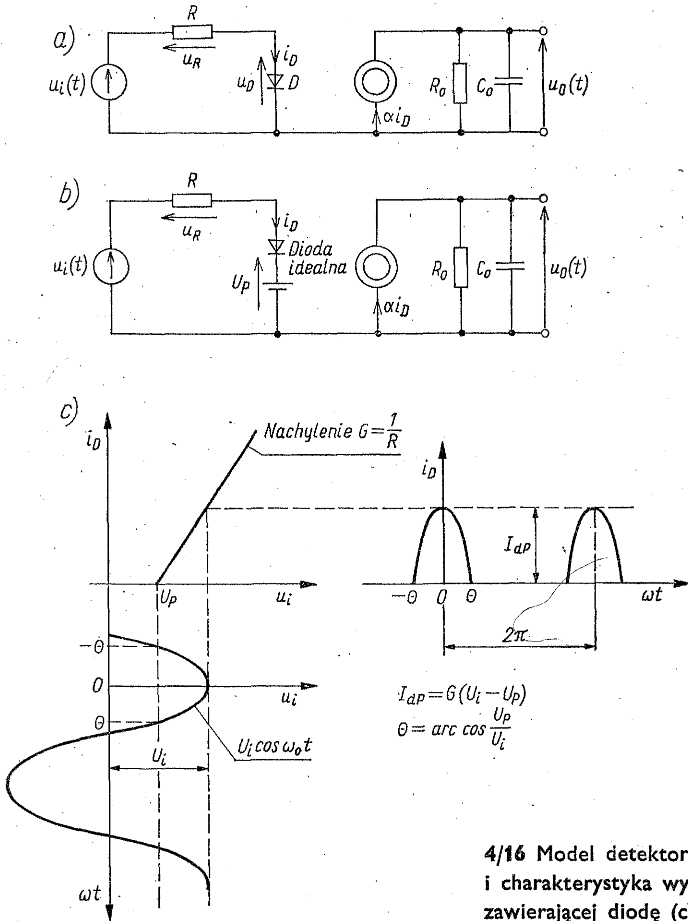
W związku z tym, układ z rys. 4/16a zawierający diodę rzeczywistą możemy przedstawić tak, jak na rys. 4/16b. Charakterystykę wynikową całej gałęzi, dla przyjętej arbitralnie wartości U_P, pokazano na rys. 4/16c.

---

[1] Chodzi o przypadek drugi, w którym napięcie wymuszające $u_i(t)$ ma wartość średnią równą zeru.

Aby zaobserwować wpływ napięcia U_P na pracę układu załóżmy, że $u_i(t) = U_i \cos\omega_o t$ i rozważmy sytuację zilustrowaną na rys. 4/16c. Jak widać, prąd $i_D(t)$ płynie tylko w przedziałach o szerokości 2θ (w związku z tym θ nazywamy *kątem przepływu*) i ma wówczas postać

$$i_D(t) = G(U_i \cos\omega_o t - U_P) \tag{4/63}$$



4/16 Model detektora wartości średniej (a, b) i charakterystyka wynikowa gałęzi zawierającej diodę (c)

Z uwagi na parzystą symetrię impulsów, prąd $i_D(t)$ można rozwinąć w szereg Fouriera o postaci

$$i_D(t) = I_{DO} + I_{d1}\cos\omega_o t + I_{d2}\cos 2\omega_o t + \ldots \tag{4/64}$$

Wartość średnia $i_D(t)$ jest określona wzorem

$$I_{DO} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\theta} G(U_i \cos\omega_o t - U_P)\mathrm{d}(\omega_o t) = \frac{GU_i}{\pi}(\sin\theta - \theta\cos\theta) \tag{4/65}$$

Wykorzystanie zależności

$$\theta = \arccos\frac{U_P}{U_i} \tag{4/66}$$

pozwala wyrażenie (4/65) sprowadzić do postaci

$$I_{DO} = \frac{U_P}{\pi R}\left[\sqrt{\left(\frac{U_i}{U_P}\right)^2-1}-\arccos\frac{U_P}{U_i}\right] \tag{4/67}$$

Można pokazać, że dla $U_i > 4U_P$, równanie (4/67) można z błędem mniejszym od 5% przybliżyć zależnością asymptotyczną [2]

$$I_{DO} = \frac{U_i}{\pi R}-\frac{U_P}{2R} \tag{4/68}$$

Prąd I_{DO} wywoła w obwodzie wyjściowym składową średnią napięcia o wartości

$$U_0 = \alpha I_{DO}R_o = \frac{\alpha U_i R_o}{\pi R}-\frac{\alpha U_P R_o}{2R} \tag{4/69}$$

Jak widać, dla $U_i > 4U_P$ składowa U_0 zależy od amplitudy napięcia wejściowego U_i w sposób liniowy.

Przyjmijmy teraz, że na wejście układu podajemy sygnał *AM* o postaci

$$u_i(t) = a(t)\cos\omega_o t \tag{4/70}$$

gdzie

$$a(t) = U_i[1+mf(t)] \tag{4/71}$$

jest wolnozmieniającą się obwiednią o widmie ograniczonym do $\omega_M \ll \omega_o$. Z rysunku 4/16c łatwo wywnioskować, że częstotliwość powtarzania impulsów prądowych nie zmieni się, natomiast ich amplitudy I_{dp} oraz kąt przepływu θ będą teraz ulegać wolnym zmianom w czasie. Możemy zatem przyjąć, że prąd $i_D(t)$ można w przybliżeniu opisać szeregiem o postaci (4/64), w którym wartość średnia I_{DO} (za okres nośnej) oraz amplitudy kolejnych składowych I_{dk} ulegają również wolnym zmianom. Jeśli więc zapiszemy, że

$$i_{DO}(t) = \frac{a(t)}{\pi R}-\frac{U_P}{2R} \tag{4/72}$$

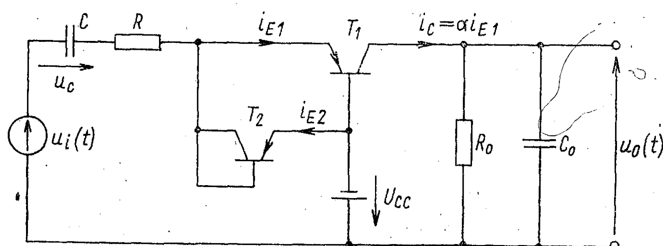
i przyjmiemy, iż filtr dolnoprzepustowy usunie widma skoncentrowane wokół pulsacji ω_o, $2\omega_o$, ..., a przeniesie bez zniekształceń sygnał $a(t)$, to napięcie wyjściowe wyrazi się wzorem

$$u_O(t) = \frac{\alpha R_o}{\pi R}a(t)-\frac{\alpha R_o U_P}{2R} \tag{4/73}$$

Powyższa liniowa zależność jest słuszna tylko wówczas, gdy w każdej chwili czasu zachodzi nierówność $a(t) > 4U_P$. Wykorzystując (4/71) oraz fakt, że $f(t)|_{\max} = 1$ możemy tę nierówność zapisać w postaci

$$U_i > \frac{4U_P}{1-m} \tag{4/74}$$

Widać stąd, że napięcie progowe U_P ogranicza zakres liniowej pracy detektora do odpowiednio dużych amplitud sygnału wejściowego. Z wzoru (4/62) wynika, że U_P zależy zarówno od R, jak i od prądu nasycenia diody I_S. Ponieważ zwiększenie wartości R powoduje zmniejszenie się składowej zmiennej napięcia wyjściowego $u_O(t)$, ważny jest właściwy wybór diody. Przyjmijmy dla przykładu, że $R = 10$ kΩ. Dla diody germanowej ($I_S = 2 \cdot 10^{-7}$ A) dostaniemy $U_P \approx 197$ mV, natomiast dla diody krzemowej ($I_S = 2 \cdot 10^{-12}$ A) napięcie to jest ponad dwukrotnie większe, gdyż wynosi $U_P \approx 496$ mV. Wynika stąd, że przy zastosowaniu diody germanowej i $m = 0{,}6$ demodulacja liniowa będzie zachodziła wówczas, gdy $U_i > 1{,}97$ V. Analogiczne obliczenia dla diody krzemowej dają nierówność $U_i > 4{,}96$ V.



4/17 Układ praktyczny detektora wartości średniej

Praktyczne rozwiązanie analizowanego układu przedstawiono na rys. 4/17. Rolę diody spełnia tutaj złącze emiter-baza tranzystora T_1. Napięcie U_{CC} ma zapewnić pracę tego tranzystora w obszarze aktywnym. Dla izolacji źródła sygnału $u_i(t)$ od stałego napięcia U_{CC} został wprowadzony kondensator C. Ponieważ $\overline{u_i(t)} = 0$, natomiast $\overline{i_{E1}(t)} \neq 0$, więc dla uniknięcia dodatkowej polaryzacji, która mogłaby wprowadzić niepożądane przesunięcie spoczynkowego punktu pracy złącza emiter-baza, został dołączony identyczny tranzystor T_2, działający jako dioda. W rezultacie $\overline{i_{E1}(t)} = \overline{i_{E2}(t)}$ i napięcie stałe na kondensatorze sprzęgającym ma wartość $U_{C0} \approx U_{CC}$. Jeśli pojemność C zostanie tak dobrana, że jej reaktancja dla pulsacji ω_0 będzie pomijalnie mała w porównaniu z R to otrzymamy zależność

$$u_i = Ri_{E1} + U_T \ln \frac{i_{E1}}{I_S} \tag{4/75}$$

identyczną z (4/60), na podstawie której otrzymaliśmy dyskutowane poprzednio wyniki. Należy jeszcze dodać, że aby praca tranzystora T_1 odbywała się w obszarze aktywnym bez nasycenia powinna zachodzić nierówność $u_{CB} > -0{,}2$ V.

Jak wynika z przeprowadzonej analizy, dla uzyskania liniowej pracy demodulatora w zakresie małych napięć wejściowych konieczne jest zastosowanie elementu progowego o małej wartości napięcia U_P. Zmniejszenie U_P jest możliwe, jeśli wykorzystamy układ, w którym dioda jest umieszczona w pętli sprzężenia zwrotnego wzmacniacza operacyjnego, pokazany na rys. 4/18b. Układ taki był

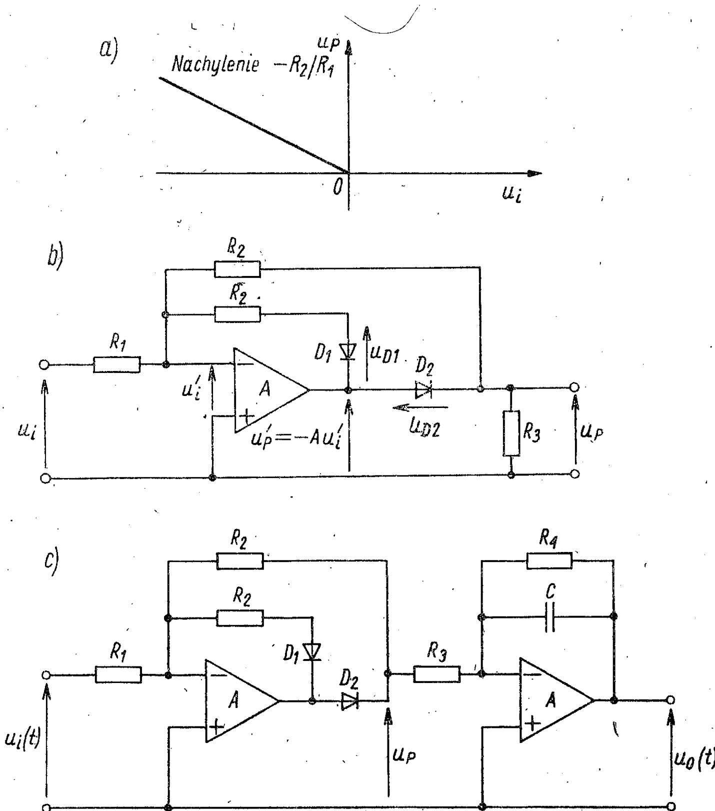
analizowany w rozdz. 1, gdzie pokazano, że jego charakterystykę przejściową można opisać w następujący sposób:

$$u_P = \begin{cases} \dfrac{R_3}{R_2+R_3}\,\dfrac{\beta_1}{1+\beta_1 A}\left[\dfrac{R_2}{R_1}u_i+u_{D1}\right] & u_i > 0 \\ 0 & u_i = 0 \\ -\dfrac{R_2}{R_1}\,\dfrac{\beta_2 A}{1+\beta_2 A}u_i-\dfrac{u_{D2}}{1+\beta_2 A} & u_i < 0 \end{cases} \tag{4/76}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{1+\dfrac{R_2}{R_1}\left(1+\dfrac{R_1}{R_2+R_3}\right)} \\ \beta_2 &= \frac{1}{1+\dfrac{R_2}{R_1}} \end{aligned} \tag{4/77}$$

Zależność (4/76) zawiera składniki liniowe proporcjonalne do u_i oraz składniki nieliniowe zależne od napięć u_{D1} i u_{D2}. Te ostatnie mogą być skutecznie zredu-



4/18 Charakterystyka progowa (a), układ realizujący charakterystykę progową (b), cały układ detektora wartości średniej z filtrem dolnoprzepustowym (c)

kowane przez zastosowanie odpowiednio silnego sprzężenia zwrotnego. W granicznym przypadku, przy $A \to \infty$ (praktycznie dla $A > 100$), otrzymujemy

$$u_P = \begin{cases} -\dfrac{R_2}{R_1} u_i & u_i < 0 \\ 0 & u_i \geqslant 0 \end{cases} \tag{4/78}$$

czyli napięcie progowe jest równe zeru i układ zachowuje się tak, jak idealny prostownik jednopołówkowy, o charakterystyce pokazanej na rys. 4/18a. Cały układ demodulatora z dolnoprzepustowym filtrem aktywnym jest pokazany na rys. 4/18c. Przy dostatecznie dużym wzmocnieniu A wzmacniacza operacyjnego transmitancja filtru

$$H_d(s) = \frac{U_O(s)}{U_P(s)} = -\frac{R_4/R_3}{1+sR_4C} \tag{4/79}$$

Ponieważ układ progowy działa jak idealny prostownik mający charakterystykę o nachyleniu $-R_2/R_1$, napięcie $u_P(t)$ można wyznaczyć z wzoru (4/54), po uprzednim pomnożeniu go przez ten stosunek. Przyjmując, że $u_i(t)$ ma postać (4/70), a filtr usuwa składowe niepożądane, otrzymujemy

$$u_O(t) = \frac{R_2}{\pi R_1} a(t) * h_d(t) \tag{4/80}$$

gdzie $h_d(t) = \mathscr{L}^{-1}[H_d(s)]$. Jeśli charakterystyka filtru jest płaska w przedziale częstotliwości, w którym istnieje widmo $a(t)$, to zależność (4/80) upraszcza się do postaci

$$u_O(t) = \frac{R_2}{\pi R_1} \frac{R_4}{R_3} a(t) \tag{4/81}$$

4.2.2 Detektor wartości szczytowej

Diodowy detektor wartości szczytowej, którego układ przedstawiono na rys. 4/19a, należy do najczęściej stosowanych demodulatorów sygnałów AM. Generator prądowy z obwodem rezonansowym stanowią na ogół model ostatniego stopnia wzmacniacza pośredniej częstotliwości, dioda spełnia rolę prostownika, a elementy R_o, C_o tworzą prosty filtr dolnoprzepustowy. Szczytowy detektor obwiedni projektuje się zawsze tak, aby dobroć wypadkowa obwodu rezonansowego była duża, gdyż ma on wówczas odpowiednią selektywność i wpływ elementu nieliniowego na kształt napięcia $u_i(t)$ jest pomijalny. Stałej czasowej filtru $R_o C_o$ nadaje się wartość dużą w porównaniu z okresem $2\pi/\omega_o$, aby napięcie $u_O(t)$ było w przybliżeniu równe wartości szczytowej $u_i(t)$ i pozostawało stałe w czasie każdego okresu nośnej.

Mimo prostoty samego układu jego analiza jest złożona, dlatego wprowadzimy szereg założeń upraszczających, które pozwolą uzyskać przybliżone, ale czytelne wyniki.

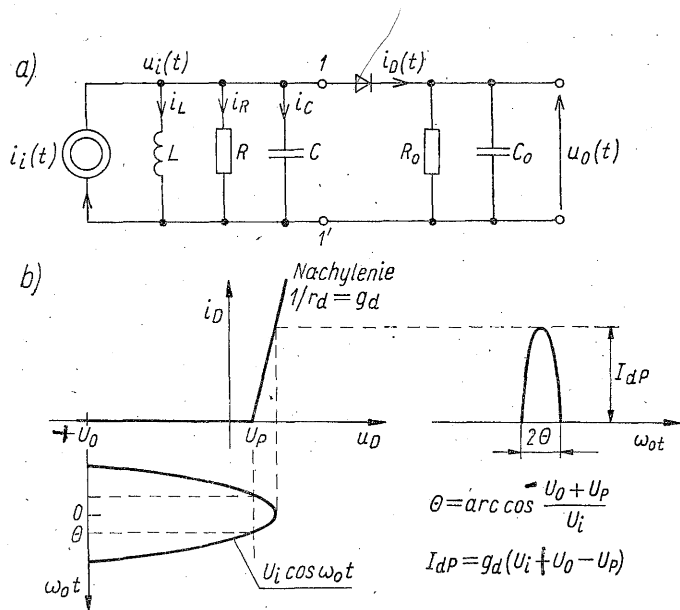
Założymy przede wszystkim, że charakterystyka diody ma postać pokazaną

na rys. 4/19b. Ponadto przyjmiemy na początek, że $i_i(t)$ jest przebiegiem sinusoidalnym

$$i_i(t) = I_i \cos\omega_0 t \tag{4/82}$$

Jeśli obwód rezonansowy ma dużą dobroć, a więc jest dostatecznie selektywny, to napięcie $u_i(t)$ ma również postać sinusoidalną

$$u_i(t) = U_i \cos\omega_0 t \tag{4/83}$$



4/19 Detektor wartości szczytowej (a), charakterystyka diody (b)

Wymuszony tym napięciem okresowy prąd $i_D(t)$ ma składową średnią I_{DO}, która płynąc przez R_o wywołuje na nim średnie napięcie o wartości

$$U_0 = R_o I_{DO} \tag{4/84}$$

Gdy stała czasowa $\tau_o = R_o C_o$ jest duża w porównaniu z okresem nośnej to można przyjąć, że napięcie $u_O(t)$ ulega tylko niewielkim wahaniom, wywołanym rozładowywaniem się kondensatora C_o w przedziałach czasu, w których prąd przez diodę nie płynie i w przybliżeniu jest równe wartości stałej U_0. Sytuację tę zilustrowano na rys. 4/19b. Przy założonym kształcie charakterystyki prąd doładowujący kondensator ma postać impulsów o szerokości 2θ, określonych wzorem

$$i_D(t) = g_d[U_i \cos\omega_0 t - (U_0 + U_P)] \tag{4/85}$$

przy czym

$$\cos\theta = \frac{U_0 + U_P}{U_i} \tag{4/86}$$

Zauważmy, że wartość napięcia U_0 polaryzującego diodę zależy od amplitudy sygnału $u_i(t)$. Jeśli $U_i < U_P$, to dioda nie przewodzi w żadnym momencie czasu,

prąd $i_D(t) = 0$, a w konsekwencji także $U_0 = 0$. W związku z tym wzory (4/85) i (4/86) oraz zależności, które dalej wyprowadzimy będą miały sens tylko wówczas, gdy amplituda sygnału wejściowego będzie większa od napięcia progowego, tzn. gdy $U_i > U_P$.

Prąd $i_D(t)$ można rozwinąć w szereg Fouriera o postaci (4/64). Na podstawie (4/85) otrzymujemy, że

$$I_{DO} = \frac{U_i}{\pi r_d}(\sin\theta - \theta\cos\theta) \tag{4/87}$$

Wykorzystując (4/84) możemy wyznaczyć stosunek średniej wartości napięcia wyjściowego U_0 do amplitudy napięcia wejściowego U_i, nazywany sprawnością detekcji

$$\eta = \frac{U_0}{U_i} = \frac{1}{\pi}\frac{R_o}{r_d}(\sin\theta - \theta\cos\theta) \tag{4/88}$$

Wyznaczając ten sam stosunek z zależności (4/86) otrzymujemy

$$\frac{U_0}{U_i} = \cos\theta - \frac{U_P}{U_i} \tag{4/89}$$

Jeśli przyjmiemy, że $U_i \gg U_P$, to z porównania (4/88) i (4/89) widać, że wówczas sprawność detekcji η oraz kąt przepływu θ zależą od stosunku R_o/r_d, który dla danego obwodu jest wielkością stałą. Zbadajmy to dokładniej. Po podstawieniu równania (4/89) do (4/88) dostaniemy

$$\frac{R_o}{r_d} = \frac{\pi\left(\cos\theta - \dfrac{U_P}{U_i}\right)}{\sin\theta - \theta\cos\theta} \tag{4/90}$$

Przy $R_o/r_d \gg 1$ kąt przepływu θ będzie spełniał nierówność $\theta \ll 1$, a w związku z tym funkcje $\sin\theta$ i $\cos\theta$ można zastąpić pierwszymi dwoma wyrazami ich rozwinięcia potęgowego, co daje

$$\frac{R_o}{r_d} \approx \frac{\pi\left[1 - \dfrac{\theta^2}{2} - \dfrac{U_P}{U_i}\right]}{\theta - \dfrac{\theta^3}{6} - \theta + \dfrac{\theta^3}{2}} \approx \frac{3\pi\left(1 - \dfrac{U_P}{U_i}\right)}{\theta^3} \tag{4/91}$$

Stąd otrzymujemy, że

$$\theta \approx \sqrt[3]{3\pi\frac{r_d}{R_o}\left(1 - \frac{U_P}{U_i}\right)} \tag{4/92}$$

Zapisując równanie (4/89) w postaci

$$\frac{U_0}{U_i} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} - \frac{U_P}{U_i} \tag{4/93}$$

i podstawiając za θ wyrażenie (4/92) dostaniemy

$$\frac{U_0}{U_i} \approx \left(1 - \frac{U_P}{U_i}\right) - 2{,}23\sqrt[3]{\left(\frac{r_d}{R_o}\right)^2\left(1 - \frac{U_P}{U_i}\right)^2} \tag{4/94}$$

Ponieważ zwykle stosunek R_o/r_d jest rzędu $10^2 \ldots 10^3$, więc równanie (4/94) można uprościć do postaci

$$\frac{U_0}{U_i} \approx 1 - \frac{U_P}{U_i} \tag{4/95}$$

a stąd wynika, że

$$U_0 \approx U_i - U_P \tag{4/96}$$

czyli, że średnia wartość napięcia wyjściowego $u_O(t)$ zależy liniowo od amplitudy sygnału wejściowego U_i. Dla dużych amplitud $u_i(t)$, tj. dla $U_i \gg U_P$, zamiast (4/92)—(4/88) i (4/96) możemy napisać następujące zależności:

$$\theta \approx \sqrt[3]{3\pi \frac{r_d}{R_o}} \tag{4/97}$$

$$\eta \approx \cos\theta \tag{4/98}$$

$$U_0 \approx U_i \tag{4/99}$$

Wyznaczmy teraz amplitudę pierwszej harmonicznej prądu $i_D(t)$. Na podstawie (4/85) dostajemy

$$I_{d1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\theta} g_d[U_i\cos\omega_o t - (U_0 + U_P)]\cos\omega_o t \,\mathrm{d}(\omega_o t)$$

$$= \frac{U_i}{\pi r_d}(\theta - \sin\theta\cos\theta) \tag{4/100}$$

Ponieważ przyjęliśmy, że ze względu na dużą selektywność obwodu rezonansowego napięcie $u_i(t)$ ma postać sinusoidalną (4/83), więc moc średnia pobierana przez tę część układu, która znajduje się na prawo od zacisków *1-1'* (patrz rys. 4/19a)

$$P = \frac{\omega_o}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_o}} u_i(t)\, i_D(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}U_i I_{d1} = \frac{U_i^2}{\pi r_d}(\theta - \sin\theta\cos\theta) \tag{4/101}$$

Na tej podstawie możemy zdefiniować rezystancję wejściową widzianą z zacisków *1-1'*, jako

$$R_{we} = \frac{U_i^2}{2P} = \frac{U_i}{I_{d1}} = \frac{\pi r_d}{\theta - \sin\theta\cos\theta} \tag{4/102}$$

Jak widać, R_{we} zależy od kąta przepływu θ, który z kolei jest funkcją stosunku R_o/r_d. Dla małych wartości θ jest słuszne przybliżenie

$$\theta - \sin\theta\cos\theta \approx \theta - \left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right)\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \approx \frac{2}{3}\theta^3 \tag{4/103}$$

Jeśli teraz θ wyrazimy za pomocą wzoru (4/97) i podstawimy do (4/102), to dla $U_i \gg U_P$, R_{we} wyrazi się wzorem

$$R_{we} \approx \frac{\pi r_d}{\frac{2}{3}\left(3\pi \frac{r_d}{R_o}\right)} = \frac{R_o}{2} \tag{4/104}$$

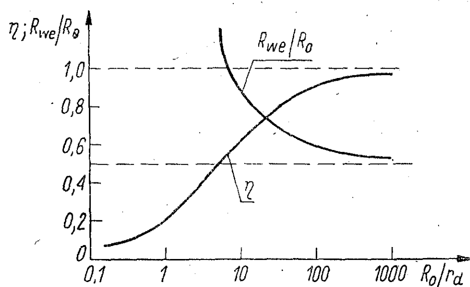
Rezystancja R_{we} obciąża obwód rezonansowy, zmniejszając jego selektywność. Jeśli przez R_T oznaczymy

$$R_T = R||R_{we} = \frac{RR_o}{2R+R_o} \tag{4/105}$$

to wypadkowa dobroć obwodu wynosi

$$Q_T = \frac{R_T}{\omega_o L} = R_T \omega_o C \tag{4/106}$$

Ze związków (4/88), (4/90) i (4/102) widać, że sprawność detekcji η i rezystancja wejściowa R_{we} zależą od kąta przepływu θ, którego wartość jest z kolei określona przez stosunek R_o/r_d. Ponieważ zależności te są uwikłane, więc na rys. 4/20



4/20 Przebieg sprawności η oraz rezystancji R_{we} w funkcji R_o/r_d dla detektora szczytowego

pokazano tylko szkicowo charakter zmian η i R_{we}/R_o w zależności od R_o/r_d, przyjmując dla uproszczenia, że U_P jest pomijalnie małe, a stała $R_o C_o$ bardzo duża.

Z dotychczasowej analizy wynika, że przy dostatecznie dużej wartości stosunku R_o/r_d kąt przepływu θ jest mały, sprawność detekcji bliska 1, a wartość średnia napięcia wyjściowego U_0 zależy liniowo od amplitudy sygnału $u_i(t)$. Jeśli więc przyjmiemy, że $u_i(t)$ jest sygnałem AM

$$u_i(t) = a(t)\cos\omega_o t \tag{4/107}$$

którego obwiednia zmienia się wolno w porównaniu z przebiegiem nośnej, to na podstawie równania (4/96) możemy napisać, że

$$u_O(t) = a(t) - U_P \tag{4/108}$$

Przyjęliśmy tu, oczywiście, że filtr dolnoprzepustowy usuwa składowe niepożądane, a bez zniekształceń przenosi $a(t)$. Gdy ponadto $a(t) \gg U_P$, to zależność (4/108) upraszcza się do postaci

$$u_O(t) = a(t) \tag{4/109}$$

Przypomnijmy w tym miejscu, że zależność (4/96), na podstawie której napisaliśmy (4/108) została wyprowadzona przy założeniu, że stała czasowa $\tau_o = R_o C_o$ jest duża w porównaniu z okresem nośnej, co pozwalało przyjąć, iż dla $u_i(t) = U_i \cos\omega_o t$, średnia wartość $u_O(t)$ pozostaje stała. W przypadku, gdy $u_i(t)$ jest sygnałem AM, τ_o musi spełnić dodatkowy warunek, a mianowicie nie może być zbyt duże, gdyż $u_O(t)$ musi nadążać za zmianami amplitudy sygnału $u_i(t)$. Zagadnieniem tym zajmiemy się nieco później, chwilowo natomiast będziemy zakładać, że odpowiednie warunki są spełnione, a więc zależności (4/108) i (4/109) są prawdziwe, i zajmiemy się wyprowadzeniem dolnopasmowego układu zastępczego detektora obwiedni. Jak zobaczymy dalej, układ taki pozwoli na bezpośrednie wyznaczanie napięcia wyjściowego $u_O(t)$, jako odpowiedzi na pobudzenie sygnałem dolnopasmowym, stanowiącym obwiednię $i_i(t)$.

Zauważmy, że wobec założenia wolnej zmienności $a(t)$ możemy przyjąć — podobnie, jak to robiliśmy w p. 4.2.1 — że $i_D(t)$ wyraża się w dalszym ciągu szeregiem o postaci (4/64), tylko jego współczynniki I_{DO} oraz I_{dk} ulegają wolnym zmianom w czasie. Jeśli zapiszemy więc, że teraz

$$I_{DO} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\theta} i_D(\omega_o t)\mathrm{d}(\omega_o t) = i_{DO}(t) \qquad (4/110)$$

to z wzoru na I_{dk}

$$I_{dk} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\theta} i_D(\omega_o t)\cos k\omega_o t\,\mathrm{d}(\omega_o t) \qquad (4/111)$$

widać, że dla małych kątów przepływu θ można przyjąć, iż w przedziale całkowania $\cos k\omega_o t \approx 1$ i zamiast (4/111) otrzymamy

$$I_{dk} \approx 2\frac{1}{\pi}\int_0^{\theta} i_D(\omega_o t)\mathrm{d}(\omega_o t) = 2i_{DO}(t) \qquad (4/112)$$

Zatem dla małych kątów przepływu czyli wówczas, gdy prąd płynący przez diodę ma charakter krótkotrwałych impulsów, $i_D(t)$ można w przybliżeniu wyrazić następującym szeregiem:

$$i_D(t) = i_{DO}(t)[1+2\cos\omega_o t+ \ldots] \qquad (4/113)$$

Prąd $i_{DO}(t)$ płynąc przez filtr $R_o C_o$ (rys. 4/19a) wywołuje spadek napięcia $u_O(t)$, co można zapisać w postaci

$$u_O(t) = a(t) = i_{DO}(t) * h_o(t) \qquad (4/114)$$

gdzie $h_o(t)$ jest odpowiedzią filtru $R_o C_o$ na impuls prądowy $\delta(t)$. Z rysunku 4/19a widać także, że napięcie $u_i(t)$ na obwodzie rezonansowym jest wytwarzane przez generator prądowy o wydajności $i_i(t)$. Jeśli zapiszemy, że

$$i_i(t) = I_i[1+mf(t)]\cos\omega_o t = g(t)\cos\omega_o t \qquad (4/115)$$

i przyjmiemy, że obwód przenosi tylko sygnały o widmie skoncentrowanym wokół pulsacji ω_o, to z bilansu prądów wynika, iż

$$i_L(t)+i_R(t)+i_C(t) = g(t)\cos\omega_o t-2i_{DO}(t)\cos\omega_o t \qquad (4/116)$$

W związku z tym napięcie $u_i(t)$ możemy wyrazić następująco:

$$u_i(t) = a(t)\cos\omega_o t = \{[g(t)-2i_{DO}(t)]\cos\omega_o t\} * h_p(t)$$
$$= \{[g(t)-2i_{DO}(t)] * h_d(t)\}\cos\omega_o t \quad (4/117)$$

gdzie $h_p(t)$ jest odpowiedzią impulsową pasmowego filtru *RLC*, a $h_d(t)$ odpowiedzią impulsową równoważnego filtru dolnoprzepustowego. Z równania (4/117) wynika więc, że obwiednię napięcia $u_i(t)$ można określić z zależności

$$a(t) = \left[\frac{g(t)}{2} - i_{DO}(t)\right] * 2h_d(t) \quad (4/118)$$

jeśli znamy odpowiednik dolnoprzepustowy filtru pasmowego.

W związku z tym rozważmy obwód pokazany na rys. 4/21a. Jeśli przyjmiemy, że $Q = \omega_o RC > 10$, to charakterystykę amplitudowo-fazową tego obwodu można przybliżyć wyrażeniem

$$Z_p(\omega) = \frac{R}{1+j\frac{\omega-\omega_o}{\alpha}} \qquad \omega > 0 \quad (4/119)$$

gdzie

$$\alpha = 1/2RC$$

Zauważmy, że charakterystyka amplitudowa $|Z_p(\omega)|$ wykazuje symetrię parzystą względem pulsacji ω_o, a charakterystyka fazowa $\theta_p(\omega) = \arg Z_p(\omega)$ symetrię nieparzystą, przy czym $\theta_p(\omega_o) = 0$. Filtr pasmowy, którego charakterystyki odznaczają się tego rodzaju symetrią, był rozważany jako szczególny przypadek, w dodatku D6 (patrz rys. D6/6). Z podanych tam zależności wynika, że obwodowi rezonansowemu o impedancji $Z_p(\omega)$ odpowiada filtr dolnoprzepustowy o impedancji $Z_d(\omega)$, określonej w sposób następujący:

$$Z_d(\omega) = Z_p(\omega+\omega_o)e^{-j\theta_p(\omega_o)} \quad (4/120)$$

Dla $Z_p(\omega)$ o postaci (4/119) otrzymujemy natychmiast

$$Z_d(\omega) = \frac{R}{1+j\frac{\omega}{\alpha}} = \frac{R}{1+j\omega 2RC} \quad (4/121)$$

Impedancji $Z_d(\omega)$ odpowiada obwód pokazany na rys. 4/21b.

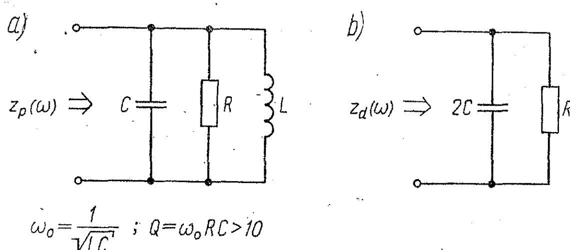
Zastosujmy teraz do równań (4/114) i (4/118) przekształcenie Fouriera. Otrzymamy odpowiednio

$$A(\omega) = I_{DO}(\omega)Z_o(\omega) \quad (4/122)$$

oraz

$$A(\omega) = \left[\frac{G(\omega)}{2} - I_{DO}(\omega)\right]2Z_d(\omega) \quad (4/123)$$

gdzie symbolami $A(\omega)$, $G(\omega)$, $I_{DO}(\omega)$, $Z_o(\omega)$ i $Z_d(\omega)$ oznaczono $\mathscr{F}$-transformaty funkcji $a(t)$, $g(t)$, $i_{DO}(t)$, $h_o(t)$ oraz $h_d(t)$. Po wyznaczeniu z (4/122) wielkości



4/21 Obwód rezonansowy (a) i jego odpowiednik dolnoprzepustowy (b)

$I_{DO}(\omega)$ i podstawieniu wyniku do równania (4/123), otrzymamy zależność wiążącą obwiednię $g(t)$ sygnału wymuszającego $i_i(t)$ z obwiednią $a(t)$ napięcia $u_i(t)$, stanowiącą zarazem sygnał wyjściowy $u_O(t)$. Po prostych przekształceniach dostajemy

$$A(\omega) = \frac{G(\omega)}{2} Z_T(\omega) = \frac{G(\omega)}{2} Z_o(\omega) || 2Z_d(\omega) \tag{4/124}$$

gdzie

$$Z_o(\omega) = \frac{R_o}{1+j\omega R_o C_o}; \quad 2Z_d(\omega) = \frac{2R}{1+j\omega 2RC} \tag{4/125}$$

Zależności (4/124) odpowiada układ pokazany na rys. 4/22a. Na rysunku 4/22b pokazano także równoważny układ z sygnałami określonymi w dziedzinie czasu. Obwód z rys. 4/22 stanowi dolnopasmowy układ zastępczy szczytowego detektora obwiedni (rys. 4/19a), ilustrujący związek pomiędzy obwiednią $g(t)$ sygnału wejściowego i napięciem wyjściowym $u_O(t) = a(t)$. Zalety otrzymanego układu zastępczego wyjaśni prosty przykład. Wyznaczmy związek pomiędzy $A(\omega)$ i $G(\omega)$ na podstawie rys. 4/22. Otrzymujemy natychmiast, że

$$A(\omega) = G(\omega)\frac{Z_T(\omega)}{2} = G(\omega)\frac{R_T}{1+j\omega/\omega_g} \tag{4/126}$$

gdzie

$$R_T = \frac{RR_o}{2R+R_o}; \quad \omega_g = \frac{1}{2R_T(C+C_o)} \tag{4/127}$$

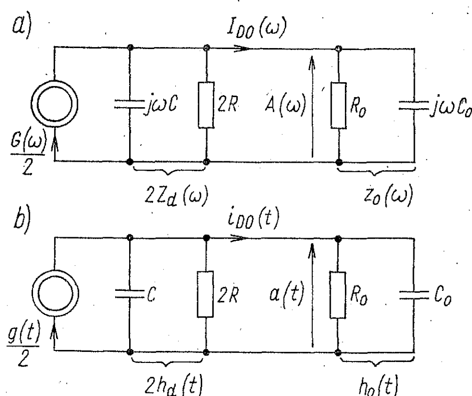
Pulsacja ω_g określa 3-decybelowe pasmo przenoszenia układu i jak widać z powyższych wzorów, na jej wartość mają wpływ nie tylko parametry $R_o C_o$, ale również parametry filtru pasmowego, reprezentowanego w układzie zastępczym przez elementy $2R$ i C. Jeśli ω_g jest tak dobrana, że zachodzi nierówność $\omega_g \gg \omega_M$, gdzie ω_M jest maksymalną pulsacją w widmie $g(t)$, to na podstawie wzorów (4/115) i (4/126) możemy napisać

$$a(t) = g(t)R_T = I_i R_T[1+mf(t)] \tag{4/128}$$

Warto tu jeszcze przypomnieć, że przy wyprowadzaniu układu zastępczego posłużyliśmy się równością (4/109). Gdybyśmy wykorzystali zależność (4/108),

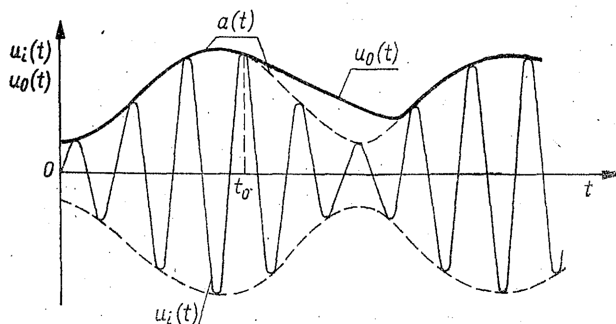
to w górnej gałęzi układów z rys. 4/22 należałoby wprowadzić źródło napięcia stałego o wydajności U_P.

Zajmiemy się teraz bardzo istotnym aspektem pracy detektora szczytowego, a mianowicie sprawą nadążania zmian napięcia $u_O(t)$ za zmianami obwiedni sygnału zmodulowanego $u_i(t)$. Jak już wspominaliśmy poprzednio, na stałą czasową $\tau_o = R_o C_o$ nakładaliśmy dotychczas tylko jedno ograniczenie przyj-



4/22 Dolnopasmowe układy zastępcze detektora wartości szczytowej

mując, że jest ona duża w porównaniu z okresem nośnej. Przy tym warunku napięcie na kondensatorze C_o zmniejszało się nieznacznie w przedziale czasu $T = 2\pi/\omega_o$, który upływał pomiędzy dwoma kolejnymi momentami występowania wartości szczytowych sygnału $u_i(t) = U_i \cos\omega_o t$. Gdy $u_i(t) = a(t)\cos\omega_o t$, to znaczy jest sygnałem zmodulowanym, w którym kolejne wartości szczytowe ulegają zmianie, mamy dwie różne sytuacje w zależności od tego, czy $a(t)$ narasta, czy też maleje. Gdy $a(t)$ narasta, to nawet dla $\tau_o = \infty$ występuje kolejne doładowywanie kondensatora i napięcie na nim podąża za zmianami $a(t)$. Inaczej jest, gdy $a(t)$ maleje. Jeśli odbywa się to wolniej, niż zmiana napięcia na kondensatorze, to w każdym kolejnym okresie nośnej następuje przepływ prądu przez diodę, kondensator doładowuje się i napięcie $u_O(t)$ podąża za zmianami obwiedni.



4/23 Ilustracja zjawiska nie nadążania napięcia wyjściowego detektora szczytowego za zmianami obwiedni

Jeśli jednak $a(t)$ maleje szybciej niż napięcie na kondensatorze, to dioda może pozostać spolaryzowana zaporowo przez wiele okresów i wystąpią duże zniekształcenia. Sytuację taką zilustrowano na rys. 4/23, gdzie po chwili t_0, w której wystąpiła wartość szczytowa $a(t_0)$, przebieg napięcia $u_O(t)$ podyktowany jest tylko stałą czasową τ_0.

Aby uzyskać ograniczenie na wartość τ_0 przeprowadzimy następujące rozumowanie. Przyjmijmy, że w chwili t_0 dioda przewodzi i kondensator C_0 zostaje naładowany do napięcia $u_O(t_0) = a(t_0)$. Dla $t > t_0$ następuje rozładowanie kondensatora, które ma charakter wykładniczy, tj. $u_O(t) = a(t_0)\exp[-(t-t_0)/R_0C_0]$. Maksymalna szybkość rozładowania występuje w momencie początkowym i wynosi $-a(t_0)/R_0C_0$. Dla ustalenia maksymalnej szybkości malenia obwiedni przyjmijmy, że dla $t > t_0$ prąd wymuszający $i_i(t) = 0$ (rys. 4/19a). Wówczas napięcie na obwodzie rezonansowym będzie również maleć wykładniczo, a maksymalna szybkość zanikania $u_i(t)$ wyniesie $-a(t_0)/2RC$. Oczywiste jest przy tym, że jeśli dla $t > t_0$ $i_i(t) \neq 0$, to szybkość malenia $u_i(t)$ nie może być większa od tej wartości, gdyż do obwodu jest dostarczana energia. Jeśli zatem napięcie $u_O(t)$ ma nadążać za zmianami obwiedni sygnału $u_i(t)$, to napięcie na kondensatorze C_0 nie może maleć wolniej, niż obwiednia $a(t)$, a więc spełniona musi być nierówność

$$R_0C_0 \leqslant 2RC \tag{4/129}$$

Warunek braku zniekształceń dynamicznych, wynikających z nienadążania $u_O(t)$ za zmianami obwiedni można również sformułować inaczej. Jeśli sygnał modulujący ma widmo ograniczone do pulsacji ω_M, to w przybliżeniu można uważać, że o maksymalnej szybkości zmian obwiedni decyduje przebieg o tej właśnie pulsacji. Jeśli przyjmiemy więc, że

$$u_i(t) = a(t)\cos\omega_0 t = U_i(1+m\cos\omega_M t)\cos\omega_0 t \tag{4/130}$$

to początkowa szybkość opadania napięcia na kondensatorze w chwili t_0

$$\left(\frac{du_O(t)}{dt}\right)\Bigg|_{t=t_0} = -\frac{a(t_0)}{R_0C_0} = -\frac{U_i}{R_0C_0}(1+m\cos\omega_M t_0) \tag{4/131}$$

natomiast szybkość opadania obwiedni w tym samym momencie ma wartość

$$\frac{da(t)}{dt}\Bigg|_{t=t_0} = -\omega_M m U_i \sin\omega_M t_0 \tag{4/132}$$

Warunek, aby napięcie na kondensatorze opadało szybciej niż obwiednia przyjmuje postać

$$\frac{1}{R_0C_0} \geqslant \frac{m\sin\omega_M t_0}{1+m\cos\omega_M t_0}\omega_M \tag{4/133}$$

Prawa strona tej nierówności osiąga wartość maksymalną, gdy

$$\cos\omega_M t_0 = m \quad \text{oraz} \quad \sin\omega_M t_0 = \sqrt{1-m^2} \tag{4/134}$$

Po podstawieniu równania (4/134) do (4/133) otrzymujemy ostatecznie nierówność

$$R_o C_o \leqslant \frac{1}{\omega_M} \frac{\sqrt{1-m^2}}{m} \qquad (4/135)$$

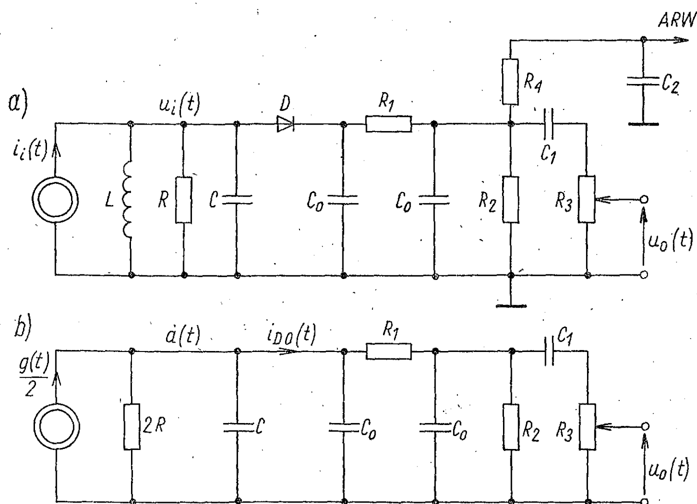
Należy zauważyć, że jest to warunek przybliżony (przy jego wyprowadzaniu pominęliśmy, np. impedancję źródła), a jego spełnienie jest tym trudniejsze, im większy jest współczynnik m. W praktyce stosuje się warunek łagodniejszy niż to określa (4/135)

$$\frac{1}{\omega_o} \ll R_o C_o \ll \frac{1}{\omega_M} \qquad (4/136)$$

Lewa nierówność warunkuje dużą sprawność detekcji detektora szczytowego, podczas gdy prawa — brak zniekształceń nieliniowych przy szybkich zmianach obwiedni demodulowanego sygnału.

W układach praktycznych stosuje się często rozbudowane filtry dolnoprzepustowe, aby skutecznie stłumić składową o widmie skoncentrowanym wokół pulsacji ω_o. Ponadto składowa stała napięcia wyjściowego jest wykorzystywana do automatycznej regulacji wzmocnienia (ARW) stopni poprzedzających demodulator, a sygnał małej częstotliwości jest podawany na wejście wzmacniacza akustycznego.

Przykładowy układ takiego demodulatora pokazano na rys. 4/24a, natomiast na rys. 4/34b jego dolnopasmowy układ zastępczy. Ponieważ ARW powinna reagować tylko na takie zmiany składowej stałej napięcia wyjściowego, który może wywołać zmiana poziomu odbieranego sygnału (np. zaniki), więc stała czasowa $R_4 C_2$ filtru ARW powinna być na tyle duża, aby nie reagował on równocześnie na zmiany sygnału modulującego. Dlatego elementów R_4 i C_2 nie uwzględ-



4/24 Przykład rozwiązania praktycznego szczytowego detektora obwiedni (a) i jego układ zastępczy (b)

niono na rys. 4/24b przyjmując $R_4 = \infty$. Pojemność sprzęgająca C_1 jest na tyle duża, że jej reaktancję dla składowych zmiennych małej częstotliwości można pominąć. Zauważmy w związku z tym, że impedancja filtru dolnoprzepustowego jest inna dla składowej stałej prądu $i_{DO}(t)$, niż dla składowych zmiennych. Może to być źródłem zniekształceń, polegających na ograniczaniu ujemnych wartości $i_{DO}(t)$. Zniekształceń tych można uniknąć, jeśli spełniony zostanie warunek, że w każdej chwili czasu

$$i_{DO}(t) > 0 \tag{4/137}$$

Dalszy sposób postępowania polega na tym, że w każdym konkretnym przypadku można z układu zastępczego demodulatora wyznaczyć $i_{DO}(t)$, a następnie badając nierówność (4/137) znaleźć warunki, przy których będzie ona zachodziła. Wygodnie jest wówczas posługiwać się także układem zastępczym dla $\mathscr{F}$-transformat występujących sygnałów, który można narysować analogicznie, jak to pokazano na rys. 4/22a.

Literatura

1. Baghdady E. J.: *Lectures on Communication System Theory*. McGraw-Hill, New York 1961.
2. Clarke K. K., Hess D. T.: *Communication Circuits: Analysis and Design*. Addison-Wesley, London 1971.
3. Filipkowski A.: *Układy elektroniczne analogowe i cyfrowe*. WNT, Warszawa 1978.
4. Golde W.: *Układy elektroniczne*. T. II. WNT, Warszawa 1976.
5. Gregg W. D.: *Podstawy telekomunikacji analogowej i cyfrowej*. WNT, Warszawa 1983.
6. Lathi B. P.: *Systemy telekomunikacyjne*. WNT, Warszawa 1972.
7. Panter P. F.: *Modulation, Noise and Spectral Analysis*. McGraw-Hill, New York 1965.
8. Pawłowski J.: *Podstawowe układy elektroniczne: nieliniowe układy analogowe*. WKŁ, Warszawa 1979.
9. Shanmugam K. Sam.: *Digital and Analog Communication Systems*. J. Wiley, New York 1979.

5

MODULATORY CZĘSTOTLIWOŚCI

Zadaniem modulatora częstotliwości jest wytworzenie przebiegu o postaci

$$u(t) = U\cos\left[\omega_0 t + \Delta\omega\int_0^t f(\vartheta)\,d\vartheta\right] \tag{5/1}$$

Jest to przebieg o stałej amplitudzie, którego pulsacja chwilowa

$$\omega_i(t) = \omega_0 + \Delta\omega f(t) \tag{5/2}$$

zależy w sposób liniowy od sygnału modulującego $f(t)$. W zapisie (5/1) przyjęliśmy, że $f(t)$ ma postać unormowaną, tj. $|f(t)|_{max} = 1$ oraz $\overline{f(t)} = 0$. Pulsacja nośna $\omega_0 = \overline{\omega_i(t)}$ i powinna być wielkością stałą. Podstawowe właściwości takich sygnałów zostały omówione w dodatku D5 i w razie potrzeby będziemy się do niego odwoływać.

Jak zobaczymy dalej, trudności związane z wytworzeniem sygnału o postaci (5/1), a w szczególności spełnienie warunków $U = \text{const}$, $\omega_0 = \text{const}$ oraz zapewnienie liniowej zależności $\omega_i(t)$ od $f(t)$, będą zależeć od wymaganej wartości dewiacji względnej $D = \Delta\omega/\omega_0$, a także od szybkości zmian sygnału modulującego $f(t)$. Prowadzi to w rezultacie do rozmaitych ograniczeń, związanych z zastosowaną metodą wytwarzania sygnałów *FM* oraz przyjętym rozwiązaniem układowym.

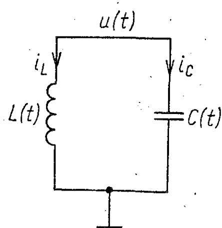
5.1 METODY WYTWARZANIA SYGNAŁÓW *FM*

Omówimy teraz kilka najczęściej stosowanych metod wytwarzania sygnałów zmodulowanych częstotliwościowo. Celem tych rozważań będzie wyjaśnienie zasad działania rozmaitych klas modulatorów częstotliwości oraz określenie podstawowych ograniczeń związanych z poszczególnymi metodami modulacji.

5.1.1 Modulacja bezpośrednia

O modulacji bezpośredniej mówimy wówczas, gdy częstotliwość drgań generatora jest zmieniana przez zastosowanie sterowanej sygnałem modulującym pojemności lub indukcyjności (w generatorach *LC*), albo też pojemności lub rezystancji (w generatorach *RC*). Działające w ten sposób układy posiadają elementy, których parametry są funkcjami czasu, a ich teoria nawet w przypadku zastosowania przybliżenia liniowego, staje się dość złożona, gdyż otrzymujemy wówczas równania parametryczne, których rozwiązania trzeba na ogół wyznaczać w sposób przybliżony.

Zasadę działania modulatora bezpośredniego omówimy na przykładzie generatora *LC*, w którym elementy *L* i *C* są sterowane sygnałem modulującym $f(t)$. Aby nie wdawać się w tej chwili w rozważania nad tym, w jaki sposób parametry charakteryzujące te elementy są uzależnione od $f(t)$ założymy tylko, że są one funkcjami czasu. Ponieważ w ujęciu liniowym o częstotliwości drgań generatora decyduje wyłącznie część pasywna układu, a rola elementu aktywnego



5/1 Rezonansowy obwód parametryczny

sprowadza się do kompensacji strat[1] przyjmiemy, że modelem modulatora bezpośredniego jest obwód pokazany na rys. 5/1. Łatwo sprawdzić, że opisuje go następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{L(t)C(t)}\varphi=0 \qquad (5/3)$$

gdzie

$$\varphi(t)=L(t)i(t) \qquad (5/4)$$

a kropką oznaczyliśmy pochodną $C(t)$ względem czasu. Jeśli wprowadzimy oznaczenia

$$\alpha(t)=\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}; \quad \omega^2(t)=\frac{1}{L(t)C(t)} \qquad (5/5)$$

to (5/1) można zapisać w postaci

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi(t)}{\mathrm{d}t^2}+\alpha(t)\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}+\omega^2(t)\varphi(t)=0 \qquad (5/6)$$

[1] Przy założeniu bezinercyjności tego elementu.

Teoria takich równań jest złożona i nie będziemy się nią tutaj szczegółowo zajmować. Aby pokazać efekty, o które nam chodzi poszukajmy rozwiązania równania (5/6) w postaci

$$\varphi(t) = \exp \int_0^t G(\vartheta) d\vartheta \tag{5/7}$$

gdzie $G(t)$ jest pewną funkcją ograniczoną. Jeśli wstawimy zależność (5/7) do (5/6), to okaże się, że funkcja $G(t)$ musi spełniać równanie

$$\dot{G}(t) + G^2(t) + \alpha(t)G(t) + \omega^2(t) = 0 \tag{5/8}$$

które jest nieliniowym równaniem różniczkowym pierwszego rzędu (tzw. *równaniem Riccatiego*). Funkcja $G(t)$ jest na ogół funkcją zespoloną $G(t) = g(t) + j\gamma(t)$, a więc równanie (5/8) jest równoważne układowi dwóch równań nieliniowych

$$\frac{dg(t)}{dt} = \gamma^2(t) - g^2(t) - \alpha(t)g(t) - \omega^2(t) \tag{5/9a}$$

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = -2g(t)\gamma(t) - \alpha(t)g(t) \tag{5/9b}$$

Z równania (5/9b) wynika, że

$$g(t) = -\frac{\alpha(t)}{2} - \frac{1}{2}\frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)} \tag{5/10}$$

Zauważmy, że równanie (5/6) ma współczynniki rzeczywiste, a więc jego rozwiązanie musi być także funkcją rzeczywistą. Jeśli zatem $\varphi(t)$ o postaci (5/7) jest rozwiązaniem równania (5/6), to również $\varphi^*(t)$ jest rozwiązaniem tego równania. Przy spełnieniu odpowiednich warunków $\varphi(t)$ i $\varphi^*(t)$ są od siebie liniowo niezależne i ogólne rozwiązanie równania (5/6) ma następującą postać:

$$\varphi(t) = A \exp\left[\int_0^t g(\vartheta) d\vartheta\right] \cos\left[\int_0^t \gamma(\vartheta) d\vartheta + \theta\right] \tag{5/11}$$

gdzie A i θ są pewnymi stałymi. Jak widać z równania (5/11), $\varphi(t)$ jest przebiegiem zmodulowanym zarówno częstotliwościowo, jak i amplitudowo. Ponieważ $\gamma(t)$ jest pulsacją chwilową przebiegu wprowadźmy oznaczenie $\gamma(t) = \omega_i(t)$. Wykorzystując zależność (5/10) można wówczas równanie (5/11) zapisać również w takiej formie

$$\varphi(t) = \frac{A}{\sqrt{\omega_i(t)}} e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \alpha(\vartheta) d\vartheta} \cos\left[\int_0^t \omega_i(\vartheta) d\vartheta + \theta\right] \tag{5/12}$$

Aby rozwiązanie $\varphi(t)$ określone przez (5/11) było czystym przebiegiem *FM*

musi zostać spełniony warunek $g(t) = 0$. Z równania (5/10) widać, że zajdzie to wówczas, gdy $\alpha(t)$ będzie miało postać

$$\alpha(t) = -\frac{\dot{\omega}_i(t)}{\omega_i(t)} \tag{5/13}$$

czyli gdy zmiany tego współczynnika są odpowiednio skorelowane ze zmianami $\omega_i(t)$. Równocześnie zachodzi równość

$$\omega(t) = \omega_i(t) \tag{5/14}$$

Podstawiając równania (5/13) i (5/14) do (5/6) otrzymujemy

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} - \frac{\dot{\omega}_i(t)}{\omega_i(t)} \frac{d\varphi(t)}{dt} + \omega_i^2(t)\varphi(t) = 0 \tag{5/15}$$

Jest to więc równanie, którego rozwiązaniem jest czysty przebieg *FM*[1]. Równanie (5/15) można wymodelować w maszynie analogowej [1], nie opisuje ono jednak, niestety, żadnego prostego obwodu przydatnego w zastosowaniach.

Powracając do równania (5/6) należy zauważyć, że wyznaczenie pulsacji chwilowej $\omega_i(t)$ rozwiązania (5/12) z równań (5/9) stanowi poważną trudność. Dlatego w literaturze podaje się rozmaite wzory przybliżone na $\omega_i(t)$, jednak na ogół bez oszacowania błędu przybliżenia. Dla naszych celów wystarczy jeśli przyjmiemy, iż $G(t)$ zmienia się na tyle wolno, że w równaniu (5/8) możemy założyć $\dot{G}(t) = 0$. Wówczas lewe strony równań (5/9) są równe zeru i dostajemy

$$g(t) \approx -\frac{1}{2}\alpha(t) \tag{5/16}$$

oraz

$$\omega_i(t) \approx \sqrt{\omega^2(t) - \frac{\alpha^2(t)}{4}} \tag{5/17}$$

Zanim przedyskutujemy sens tego przybliżenia załóżmy, jak to zwykle występuje w praktyce, że w obwodzie z rys. 5/1 sterowany jest tylko jeden element — najczęściej pojemność — i przyjmijmy, iż $L(t) = L = \text{const}$. Wówczas

$$\omega^2(t) = \frac{1}{LC(t)} \tag{5/18}$$

Łatwo sprawdzić, że słuszna jest wtedy zależność

$$\alpha(t) = \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = -2\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} \tag{5/19}$$

i równanie obwodu (5/3) przyjmuje postać

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} - 2\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} \frac{d\varphi(t)}{dt} + \omega^2(t)\varphi(t) = 0 \tag{5/20}$$

---

[1] Drogą bezpośredniego podstawienia Czytelnik może łatwo sprawdzić, że $\varphi(t) = A\cos\left[\int_0^t \omega_i(\vartheta)d\vartheta + \theta\right]$ jest rozwiązaniem równania (5/15).

Podstawiając zależność (5/19) do (5/17) otrzymujemy

$$\omega_i(t) \approx \sqrt{\omega^2(t)-\left[\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}\right]^2} \qquad (5/21)$$

Jak widać, pulsacja chwilowa $\omega_i(t)$ drgań w obwodzie zależy nie tylko od $\omega(t)$, a więc chwilowej wartości pojemności sterowanej $C(t)$, ale również od $\dot{\omega}(t)$, czyli ma na nią także wpływ szybkość, z jaką pojemność ta ulega zmianom. Ponieważ dla prawidłowego działania modulatora jest konieczne, aby $\omega_i(t)$ zależała tylko od wartości chwilowej $C(t)$ (a tym samym od wartości chwilowej $f(t)$) zbadamy, kiedy drugi składnik wyrażenia pod pierwiastkiem można pominąć, czyli kiedy spełniona jest nierówność

$$\left[\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}\right]^2 \ll \omega^2(t) \qquad (5/22)$$

Przyjmijmy w tym celu, że

$$\omega(t) = \omega_o+\Delta\omega\cos\omega_M t \qquad (5/23)$$

gdzie ω_M jest maksymalną pulsacją w widmie sygnału modulującego $f(t)$, co jest równoważne założeniu, że przebieg o tej pulsacji decyduje o maksymalnej szybkości zmian $f(t)$. Ponieważ $\dot{\omega}(t) = -\Delta\omega\omega_M\sin\omega_M t$ łatwo sprawdzić, że nierówność (5/22) można zastąpić następującą nierównością:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_o}\frac{\omega_M}{\omega_o} \ll 1 \qquad (5/24)$$

Warunek $\omega_M \ll \omega_o$ oznacza, że zmiany sygnału modulującego muszą być wolne w porównaniu do przebiegu o pulsacji $\omega_o = \overline{\omega_i(t)}$, natomiast nierówność $\Delta\omega/\omega_o = D \ll 1$ ogranicza dewiację względną, lub też inaczej wielkość zmian pojemności parametrycznej $C(t)$ w stosunku do jej wartości średniej.

Jeśli nierówność (5/24) jest spełniona, to zamiast (5/21) możemy napisać

$$\omega_i(t) \approx \omega(t) = \frac{1}{\sqrt{LC(t)}} \qquad (5/25)$$

Podstawiając wyrażenia (5/25) i (5/19) do (5/12) otrzymujemy

$$\varphi(t) \approx A\sqrt{\omega(t)}\cos\left[\int_0^t \omega(\vartheta)d\vartheta+\theta\right] \qquad (5/26)$$

Z uwagi na nierówność (5/24), która ogranicza szybkość zmian sygnału modulującego, omówiony przypadek nosi nazwę *modulacji quasi-stacjonarnej*.

Wielkością, która nas zazwyczaj interesuje jest napięcie $u(t)$ na obwodzie z rys. 5/1, a nie strumień $\varphi(t)$ stosowany w dotychczasowych rozważaniach wyłącznie w celu uzyskania możliwie prostej formy równań. Przy spełnieniu warunku (5/24) napięcie to można wyrazić następującym wzorem przybliżonym:

$$u(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} \approx A\sqrt{\omega^3(t)}\cos\left[\int_0^t \omega(\vartheta)d\vartheta+\psi\right] \qquad (5/27)$$

Jak już mówiliśmy poprzednio, elementem najczęściej sterowanym w praktyce jest pojemność. Przyjmijmy zatem, że $C(t)$ wyraża się wzorem

$$C(t) = C+C_o+\Delta Cf(t) = (C+C_o)\left[1+\frac{\Delta Cf(t)}{C+C_o}\right] \tag{5/28}$$

gdzie C oznacza pojemność stałą obwodu, C_o — wartość średnią pojemności sterowanej, a $f(t)$ — unormowany sygnał modulujący. Podstawiając równanie (5/28) do (5/25) otrzymujemy, że

$$\omega_i(t) = \frac{1}{\sqrt{L(C+C_o)\left[1+\frac{\Delta Cf(t)}{C+C_o}\right]}} = \omega_o\left[1+\frac{\Delta C}{C+C_o}f(t)\right]^{-1/2} \tag{5/29}$$

gdzie

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L(C+C_o)}} \tag{5/30}$$

stanowi pulsację drgań w obwodzie przy braku sygnału modulującego. Rozwińmy wyrażenie (5/29) w szereg potęgowy. Ponieważ, jak łatwo sprawdzić, dewiacja pulsacji odpowiadająca zmianie pojemności sterowanej o ΔC wyraża się wzorem

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_o} \approx -\frac{1}{2}\frac{\Delta C}{C+C_o} \tag{5/31}$$

otrzymamy

$$\omega_i(t) = \omega_o\left[1+\frac{\Delta\omega}{\omega_o}f(t)+\frac{3}{4}\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_o}\right)^2 f^2(t)+\ldots\right] \tag{5/32}$$

Zauważmy, że $\omega_i(t)$ jest nieliniową funkcją sygnału modulującego $f(t)$. Na to, aby zależność ta była w przybliżeniu liniowa musi być spełniona nierówność

$$\frac{3}{4}\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_o}\right)^2 \ll \frac{\Delta\omega}{\omega_o} \Rightarrow \frac{3}{4}\frac{\Delta\omega}{\omega_o} \ll 1 \tag{5/33}$$

Jeśli zażądamy, przykładowo, że wyraz kwadratowy ma stanowić nie więcej, niż 1% wartości wyrazu liniowego, to musi zostać spełniona nierówność

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_o} \leqslant 0{,}0133 \quad \text{lub} \quad \omega_o \geqslant 75\Delta\omega \tag{5/34}$$

Przy spełnieniu warunku (5/34) amplitudę napięcia $u(t)$, określonego wzorem (5/27), można wyrazić następująco:

$$A\sqrt{\omega^3(t)} = A\sqrt{\omega_o^3}\left[1+\frac{\Delta\omega}{\omega_o}f(t)\right]^{3/2} \approx A\sqrt{\omega_o^3}\left[1+\frac{3}{2}\frac{\Delta\omega}{\omega_o}f(t)\right] \tag{5/35}$$

Jak z tego widać, dla $\Delta\omega/\omega_o = 0{,}0133$ współczynnik niepożądanej w modulatorze *FM* modulacji amplitudy jest bardzo mały $m = (3/2)(\Delta\omega/\omega_o) \approx 2\%$.

Przeprowadzone rozważania wykazały, że przy stosowaniu modulacji bezpośredniej dopuszczalna wartość dewiacji względnej $D = \Delta\omega/\omega_o$ jest silnie

ograniczona. Warto w związku z tym zauważyć, że ponieważ dla większości sygnałów *FM* zachodzi nierówność $\Delta\omega > \omega_M$ ($\beta > 1$), więc spełnienie warunku $D \ll 1$ oznacza, iż warunek quasi-stacjonarności modulacji jest również spełniony.

Modulacja bezpośrednia drgań generatora nie pozwala na ogół na uzyskanie wymaganej stałości częstotliwości środkowej generowanego przebiegu *FM*. Dlatego tam, gdzie to jest istotne stosuje się specjalne układy służące do automatycznej regulacji tej wielkości. Wykorzystanie do celów modulacji generatora kwarcowego, który zapewnia odpowiednią stałość ω_0 jest ograniczone, gdyż można uzyskać w ten sposób tylko sygnały o bardzo małych dewiacjach.

5.1.2 Modulacja pośrednia

Sygnał *FM* można uzyskać także w inny sposób, wykorzystując w procesie jego wytwarzania, jako operację pośrednią, modulację amplitudy. Stąd bierze się nazwa metody: *modulacja pośrednia.* Koncepcja takiego modulatora wynika natychmiast z właściwości tzw. wąskopasmowego sygnału *FM*. Jak pokazaliśmy w dodatku D5, jeśli jest spełniona nierówność

$$\left|\Delta\omega\int_0^t f(\vartheta)\,d\vartheta\right|_{max} \ll 1 \tag{5/36}$$

to sygnał (5/1) można przybliżyć wyrażeniem

$$u(t) \approx U[\cos\omega_0 t - a(t)\sin\omega_0 t] \tag{5/37}$$

gdzie

$$a(t) = \Delta\omega\int_0^t f(\vartheta)\,d\vartheta \tag{5/38}$$

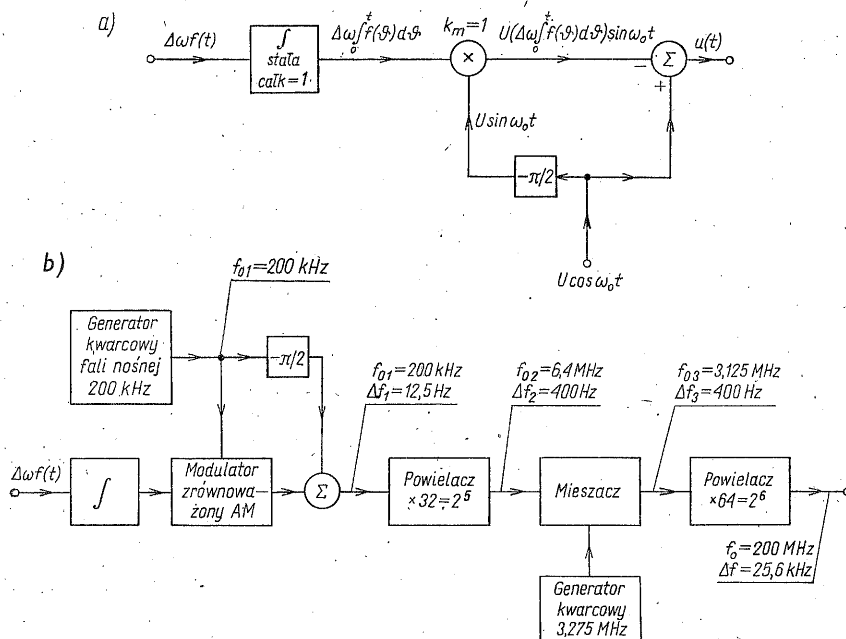
Z postaci (5/37) widać, że $u(t)$ jest sumą sygnału zmodulowanego amplitudowo oraz przebiegu harmonicznego, który jest w kwadraturze z jego nośną. Z zależności (5/37) i (5/38) wynika więc, że $u(t)$ można uzyskać w układzie funkcjonalnym pokazanym na rys. 5/2a, który nosi nazwę *modulatora Armstronga.* W modulatorze tym, jako źródło przebiegu nośnego o pulsacji ω_0 można zastosować wysokostabilny generator kwarcowy. Jedynym ograniczeniem, z którym mamy tu do czynienia, jest dopuszczalna wartość dewiacji $\Delta\omega$. Zbadajmy w tym celu bliżej nierówność (5/36). Przyjmijmy, że widmo sygnału modulującego jest ograniczone do przedziału (ω_m, ω_M) i rozważmy sytuację, gdy $f(t) = \cos\omega t$, przy czym ω zawiera się w tym przedziale. Wówczas

$$\Delta\omega\int_0^t f(\vartheta)\,d\vartheta = \frac{\Delta\omega}{\omega}\sin\omega t \tag{5/39}$$

a wartość maksymalna tego wyrażenia jest równa $\Delta\omega/\omega$. Jeśli założymy, że

nierówność silną (5/36) zastąpimy nierównością $\leqslant 0{,}2$, co pozwala z błędem mniejszym od 2% stosować przybliżenie (5/37), to otrzymamy warunek

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega} \leqslant 0{,}2 \tag{5/40}$$



5/2 Układ funkcjonalny modulatora Armstronga (a) oraz przykładowe rozwiązanie modulatora (b)

Jak łatwo zauważyć, dla $\omega \in (\omega_m, \omega_M)$ o spełnieniu nierówności (5/40) decyduje najmniejsza pulsacja w widmie sygnału modulującego, tj. warunek

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_m} \leqslant 0{,}2 \tag{5/41}$$

z czego wynika, że przy stosowaniu modulacji pośredniej wartość ω_m nie powinna być mniejsza, niż to jest konieczne. Ponieważ w praktyce główna część energii sygnału rzadko jest skupiona w pobliżu ω_m, nierówność (5/41) można zwykle zastąpić nierównością nieco słabszą

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_m} \leqslant 0{,}5 \tag{5/42}$$

Mimo to sygnał uzyskiwany w modulatorze Armstronga ma tak małą dewiację, że konieczne jest stosowanie dodatkowych operacji nieliniowych dla zwiększenia jej wartości.

W dodatku D8 pokazaliśmy, że jeśli bezinercyjny układ nieliniowy pobudzimy

sygnałem o postaci (5/1), to jego odpowiedź $u_O(t)$ można przedstawić następującym szeregiem:

$$u_O(t) = U_{OO}+\sum_{n=1}^{\infty} U_{on}\cos\left[n\omega_o t+n\Delta\omega\int_0^t f(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\right] \qquad (5/43)$$

Z wyrażenia (5/43) widać, że w wyniku przeprowadzonej operacji nastąpiło równoczesne powielenie pulsacji środkowej ω_o sygnału wejściowego oraz jego dewiacji $\Delta\omega$. Stosowanie zbyt dużych krotności powielania nie jest wskazane z uwagi na trudności związane z odfiltrowaniem składników niepożądanych (dodatek D8), dlatego najczęściej wykorzystuje się kaskadowe połączenie podwajaczy lub potrajaczy częstotliwości dla uzyskania odpowiedniej dewiacji, a pożądaną wartość ω_o ustala się za pomocą operacji mieszania (rozdz. 7), która pozwala przesuwać widmo sygnału na skali częstotliwości, bez zmiany dewiacji $\Delta\omega$. Na rysunku 5/2b pokazano przykładowe rozwiązanie modulatora Armstronga przy założeniu, że $\omega_m = 2\pi$ (25 Hz).

5.1.3 Wytwarzanie niesinusoidalnych przebiegów *FM*

Omówimy teraz taką metodę wytwarzania sygnału *FM*, która z teoretycznego punktu widzenia nie wprowadza żadnych ograniczeń na szybkość zmian jego pulsacji chwilowej, czy też wartość uzyskiwanej dewiacji $\Delta\omega$; musi być spełniony tylko oczywisty warunek, że $\omega_i(t) > 0$. W metodzie tej wytwarza się najpierw sygnał *FM* o kształcie trójkątnym, a następnie uzyskuje się postać (5/1) przez zastosowanie układu nieliniowego, przekształcającego przebieg trójkątny na sinusoidalny.

Aby wyjaśnić istotę samej metody przeprowadzimy najpierw pewne rozważania wstępne. Zauważmy przede wszystkim, że operowanie sygnałem *FM* zapisanym w postaci (5/1) jest czasami niewygodne, zwłaszcza jeśli sygnał jest poddawany pewnym przekształceniom nieliniowym. Jego formę można znacznie uprościć przez wprowadzenie podstawienia

$$\tau = t+\frac{\Delta\omega}{\omega_o}\int_0^t f(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \qquad (5/44)$$

gdyż wówczas wyrażenie (5/1) przekształca się do postaci

$$u_I(\tau) = U_i\cos\omega_o\tau \qquad (5/45)$$

z której wynika, że sygnał $u_I(\tau)$ jest względem nowej zmiennej okresowy, z okresem $T = 2\pi/\omega_o$. Przyjmijmy dalej, że $u_I(\tau)$ jest podawany na element nieliniowy o charakterystyce przejściowej określonej zależnością

$$u_T = \frac{2}{\pi}U_i\arcsin\frac{u_I}{U_i} \qquad (5/46)$$

gdzie

$$-U_i \leqslant u_I \leqslant U_i \qquad (5/47)$$

Wykorzystując równość $u_I(\tau) = U_i \cos\omega_o \tau = U_i \sin(\pi/2 - \omega_o \tau)$ i podstawiając wyrażenie (5/45) do (5/46) otrzymamy

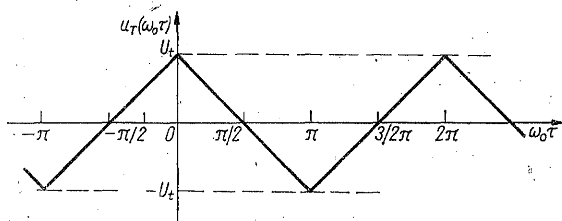
$$u_T(\tau) = \frac{2}{\pi} U_t \arcsin\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega_o \tau\right)\right] = \frac{2}{\pi} U_t \left(\frac{\pi}{2} - \omega_o \tau\right) \tag{5/48}$$

w przedziale: $0 \leqslant \omega_o \tau \leqslant \pi$. Jak widać, jest to odcinek linii prostej. Postępując analogicznie dla kolejnych przedziałów, w których istnieje jednoznaczna funkcja odwrotna (5/46) dostaniemy, że

$$u_T(\tau) = \frac{2}{\pi} U_t (-1)^{k+1} \left(\omega_o \tau - k\pi - \frac{\pi}{2}\right) \tag{5/49}$$

gdzie

$$k\pi \leqslant \omega_o \tau \leqslant (k+1)\pi; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$



5/3 Sygnał *FM* o postaci trójkątnej

Sygnał $u_T(\tau)$ składa się więc z odcinków linii prostych, tworzących przebieg o kształcie trójkątnym, który przedstawiono na rys. 5/3. Należy przy tym podkreślić, że taką postać sygnału otrzymujemy tylko dla zmiennej τ. Jeżeli teraz sygnał $u_T(\tau)$ podamy z kolei na układ o charakterystyce przejściowej

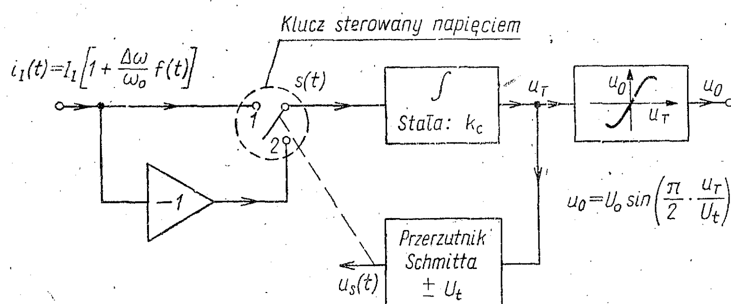
$$u_O = U_o \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{u_T}{U_t}\right) \tag{5/50}$$

to jak pokazano w rozdz. 1 (patrz rys. 1/39) odzyskamy ponownie przebieg sinusoidalny $u_O = U_o \cos\omega_o \tau$, lub inaczej, dla zmiennej t, przebieg *FM* o postaci

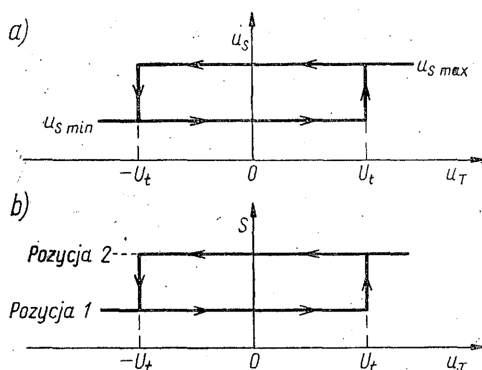
$$u_O(t) = U_o \cos\left[\omega_o t + \Delta\omega \int_0^t f(\vartheta)\,d\vartheta\right] \tag{5/51}$$

Z przeprowadzonych rozważań wynika sposób wytwarzania sygnału (5/51). Należy więc najpierw wygenerować przebieg trójkątny $u_T(\tau)$, a następnie przekształcić go w przebieg sinusoidalny $u_O(\tau)$. Operacje te można zrealizować w układzie funkcjonalnym pokazanym na rys. 5/4. Opisowo działanie układu można przedstawić w sposób następujący. Przyjmijmy, że klucz sterowany napięciem $u_S(t)$ jest początkowo w pozycji *1* ($u_S(t) = U_{S\min}$). Wówczas układ całkujący całkuje sygnał wejściowy $i_I(t)$, dając na wyjściu napięcie $u_T(t)$. Napięcie to jest podawane równocześnie na nieliniowy układ przekształcający oraz komparator

z histerezą (przerzutnik Schmitta), którego charakterystykę pokazano na rys. 5/5a. Gdy $u_T(t)$ osiągnie dodatnią wartość progową przerzutnika U_t, to na jego wyjściu następuje przeskok napięcia $u_S(t)$ od wartości $U_{S\min}$ do $U_{S\max}$, co powoduje przełączenie klucza do pozycji *2* (rys. 5/5b). Od tego momentu odbywa się całkowanie przebiegu wejściowego ze znakiem przeciwnym, czyli $-i_I(t)$. Napięcie $u_T(t)$ maleje teraz od wartości początkowej U_t i gdy osiągnie drugą wartość progową przerzutnika, która wynosi $-U_t$, następuje kolejny przeskok napięcia sterującego kluczem $u_S(t)$ od wartości $U_{S\max}$ do $U_{S\min}$, wywołując ponowne przełączenie klucza do pozycji *1*. Dalej cykl powtarza się i w rezultacie otrzymujemy $u_T(t)$, które względem zmiennej τ ma kształt trójkątny. Układ nieliniowy o charakterystyce (5/50) przekształca $u_T(\tau)$ w sygnał sinusoidalny.



5/4 Układ funkcjonalny ilustrujący metodę wytwarzania trójkątnego przebiegu *FM* wraz z przetwornikiem trójkąt/sinus



5/5 Charakterystyka układu progowego z histerezą (a) oraz ilustracja sposobu przełączania klucza (b)

Po tym wstępnym wyjaśnieniu przeanalizujemy bardziej szczegółowo tworzenie się przebiegu trójkątnego i wpływ poszczególnych układów na jego parametry. Przypominamy równocześnie, że działanie przerzutnika Schmitta oraz układu przekształcającego typu trójkąt/sinus zostało wyjaśnione w rozdz. 1, p. 1.8.

Przyjmijmy, że w chwili $t = t_i$ napięcie $u_T(t)$ osiąga wartość $u_T(t_i) = U_t$

i następuje przełączenie klucza $s(t)$ z pozycji *1* do pozycji *2*. Wówczas dla $t > t_i$, sygnał jest podawany na układ całkujący przez inwertor, a więc ma postać

$$-i_I(t) = -I_I\left[1+\frac{\Delta\omega}{\omega_o}f(t)\right] \tag{5/52}$$

W związku z tym napięcie na wyjściu układu całkującego wyraża się wzorem

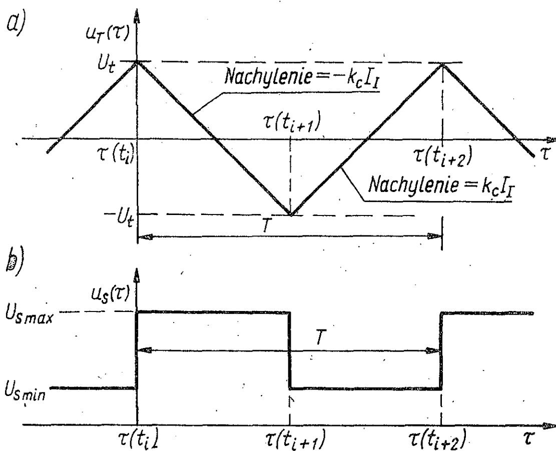
$$u_T(t) = U_t - k_c\int\limits_{t_i}^{t} i_I(\vartheta)\,d\vartheta = U_t - k_c I_I\left[(t-t_i)+\frac{\Delta\omega}{\omega_o}\int\limits_{t_i}^{t} f(\vartheta)\,d\vartheta\right] \tag{5/53}$$

Wprowadzając zmienną $\tau(t)$ określoną przez (5/44) otrzymujemy

$$u_T(\tau) = U_t - k_c I_I[\tau(t)-\tau(t_i)] \tag{5/54}$$

przy czym $\tau(t_i) < \tau(t) \leqslant \tau(t_{i+1})$

a k_c oznacza stałą układu całkującego. Jak widać, dla $\tau(t) > \tau(t_i)(t > t_i) u_T(\tau)$ jest odcinkiem prostej o nachyleniu ujemnym $-k_c I_I$, co pokazano na rys. 5/6a.



5/6 Przebiegi napięć w układzie z rys. 5/4: a) na wyjściu układu całkującego; b) na wyjściu przerzutnika Schmitta

Dla $\tau(t) = \tau(t_{i+1})$ (czyli w momencie $t = t_{i+1}$) $u_T(\tau)$ osiąga wartość $-U_t$ i następuje przełączenie klucza do pozycji *1*. W przedziale $[\tau(t_{i+1}), \tau(t_{i+2})]\, u_T(\tau)$ wyraża się wzorem

$$u_T(\tau) = -U_t + k_c I_I[\tau(t)-\tau(t_{i+1})] \tag{5/55}$$

czyli jest odcinkiem prostej o nachyleniu dodatnim, równym $k_c I_I$. Po osiągnięciu przez $u_T(\tau)$ wartości U_t dla $\tau(t) = \tau(t_{i+2})$ klucz jest przełączany ponownie do pozycji *1* i cykl zaczyna się powtarzać.

Uzyskany w ten sposób przebieg $u_T(\tau)$ jest okresowy względem τ i ma kształt trójkątny. Z rysunku 5/6a widać, że jego okres

$$T = \frac{4U_t}{k_c I_I} \tag{5/56}$$

Pobudzenie przebiegiem $u_T(\tau)$ układu nieliniowego o charakterystyce przejściowej (5/50) daje na wyjściu sygnał

$$u_O(\tau) = U_o \cos\omega_o\tau = U_o \cos\left[\omega_o t + \Delta\omega \int_0^t f(\vartheta)\, d\vartheta + \theta\right] \qquad (5/57)$$

przy czym, na podstawie (5/56)

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi k_c I_I}{2U_t} \qquad (5/58)$$

a wartość fazy początkowej θ można uczynić równą zeru przez odpowiedni dobór początku układu.

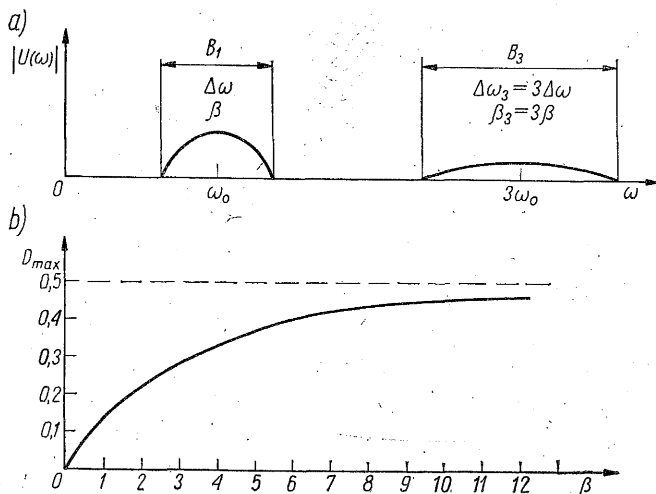
Zauważmy, że napięcie na wyjściu przerzutnika Schmitta $u_S(t)$ jest względem zmiennej τ również okresowe i ma kształt przebiegu prostokątnego, pokazanego na rys. 5/6a. Jeśli usunie się składową stałą, to otrzymamy falę prostokątną o zerowej wartości średniej i amplitudzie $U = (U_{S\max} - U_{S\min})/2$, której rozwinięcie w szereg Fouriera ma postać

$$u(\tau) = u_S(\tau) - (U_{S\min} + U_{S\max})/2 =$$

$$= \frac{4}{\pi} U \left[\cos\omega_o\tau - \frac{1}{3}\cos 3\omega_o\tau + \ldots\right] \qquad (5/59)$$

Jeśli teraz z przebiegu $u(\tau)$ usunie się drogą filtracji składniki o pulsacjach $3\omega_o$, $5\omega_o, \ldots$, to otrzymamy sygnał *FM* o postaci (5/57) z pulsacją środkową określoną wzorem (5/88).

Konieczność stosowania filtracji sygnału $u(\tau)$ wprowadza pewne ograniczenia na maksymalną wartość uzyskiwanej dewiacji względnej. Zagadnienie filtracji okresowego sygnału $u(\tau)$ zostało omówione w dodatku D8, gdzie pokazaliśmy



5/7 Przykładowy rozkład widmowy sygnału *FM* (a) oraz wykres $D_{max} = f(\beta)$, przy którym widma sygnałów składowych są rozłączne (b)

w jaki sposób można określić wartość D_{max}, przy której widma poszczególnych składników nie zachodzą na siebie. Zauważmy, że w szeregu (5/59) nie występuje wyraz z pulsacją $2\omega_o$, w związku z czym przykładowy rozkład widmowy $u(\tau)$ będzie miał postać pokazaną na rys. 5/7a (porównaj z rys. D8/2). Oba widma składowe będą rozłączne, jeśli spełniona zostanie nierówność

$$\frac{B_1}{2}+\frac{B_3}{2} \leqslant 2\omega_o \tag{5/60}$$

którą można również zapisać w następujący sposób

$$D=\frac{\Delta\omega}{\omega_o} \leqslant \frac{1}{\frac{1}{2}\frac{B_2}{2\Delta\omega}+\frac{3}{2}\frac{B_3}{2\Delta\omega_3}} \tag{5/61}$$

Wykorzystując wykres z rys. D5/10 oraz przyjmując, że znakowi równości w (5/61) odpowiada wartość D_{max}, można wyznaczyć D_{max} jako funkcję indeksu modulacji β. Ponieważ przy $\beta \to \infty$ zachodzi $B_1/2\Delta\omega \to B_3/2\Delta\omega_3 \to 1$, więc

$$\lim_{\beta\to\infty} D_{max} = \frac{1}{2} \tag{5/62}$$

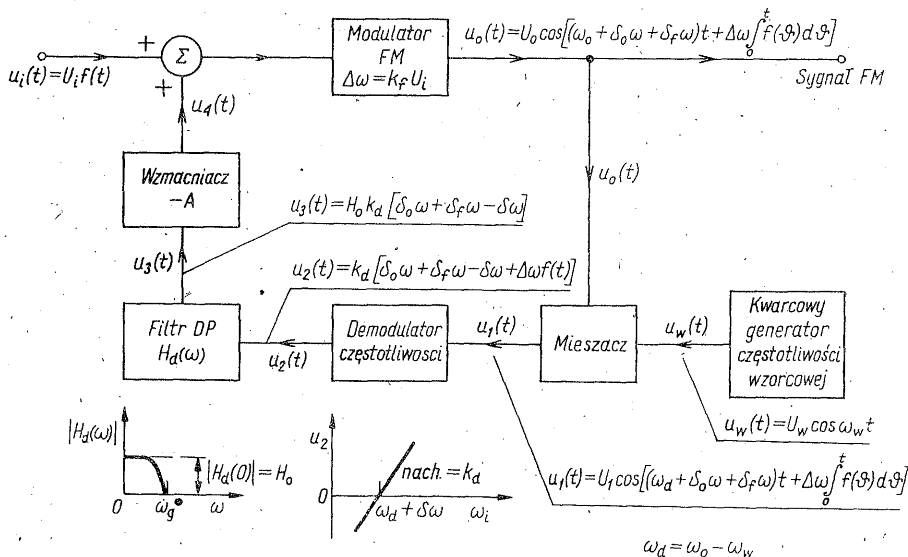
Charakter zależności $D_{max} = f(\beta)$ przedstawiono na rys. 5/7b (porównaj także z rys. D8/3). Przy stosowaniu filtrów o charakterystykach odbiegających od idealnej charakterystyki prostokątnej nierówność (5/61) musi być oczywiście spełniona z odpowiednim zapasem. Mimo to widać, że metoda wytwarzania prostokątnego przebiegu *FM* w połączeniu z filtracją pozwala na uzyskiwanie przynajmniej o rząd większych dewiacji względnych, niż metoda bezpośrednia (por. warunek (5/34)).

Dodać jeszcze należy, że jeśli zainteresowani jesteśmy wyłącznie wytworzeniem przebiegu prostokątnego *FM*, to możemy tego dokonać prościej, niż to ma miejsce w układzie funkcjonalnym z rys. 5/4, gdzie sygnał taki pojawia się tylko jako sygnał pośredni, służący do sterowania pracą klucza elektronicznego. W rozwiązaniach układowych wykorzystuje się do tego celu przerzutniki astabilne, w których okres powtarzania przebiegu prostokątnego jest sterowany sygnałem modulującym.

5.1.4 Stabilizacja częstotliwości środkowej modulatora

Stałość częstotliwości środkowej w modulatorach *FM* — za wyjątkiem modulatora Armstronga — jest na ogół niewystarczająca (przykładowo, tolerancje dla systemów *FM* wynoszą ± 2 kHz względem przypisanej nadajnikowi częstotliwości nośnej), w związku z czym trzeba stosować specjalne układy stabilizujące tę wielkość. Stabilizację wartości średniej pulsacji nośnej ω_o przeprowadza się zazwyczaj za pomocą *układu automatycznej regulacji częstotliwości*, którego schemat funkcjonalny pokazano na rys. 5/8, przy czym częstotliwość wzorcowa (odniesienia) jest dostarczana przez wysokostabilny generator kwarcowy. Zasada działania układu jest następująca. Pulsacja sygnału wyjściowego z modulatora

jest porównywana z pulsacją generatora wzorcowego w taki sposób, że w przypadku, gdy pulsacje te nie są sobie równe jest wytwarzane napięcie proporcjonalne do ich różnicy. Napięcie to, po wzmocnieniu, jest podawane w odpowiedniej fazie na wejście modulatora, powodując zmianę jego pulsacji środkowej do wymaganej wartości.



5/8 Układ automatycznej regulacji częstotliwości środkowej modulatora

Zapiszmy sygnał wyjściowy z modulatora w następujący sposób:

$$u_o(t) = U_o\cos\left[(\omega_o+\delta_o\omega+\delta_f\omega)t+\Delta\omega\int_0^t f(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\right] \qquad (5/63)$$

gdzie ω_o jest pożądaną pulsacją nośną, $\delta_o\omega$ różnicą pomiędzy pulsacją środkową wytwarzaną w modulatorze przy rozwartej pętli sprzężenia zwrotnego a ω_o, natomiast $\delta_f\omega$ przesunięciem pulsacji środkowej wprowadzanym przez sprzężenie zwrotne. Przyjmijmy dalej, że filtr mieszacza (patrz rozdz. 7), na który jest podawane napięcie $u_o(t)$ oraz napięcie $u_W(t)$ z generatora kwarcowego, przenosi sygnał o pulsacji różnicowej $\omega_d = \omega_o-\omega_W$, a więc otrzymujemy

$$u_1(t) = U_1\cos\left[(\omega_d+\delta_o\omega+\delta_f\omega)t+\Delta\omega\int_0^t f(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\right] \qquad (5/64)$$

Sygnał $u_1(t)$ jest podawany następnie na demodulator częstotliwości (patrz rozdz. 6), którego charakterystykę pokazano na rys. 5/8. Jako pulsację środkową demodulatora przyjęto nie ω_d, lecz $\omega_d+\delta\omega$, przy czym $\delta\omega$ oznacza łączny błąd w określaniu pulsacji środkowej tego układu oraz pulsacji wzorcowej generatora kwarcowego. Na wyjściu demodulatora otrzymujemy zatem napięcie $u_2(t)$ o postaci

$$u_2(t) = k_d[\delta_o\omega+\delta_f\omega-\delta\omega+\Delta\omega f(t)] \qquad (5/65)$$

Napięcie to zostaje uśrednione przez filtr dolnoprzepustowy o wąskim pasmie przenoszenia ($\omega_g \ll \omega_M$, gdzie ω_M jest maksymalną pulsacją w widmie sygnału modulującego), w związku z czym

$$u_3(t) = H_o k_d[\delta_o\omega + \delta_f\omega - \delta\omega] \tag{5/66}$$

Po wzmocnieniu napięcia $u_3(t)$ na wejście modulatora jest podawany ostatecznie sygnał następujący:

$$u_4(t) = -AH_o k_d[\delta_o\omega + \delta_f\omega - \delta\omega] \tag{5/67}$$

Sygnał ten wywołuje zmianę pulsacji środkowej modulatora o $\delta_f\omega$, czyli musi zachodzić równość

$$\delta_f\omega = -AH_o k_d k_f[\delta_o\omega - \delta_f\omega - \delta\omega] \tag{5/68}$$

Wyznaczając z tej zależności $\delta_f\omega$ otrzymujemy

$$\delta_f\omega = \frac{-\delta_o\omega + \delta\omega}{1 + \dfrac{1}{AH_o k_d k_f}} \tag{5/69}$$

Zauważmy, że gdy $AH_o k_d k_f \to \infty$, to $\delta_f\omega \to -\delta_o\omega + \delta\omega$, w związku z czym pulsacja środkowa sygnału $u_o(t)$ określonego wzorem (5/63) zmierza do wartości $\omega_o + \delta\omega$. Zatem, przy dużym wzmocnieniu pętli układu otwartego, o stabilności pulsacji środkowej modulatora decyduje stabilność generatora kwarcowego oraz demodulatora częstotliwości, jak na to wskazuje składnik $\delta\omega$. Z tego właśnie względu demodulator częstotliwości powinien również wykazywać dużą stałość pulsacji środkowej. Można to uzyskać, np. przez zastosowanie w demodulatorze omówionym w rozdz. 6, p. 6.3.1 rezonatorów kwarcowych.

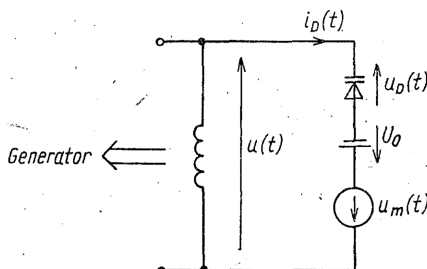
5.2 PRZYKŁADY ROZWIĄZAŃ UKŁADOWYCH

Omówimy teraz wybrane rozwiązania układowe modulatorów częstotliwości. Ponieważ, jak widzieliśmy, układy tego typu mogą działać na bardzo różnych zasadach, ujęcie będzie z konieczności zróżnicowane. W modulatorach bezpośrednich, w których wykorzystuje się analizowane szczegółowo w rozdz. 2 układy generatorów, główną uwagę poświęcimy pracy elementu sterowanego. Do wytwarzania niesinusoidalnych przebiegów *FM* stosuje się układy znacznie bardziej rozbudowane, wykonywane najczęściej w postaci scalonej. Stanowią one wtedy moduł funkcjonalny, który może służyć nie tylko jako modulator analogowy, lecz także jako generator przebiegów o różnych kształtach, czy też układ dający modulację dyskretną (*FSK*, ang. *Frequency-Shift Keying*). Dlatego w tej klasie modulatorów omówimy tylko najprostsze rozwiązania, wykorzystując głównie układy przedstawione w rozdz. 1 i 2.

5.2.1 Modulatory bezpośrednie

Jak to pokazaliśmy w p. 5.1.1 modulację bezpośrednią uzyskuje się przez zmianę częstotliwości drgań generatora za pomocą elementu sterowanego, którym jest najczęściej pojemność. Do najprostszych modulatorów bezpośrednich można

zaliczyć układy, w których do uzyskania pojemności sterowanej wykorzystuje się dwójniki wykazujące nieliniową zależność ładunku od napięcia. Może to być w zasadzie każde złącze *p-n* spolaryzowane zaporowo, ale szczególnie przydatne tutaj są diody pojemnościowe, o specjalnie kształtowanych charakterystykach.



5/9 Fragment układu modulatora bezpośredniego zawierający diodę pojemnościową

Aby wyjaśnić działanie takich elementów rozważmy fragment układu generatora *LC* pokazany na rys. 5/9. Przyjmijmy, że element nieliniowy jest opisany zależnością

$$q = F(u_D) \tag{5/70}$$

Prąd płynący w gałęzi zawierającej diodę można więc wyrazić następująco:

$$i_D(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{dF(u_D)}{du_D}\frac{du_D}{dt} = C(u_D)\frac{du_D}{dt} \tag{5/71}$$

gdzie $C(u_D)$ jest pojemnością różniczkową elementu nieliniowego. Z bilansu napięć wynika, że $u_D = u+u_m+U_0$, a więc zamiast (5/71) możemy napisać

$$i_D(t) = C(u+u_m+U_0)[\dot{u}(t)+\dot{u}_m(t)] \tag{5/72}$$

Jeśli założymy, że układ pracuje w warunkach quasi-stacjonarnych, to znaczy pulsacja środkowa ω_0 napięcia $u(t)$ jest znacznie większa od ω_M, czyli maksymalnej pulsacji w widmie sygnału modulującego $u_m(t)$, to wyraz $\dot{u}_m(t)$ można pominąć i otrzymamy zależność przybliżoną

$$i_D(t) \approx C(u+u_m+U_0)\dot{u}(t) \tag{5/73}$$

Przyjmijmy najpierw, że $|u(t)|_{\max} \ll U_0$ oraz $|u_m(t)|_{\max} \ll U_0$, czyli że składowe zmienne napięcia na diodzie, $u_D(t)$, zmieniają się w niewielkich granicach wokół punktu spoczynkowego, określonego przez U_0. Można wówczas zależność nieliniową $C(u_D)$ przybliżyć częścią liniową rozwinięcia potęgowego i napisać (5/73) w postaci

$$i_D(t) \approx C(u_D)|_{u_D=U_0}\dot{u}(t)+\left.\frac{\partial C(u_D)}{\partial u_D}\right|_{u_D=U_0} u(t)\dot{u}(t)+\left.\frac{\partial C(u_D)}{\partial u_D}\right|_{u_D=U_0} u_m(t)\dot{u}(t) \tag{5/74}$$

Wyraz środkowy stanowi składową prądu $i_D(t)$ o widmie skupionym wokół

pulsacji $2\omega_o$ i może zostać pominięty, gdyż z uwagi na dużą selektywność obwodu rezonansowego wywoła na jego zaciskach pomijalnie małe napięcie. W związku z tym zamiast (5/74) możemy napisać, że

$$i_D(t) \approx [C_o + \tilde{C}(t)] \frac{du}{dt} = C(t) \frac{du}{dt} \tag{5/75}$$

gdzie

$$C_o = C(u_D)|_{u_D=U_0} = C(U_0)$$

$$\tilde{C}(t) = \left.\frac{\partial C(u_D)}{\partial u_D}\right|_{u_D=U_0} u_m(t)$$

Jak widać, przy założeniu małych zmian $u_m(t)$ wokół punktu spoczynkowego, składowa zmienna pojemności $\tilde{C}(t)$ jest liniowo zależna od napięcia modulującego i obwód z rys. 5/9 można sprowadzić do obwodu parametrycznego, w którym gałąź zawierająca diodę zostaje zastąpiona pojemnością $C(t)$. Na skutek założenia wolnej zmienności $u_m(t)$ prąd płynący przez $C(t)$ jest określony zależnością uproszczoną (5/75), co powoduje, że równanie obwodu dla $u(t)$ przyjmuje postać (5/20), omówioną w p. 5.1.1.

Gdy zmiany napięcia sterującego nie są wystarczająco małe, aby można było zastosować podane przybliżenie, trzeba uwzględnić nieliniowy charakter zależności $C(u_D)$. Funkcja $C(u_D)$ opisująca zmianę pojemności różniczkowej diody pojemnościowej zależy od rozkładu domieszek w obszarze złącza i jest najczęściej aproksymowana zależnością

$$C(u_D) = C(0)\left[1 + \frac{u_D}{\phi}\right]^{-p} \tag{5/76}$$

gdzie $C(0)$ oznacza pojemność różniczkową dla $u_D = 0$, ϕ — potencjał kontaktowy złącza, a p — parametr zależny od rozkładu domieszek w obszarze złącza diody[1]. Z rysunku 5/9 widać, że napięcie zmienne na diodzie jest sumą napięcia modulującego $u_m(t)$ oraz napięcia $u(t)$ o pulsacji środkowej ω_o. Jeśli przyjmiemy, że $|u_m(t)|_{\max} \gg |u(t)|_{\max}$, to wpływ $u(t)$ można pominąć i jedynym napięciem sterującym będzie $u_m(t)$. Wprowadzając $u_D = U_0 + u_m$ można zależność (5/76) przekształcić do postaci

$$C(u_m) = C_o\left[1 + \frac{u_m}{U_0 + \phi}\right]^{-p} \tag{5/77}$$

przy czym C_o stanowi teraz pojemność różniczkową diody w spoczynkowym punkcie pracy modulatora, tj. dla $u_m = 0$, czyli dla $u_D = U_0$.

Uwzględnienie faktu, że zależność $C(u_D)$ ma postać (5/76), prowadzi do nieliniowego równania różniczkowego opisującego obwód z rys. 5/9, co znacznie komplikuje jego analizę (zauważmy, że nie uwzględniono tu nieliniowości elementu aktywnego generatora). Przy podanych założeniach można jednak przyjąć, że

---

[1] W przypadku liniowego rozkładu domieszek $p = 1/3$, przy rozkładzie stromym $p = 1/2$, wytwarzane są także diody specjalne, dla których $1/2 < p \leqslant 3$.

w warunkach pracy quasi-stacjonarnej pulsacja chwilowa drgań w obwodzie wyraża się wzorem

$$\omega_i[u_m(t)] = \frac{1}{\sqrt{LC[u_m(t)]}} \tag{5/78}$$

Po podstawieniu do równania (5/78) zależności (5/77) otrzymujemy

$$\omega_i(z) = \omega_o(1+z)^{p/2} \tag{5/79}$$

gdzie

$$z = \frac{u_m}{U_0+\phi}$$

stanowi *unormowane napięcie modulujące*, a

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC_o}}$$

jest pulsacją drgań generatora przy braku napięcia modulującego i nosi nazwę *pulsacji spoczynkowej modulatora*. Zależność $\omega_i(u_m)$ jest nazywana *charakterystyką modulacji*. Jak widać z równania (5/79), dla omawianego modulatora jest to zależność **n**ieliniowa, jeśli tylko $p \neq 2$[1]. Rozwijając $\omega_i(z)$ w szereg MacLaurina ($|z| < 1$) otrzymamy

$$\omega_i(z) = \omega_o(1+a_1 z+a_2 z^2+ \ldots) \tag{5/80}$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{p}{2}-k+1\right)$$

Jeśli teraz zmienną z zastąpimy unormowanym napięciem modulującym, to otrzymamy ostatecznie, że

$$\omega_i(t) = \omega_o[1+a_1' u_m(t)+a_2' u_m^2(t)+ \ldots] \tag{5/81}$$

przy czym

$$a_n' = \frac{a_n}{(U_o+\phi)^n}$$

---

[1] Uwaga ta jest słuszna tylko wówczas, gdy $C(u_m)$ stanowi całkowitą pojemność obwodu. Jeśli równolegle do gałęzi zawierającej diodę występuje jeszcze pojemność stała C, to wynikowa pojemność wyrazi się wzorem

$$C+C(u_m) = (C+C_o)\left\{1-\frac{C_o}{C+C_o}[1-(1+z)^{-p}]\right\}$$

Zamiast wzoru (5/79) dostajemy wówczas na $\omega_i(z)$ zależność następującą:

$$\omega_i(z) = \omega_o\left\{1-\frac{C_o}{C+C_o}[1-(1+z)^{-p}]\right\}^{-1/2}$$

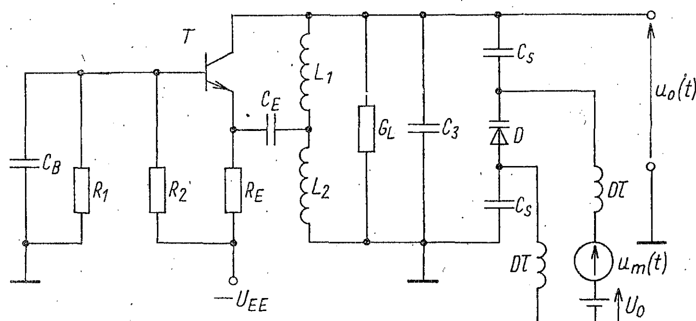
Charakterystyka modulacji zależy więc w tym przypadku zarówno od p, jak i stosunku $C_o/(C+C_o)$.

Z rozwinięcia (5/81) wynika, że wymagana dla sygnału *FM* liniowa zależność jego pulsacji chwilowej od sygnału modulującego będzie zachodziła tylko wówczas, gdy wyrazy o wyższych potęgach będą pomijalnie małe[1]. Widać stąd, jaki wpływ na zakres liniowej pracy modulatora ma wykładnik p, który decyduje o kształcie charakterystyki diody pojemnościowej.

W praktyce amplituda napięcia modulującego, a więc dewiacja $\Delta\omega$, jest ograniczona dopuszczalnym poziomem zniekształceń nieliniowych. Jeśli na przykład przyjmiemy, że sygnał modulujący ma postać $u_m(t) = U_m \cos\omega_m t$, to jak wynika z podstawienia $u_m(t)$ do równania (5/81), pulsacja chwilowa $\omega_i(t)$ jest funkcją okresową, a zatem można ją przedstawić szeregiem Fouriera

$$\omega_i(t) = A_0 + A_1 \cos\omega_m t + A_2 \cos 2\omega_m t + \ldots \tag{5/82}$$

Składowe o pulsacjach $2\omega_m$, $3\omega_m$, ... stanowią zniekształcenia nieliniowe modulacji, a ich poziom można określić przez podanie współczynnika zawartości harmonicznych odpowiedniego rzędu.



5/10 Układ modulatora z diodą pojemnościową

Na rysunku 5/10 przedstawiono przykładowe rozwiązanie modulatora bezpośredniego z diodą pojemnościową, wykorzystując do tego celu generator *LC* w konfiguracji Hartleya z rys. 2/38. Kondesnatory C_s izolują obwód polaryzacji diody napięciem U_0 od pozostałej części układu, a ich reaktancje powinny być pomijalnie małe dla pulsacji środkowej ω_o. Zaznaczone na rysunku dławiki mają za zadanie odseparowanie obwodu zawierającego generator sygnału modulującego, od przebiegów wielkiej częstotliwości. W szczególnym przypadku może zachodzić równość $C_3 = 0$ i pojemność różniczkowa diody stanowi wówczas jedyną pojemność obwodu rezonansowego.

Pojemność sterowaną można uzyskać także w inny sposób, wykorzystując układ z odpowiednio pomyślanym sprzężeniem zwrotnym. Aby to pokazać,

---

[1] Warto zauważyć, że jeśli zależność ta nie będzie liniowa, to pulsacja spoczynkowa generatora ω_o będzie różna od wartości średniej $\overline{\omega_i(t)}$. Wynika to natychmiast z równania (5/81), gdy uzmysłowimy sobie, że równość $\overline{u_m(t)} = 0$ nie pociąga za sobą równości $\overline{u_m^n(t)} = 0$.

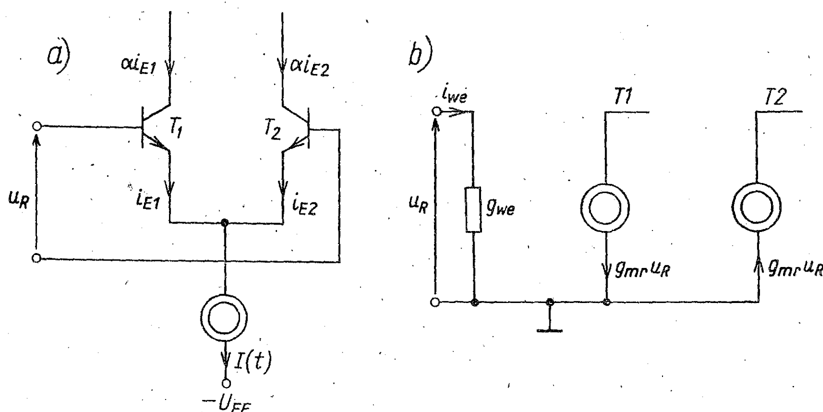
rozważmy najpierw układ różnicowy przedstawiony na rys. 5/11a, który był analizowany w dodatku D3. Przyjmijmy na początek, że $I(t) = I_0 = \text{const}$. Jak wykazano (patrz wzory (D3/6) i (D3/7)), słuszne są wówczas zależności:

$$i_{E1}(z) = \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2}\,\text{tgh}\,\frac{z}{2}$$

$$i_{E2}(z) = \frac{I_0}{2} - \frac{I_0}{2}\,\text{tgh}\,\frac{z}{2}$$

gdzie

$$z = \frac{u_R}{U_T}$$



5/11 Para różnicowa (a) i jej małosygnałowy układ zastępczy (b)

Małosygnałowa konduktancja tego układu wyznaczona w spoczynkowym punkcie pracy Q, określonym przez wydajność I_0 generatora stałoprądowego (wzór (D3/19)) wynosi

$$g_{mr} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u_R}(\alpha i_{E1})\bigg|_{u_R=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u_R}(-\alpha i_{E2})\bigg|_{u_R=0} = \frac{\alpha I_0}{4U_T} \tag{5/83}$$

Dla małych pobudzeń u_R, czyli przy spełnieniu warunku

$$\frac{|z|}{2} = \frac{|u_R|}{2U_T} \ll 1 \tag{5/84}$$

słuszne jest przybliżenie $\text{tgh}\,x \approx x$ i parę różnicową można przedstawić małosygnałowym układem zastępczym z rys. 5/11b. Konduktancja wejściowa tego układu wyraża się wzorem

$$g_{we} = \frac{\partial i_{we}}{\partial u_R}\bigg|_Q = \frac{\partial}{\partial u_R}[(1-\alpha)i_{E1}]_Q =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_R}\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\,\alpha i_{E1}\right]_Q = \frac{1-\alpha}{\alpha}\,g_{mr} \tag{5/85}$$

Dla $\alpha \approx 1$ jej wartość jest pomijalnie mała.

Załóżmy teraz, że źródło prądu zawiera składową zmienną, tzn.

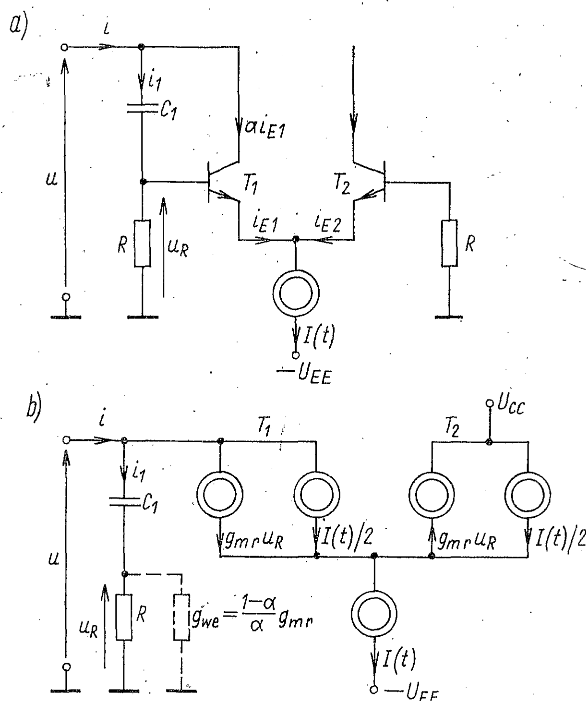
$$I(t) = I_0 + I_1 f(t) \tag{5/86}$$

Na podstawie równania (5/83) możemy napisać, że

$$g_{mr}(t) = \frac{\alpha I(t)}{4U_T} = \frac{\alpha I_0}{4U_T} + \frac{\alpha I_1}{4U_T} f(t) \tag{5/87}$$

a więc transkonduktancja g_{mr} jest teraz funkcją czasu i zmienia się proporcjonalnie do $f(t)$ wokół swej wartości spoczynkowej.

Po tych wstępnych uwagach rozważmy układ pokazany na rys. 5/12a. Przy spełnieniu nierówności (5/84) odpowiada mu układ zastępczy z rys. 5/12b.



5/12 Pojemnościowy element sterowany (a) i jego układ zastępczy dla składowych zmiennych (b)

Jeśli założymy, iż g_{we} można pominąć, oraz że $|u_R| \ll |u|$, to możemy napisać

$$g_{mr} u_R = g_{mr} R i_1 \approx g_{mr} R C_1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \tag{5/88}$$

Podstawiając za g_{mr} wyrażenie (5/87) otrzymamy

$$g_{mr} u_R = \left[\frac{\alpha I_0}{4U_T} RC_1 + \frac{\alpha I_1}{4U_T} RC_1 f(t)\right] \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \tag{5/89}$$

Z układu zastępczego widać, że prąd wejściowy i wyrazi się wzorem

$$i = i_1 + g_{mr} u_R + \frac{I(t)}{2} =$$

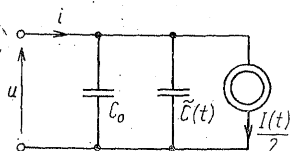
$$= \left[\left(C_1 + RC\frac{\alpha I_0}{4U_T}\right) + \left(RC_1\frac{\alpha I_1}{4U_T} + f(t)\right)\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{I(t)}{2} =$$

$$= [C_o + \tilde{C}(t)]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{I(t)}{2} \tag{5/90}$$

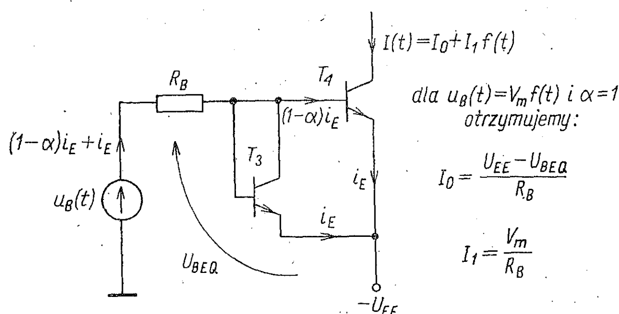
Zauważmy, że zależność (5/90) opisuje układ pokazany na rys. 5/13 w przypadku, gdy

$$\left|\frac{\mathrm{d}\tilde{C}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{\max} \ll \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|_{\max} \tag{5/91}$$

Jeśli przyjmiemy, że widmo $u(t)$ jest skupione wokół pulsacji ω_o, a $f(t)$ jest sygnałem dolnopasmowym o widmie ograniczonym do ω_M, to nierówność (5/91) jest równoważna znanej nierówności $\omega_M \ll \omega_o$.



5/13 Układ zastępczy pojemnościowego elementu sterowanego



5/14 Przykładowe rozwiązanie źródła prądowego sterowanego sygnałem $f(t)$

Źródło prądowe sterowane napięciem można przykładowo zrealizować tak, jak to pokazano na rys. 5/14. Z równania

$$U_{EE} + u_B(t) = (2-\alpha)i_E R_B + U_{BEQ} \tag{5/92}$$

możemy wyznaczyć i_E, a stąd

$$I(t) = \alpha i_E = \frac{\alpha(U_{EE} - U_{BEQ})}{(2-\alpha)R_B} + \frac{\alpha}{(2-\alpha)R_B}u_B(t) \tag{5/93}$$

Przyjmując, że $u_B(t) = V_m f(t)$ oraz $\alpha = 1$ dostajemy ostatecznie

$$I(t) = I_0 + I_1 f(t) = \frac{U_{EE} - U_{BEQ}}{R_B} + \frac{V_m}{R_B}f(t) \tag{5/94}$$

Powyższe zależności wyprowadzone z uwzględnieniem przybliżenia małosygnałowego można orientacyjnie uważać za słuszne, jeśli $|u_B(t)|_{\max} \ll U_{BEQ}$ oraz $|u_B(t)|_{\max} = 10...15$ mV.

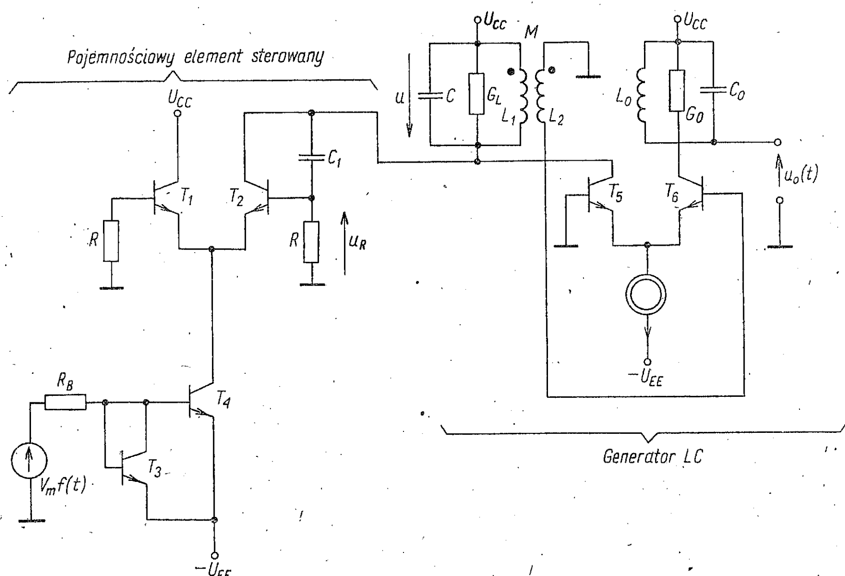
Porównując wzory (5/90) i (5/94) widzimy, że składowa stała C_o oraz składowa zmienna $\tilde{C}(t)$ pojemności widzianej z zacisków wejściowych są ostatecznie opisane zależnościami ($\alpha = 1$)

$$C_o = C_1\left(1+\frac{R}{R_B}\,\frac{U_{EE}-U_{BEQ}}{4U_T}\right) \tag{5/95}$$

$$\tilde{C}(t) = C_1\,\frac{R}{R_B}\,\frac{V_m}{4U_T}f(t) \tag{5/96}$$

Pojemność sterowaną można uzyskać również w układzie z jednym tranzystorem bipolarnym lub polowym. Analizę takiego układu przeprowadza się w sposób analogiczny, jak to zrobiliśmy dla pary różnicowej. Nie będziemy tego omawiać, gdyż układy jednotranzystorowe mają na ogół gorsze właściwości, niż rozwiązanie omówione wyżej.

Pełny układ modulatora, w którym wykorzystuje się generator ze sprzężeniem transformatorowym i wzmacniaczem różnicowym (patrz rys. 2/40), jest pokazany na rys. 5/15. Jeśli uwzględnimy to, że pojemnościowy element sterowany można zastąpić układem z rys. 5/13, a rola elementu aktywnego w generatorze polega na odtłumieniu obwodu rezonansowego, to quasi-stacjonarnym i liniowym modelem modulatora będzie ponownie obwód pokazany na rys. 5/1b opisany uproszczonym równaniem (5/20), którego rozwiązania były dyskutowane w p. 5.1.1. Generator o wydajności $I(t)/2$ zaznaczony na rys. 5/13 można teraz pominąć, gdyż reprezen-



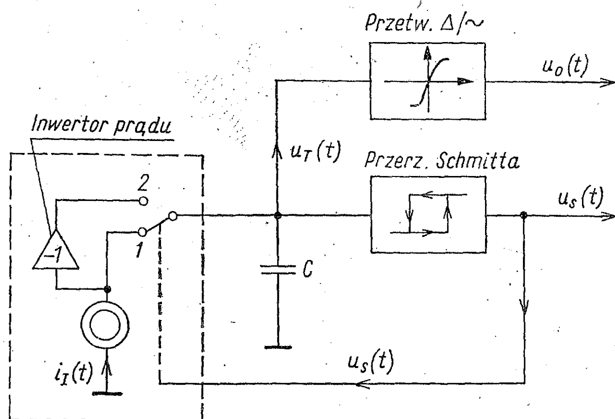
5/15 Układ modulatora częstotliwości z pojemnościowym elementem sterowanym z rys. 5/12

tuje on wolnozmienny sygnał modulujący i wskutek zwierającego działania indukcyjności obwodu drgającego ma pomijalnie mały wpływ na napięcie $u(t)$.

Zauważmy na koniec, że konduktancja wejściowa g_{we}, którą zaznaczyliśmy na rys. 5/12b, ale pominęliśmy w dalszych rozważaniach, jest w omawianym przypadku wielkością zmienną w czasie, z uwagi na zmienność $g_{mr}(t)$. Aby jej wpływ, który może się przejawiać w postaci pasożytniczej modulacji amplitudy wytwarzanego sygnału *FM*, był do pominięcia musi być spełniony warunek $R \ll 1/[g_{we}(t)]_{max}$. Mała wartość R zapewnia także mały wpływ tej rezystancji na wynikową dobroć obwodu rezonansowego.

5.2.2 Modulatory wytwarzające niesinusoidalne przebiegi FM

W punkcie 5.1.3 przeanalizowaliśmy szczegółowo metodę generacji sygnałów zmodulowanych częstotliwościowo o trzech różnych kształtach w układzie, którego schemat funkcjonalny jest przedstawiony na rys. 5/4. Przekształćmy ten układ w sposób pokazany na rys. 5/16 (porównaj z rys. 2/44), gdzie rolę integra-

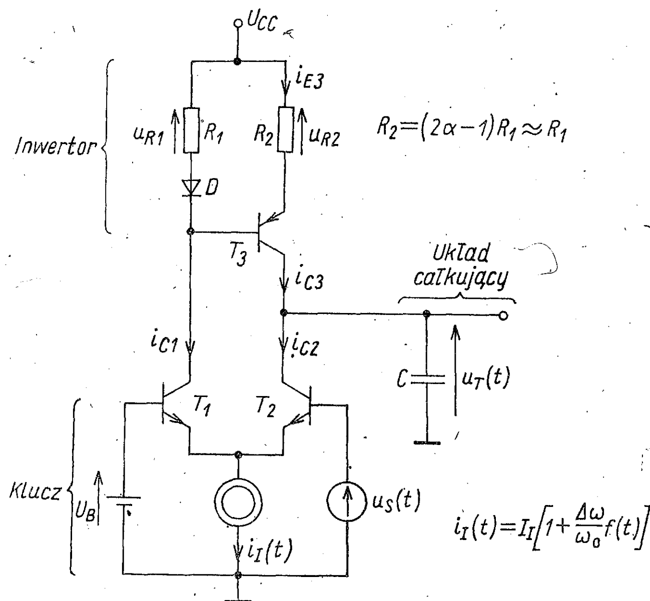


5/16 Schemat blokowy modulatora ze źródłem prądowym

tora pełni kondensator C ładowany i rozładowywany cyklicznie przez źródło prądowe $i_I(t)$. Przykładowe sposoby realizacji dwu bloków funkcjonalnych tego układu omówiliśmy już poprzednio. W rozdziale 1 p. 1.7 pokazaliśmy, że charakterystykę przejściową przetwornika trójkąt/sinus można z żądaną dokładnością przybliżyć wykorzystując do tego celu przetworniki diodowe, tranzystorowe pary różnicowe, lub też układy mnożące, a w p. 1.8 przedstawiliśmy zasadę działania oraz szczegółową analizę przerzutnika Schmitta ze wzmacniaczem operacyjnym. Bloków tych nie będziemy więc już omawiać; nadmienimy tylko, że jeśli jest potrzebna większa szybkość działania przerzutnika Schmitta, niż może to zapewnić wzmacniacz operacyjny, to stosuje się inne realizacje tego układu. W dalszych rozważaniach zajmiemy się w związku z tym tylko sposobem realizacji tego

fragmentu układu funkcjonalnego, który na rys. 5/16 jest otoczony linią przerywaną.

Jak zobaczymy dalej, funkcję klucza elektronicznego i inwertora znaku prądu $i_I(t)$ może pełnić jeden układ, którego przykładowe rozwiązanie pokazano na rys. 5/17. Klucz elektroniczny jest tutaj zbudowany na parze różnicowej,



5/17 Przykład realizacji fragmentu układu z rys. 5/16, otoczonego linią przerywaną

natomiast funkcję inwertora spełnia tranzystor T_3. Działanie układu opiszemy przy założeniu, że α dla wszystkich tranzystorów jest jednakowe tzn. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. Przyjmijmy najpierw, że $u_S(t) = U_{S\min}$. Jeśli różnica $U_B - U_{S\min}$ jest kilkakrotnie większa od $U_T = kT/q$, to jak widać z rys. D3/2 można przyjąć, że prąd $i_I(t)$ płynie w całości przez tranzystor T_1, czyli $i_{C1} = \alpha i_I(t)$ oraz $i_{C2} = 0$. Przez rezystor R_1 płynie wówczas prąd równy $\alpha i_I - (1-\alpha)i_{E3}$, który wytwarza na nim napięcie

$$u_{R1} = [\alpha i_I - (1-\alpha)i_{E3}]R_1 \tag{5/97}$$

Przy założeniu, że napięcie progowe diody i złącza emiter-baza tranzystora T_3 są takie same (np. wówczas, gdy dioda i tranzystor są elementami tego samego układu scalonego) oraz, że $i_D \approx i_{E3}$, otrzymujemy równość

$$u_{R1} = u_{R2} = R_2 i_{E3} \tag{5/98}$$

a stąd

$$i_{E3} = \frac{\alpha i_I}{1-\alpha+\frac{R_2}{R_1}} \tag{5/99}$$

Prąd ładujący kondensator ma więc wartość

$$i_{C3} = \alpha i_{E3} = \alpha i_I \frac{\alpha}{1-\alpha+\frac{R_2}{R_1}} \tag{5/100}$$

Kiedy napięcie $u_T(t)$ na kondensatorze C osiągnie wartość $+U_t$ nastąpi zmiana stanu przerzutnika (patrz rys. 5/5) i na jego wyjściu pojawi się napięcie $u_S(t) = U_{S\max}$. Jeśli teraz różnica $U_{S\max} - U_B$ będzie kilkakrotnie większa od U_T, to można przyjąć, że prąd $i_I(t)$ płynie wyłącznie przez tranzystor T_2, czyli $i_{C1} = i_{E3} = i_{C3} = 0$, natomiast

$$i_{C2} = \alpha i_I \tag{5/101}$$

Prąd ten ma zwrot przeciwny, niż poprzednio, a więc najpierw rozładowuje kondensator C, a następnie wytwarza na nim napięcie o odwrotnej polaryzacji. Po osiągnięciu przez $u_T(t)$ drugiej wartości progowej $-U_t$ przerzutnik wraca do stanu pierwotnego i $u_S(t) = U_{S\min}$. Dalej cykl powtarza się. Dla uzyskania symetrycznego przebiegu trójkątnego $u_T(t)$ prądy ładujące kondensator powinny być w obu fazach jednakowe. Z porównania zależności (5/100) i (5/101) widać, że będzie tak wówczas gdy zostanie spełniony warunek

$$\frac{\alpha}{1-\alpha+\frac{R_2}{R_1}} = 1 \tag{5/102}$$

z którego wynika, iż R_2 powinno mieć wartość

$$R_2 = (2\alpha-1)R_1 \approx R_1 \tag{5/103}$$

Wówczas następuje okresowe przełączanie prądu ładującego od wartości $\alpha i_I(t)$ do wartości $-\alpha i_I(t)$.

Zależność napięcia na kondensatorze, pomiędzy momentami, w których następuje przełączanie klucza, od prądu ładującego jest następująca:

$$u_T(t) = \pm\frac{\alpha}{C}\int_{t_i}^{t} i_i(\tau)\,d\tau \tag{5/104}$$

a więc stała układu całkującego wynosi

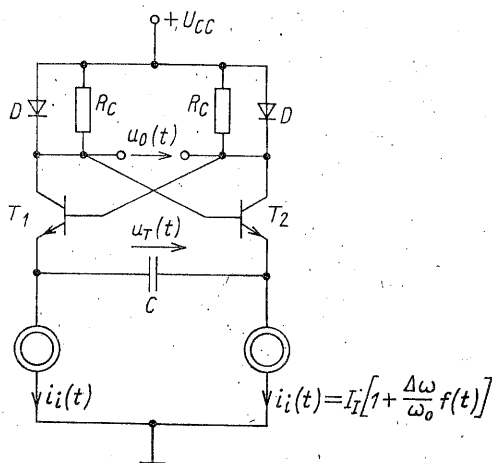
$$k_c = \frac{\alpha}{C} \tag{5/105}$$

Podstawiając tę wartość do (5/56) i (5/58) otrzymamy okres, lub pulsację podstawową sygnału $u_T(\tau)$, gdzie τ jest określone wzorem (5/44).

Aby tranzystor T_2 nie osiągał nasycenia musi być spełniona nierówność $\max u_S(t) < \min u_T(t) + U_D$. Analogiczny warunek dla tranzystora T_3 ma postać $U_{CC} - R_1 \max i_I(t) > \max U_T(t)$.

Zmodulowane częstotliwościowo przebiegi o kształcie trójkątnym lub prostokątnym można wytwarzać również w multiwibratorze astabilnym z po-

jemnościowym sprzężeniem emiterowym, którego układ jest przedstawiony na rys. 5/18. Przyjmując, że tranzystory oraz diody są identyczne i zachowują się jak elementy progowe z tym samym napięciem progowym U_{BE}, działanie układu można opisać w sposób następujący.



5/18 Modulator z przerzutnikiem astabilnym o sprzężeniu emiterowym

Przyjmijmy, że $i_i(t) = I_I = \text{const}$. Niech w chwili początkowej t_i napięcie na kondensatorze C wynosi $u_T(t_i) = U_{BE}$, czyli ma zwrot zaznaczony na rysunku. Wówczas tranzystor T_1 zaczyna przewodzić, a T_2 ulega zatkaniu. Kondensator rozładowuje się prądem I_I według zależności

$$u_T(t) = U_{BE} - \frac{I_I}{C}(t-t_i) \tag{5/106}$$

Gdy w chwili $t = t_{i+1}$ napięcie u_T przyjmie wartość $u_T(t_{i+1}) = -U_{BE}$, to zacznie przewodzić tranzystor T_2, a T_1 ulegnie zatkaniu. Od tego momentu do chwili t_{i+2} napięcie na kondensatorze ponownie narasta liniowo według zależności

$$u_T(t) = -U_{BE} + \frac{I_I}{C}(t-t_{i+1}) \tag{5/107}$$

aż osiągnie wartość $u_T(t_{i+2}) = U_{BE}$ i cykl zaczyna się powtarzać. Otrzymujemy więc przebieg trójkątny o amplitudzie równej U_{BE} oraz zerowej wartości średniej. Łatwo zauważyć, że częstotliwość podstawowa tego przebiegu

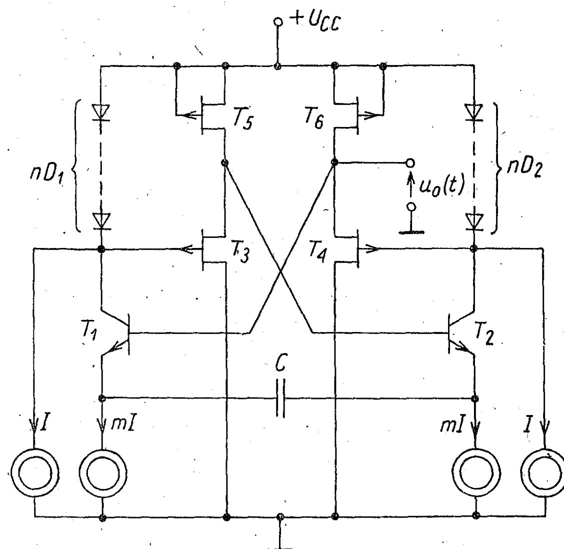
$$f_o = \frac{I_I}{4CU_{BE}} \tag{5/108}$$

Drugie napięcie wyjściowe $u_O(t)$, wskutek ograniczającego działania diod ma kształt prostokątny o amplitudzie U_{BE} i tej samej częstotliwości podstawowej. Przesunięcie fazowe między obu przebiegami wynosi $\pi/2$.

Jeśli teraz przyjmiemy, że wydajność źródeł prądowych jest sterowana sygnałem modulującym, czyli zamiast I_I mamy $i_i(t) = I_I + \Delta\omega/\omega_o f(t)$, to otrzy-

mamy sygnał zmodulowany, którego częstotliwość chwilowa będzie liniowo zależna od $f(t)$. Stałość częstotliwości średniej tego rodzaju układu zależy od temperatury (poprzez wpływ temperatury na U_{BE} oraz I_I) i nie jest zbyt duża.

Ulepszoną wersję takiego układu [5] pokazano tytułem przykładu na rys. 5/19. Jest to układ z tranzystorami bipolarnymi i unipolarnymi. Tranzystory bipolarne T_1 i T_2 spełniają taką samą rolę, jak w układzie z rys. 5/18. Tranzystory polowe T_5 i T_6 działają jako źródła prądowe, a T_3 i T_4 są wtórnikami źródłowymi,



5/19 Ulepszona wersja modulatora z rys. 5/18 o szerokim zakresie przestrajania

izolującymi sprzężone stopnie z tranzystorami bipolarnymi. Ponieważ bramki tranzystorów polowych pobierają znacznie mniejszy prąd, niż bazy tranzystorów bipolarnych, więc prąd sterujący I może być w tym układzie zmniejszony do wartości nieosiągalnej w układzie bez tranzystorów polowych. Dzięki temu osiągnięto liniową zmianę częstotliwości w zakresie siedmiu dekad. Dodatkową cechą układu jest to, że częstotliwość podstawowa f_o oraz amplituda przebiegu prostokątnego U_o, określone wzorami

$$f_o = \frac{mI}{4CU_C} \tag{5/109}$$

$$U_o = nU_T \ln(2m+1) \tag{5/110}$$

(gdzie U_C jest amplitudą napięcia trójkątnego na kondensatorze C) nie zależą od napięcia zasilania U_{CC}.

Układy omówionego rodzaju są szeroko stosowane w pętlach fazowych, jako generatory VCO.

Literatura

1. Clarke K. K., Hess D. T.: *Communication Circuits: Analysis and Design*. Addison-Wesley, London 1971.
2. Golde W.: *Układy elektroniczne*, T. II. WNT, Warszawa 1976.
3. Jeżewski M., Szkudliński W.: *Generatory synchronizowane i ich zastosowania*. WNT, Warszawa 1981.
4. Pawłowski J.: *Podstawowe układy elektroniczne: nieliniowe układy analogowe*. WKŁ, Warszawa 1979.
5. Sleeckx F. V., Sansen W. M.: Wide-range monolithic bipolar-IFET CCO. *Electronics Letters*, Vol. 14. No. 8, 1978.
6. Szkudliński W.: Analiza możliwości realizacji liniowego modulatora z diodą pojemnościową. Praca doktorska, P.G. 1974.

6

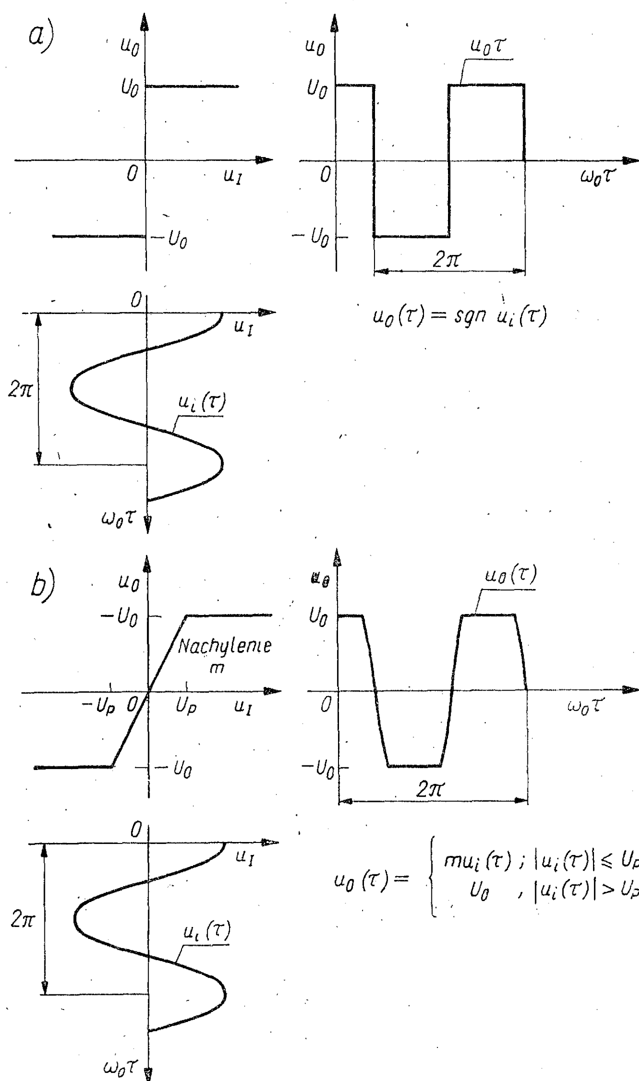
DEMODULATORY CZĘSTOTLIWOŚCI

W rozdziale tym omówimy podstawowe metody demodulacji sygnałów *FM* oraz przykładowe rozwiązania układowe demodulatorów wybrane w ten sposób, aby ilustrowały różne techniki demodulacji. Ponieważ w dostępnych opracowaniach książkowych traktuje się te zagadnienia w sposób tradycyjny, uniemożliwiający bardziej ogólne, systemowe przedstawienie operacji, jakim są poddawane demodulowane sygnały, wykorzystaliśmy tutaj głównie pozycję [2], prezentującą w zakresie analizy układów funkcjonalnych ujęcie nieco trudniejsze, ale czytelne i wciąż bardzo nowoczesne. Pozwala ono przede wszystkim na prowadzenie analizy dla dowolnego sygnału modulującego (bez zakładania, na przykład, że jest on sinusoidalny), umożliwia w razie potrzeby uwzględnienie wpływu szybkości zmian częstotliwości chwilowej oraz daje podstawę do porównywania właściwości układów działających na odmiennych zasadach. Dla łatwiejszego śledzenia rozważań opracowane zostały dodatki D7 i D8, których treścią są zagadnienia nie ujmowane zwykle w programach teorii obwodów, lecz — naszym zdaniem — niezbędne dla właściwego zrozumienia omawianych zjawisk. Pewne niekonwencjonalne metody demodulacji sygnałów *FM* zostaną zaprezentowane w rozdz. 8.

6.1 OGRANICZANIE SYGNAŁÓW

Sygnał *FM*, w którym przenoszonej informacji są przyporządkowane zmiany częstotliwości chwilowej przebiegu nośnego ulega w kanale transmisyjnym pasożytniczej modulacji amplitudy, powodowanej zakłóceniami, zanikami, czy też konwersją *FM*/*AM* w układach filtrujących (patrz rys. D7/2). Ponieważ większość demodulatorów częstotliwości jest wrażliwa nie tylko na zmiany częstotliwości chwilowej, lecz także na zmiany amplitudy sygnału, więc dla uniknięcia wynikających stąd zniekształceń konieczne jest usunięcie tej niepożądanej modulacji. Dokonuje się tego za pomocą układów nieliniowych o specjalnie

kształtowanych charakterystykach przejściowych, nazywanych ogranicznikami amplitudy. Przykładowe charakterystyki takich ograniczników dla układów bezinercyjnych pokazano na rys. 6/1. Ogranicznik o charakterystyce podanej na rys. 6/1a nazywamy *ogranicznikiem symetrycznym z przejściem uskokowym.* Rysunek 6/1b przedstawia charakterystykę *ogranicznika symetrycznego z przejściem liniowym,* którą stosunkowo łatwo przybliżyć, np. za pomocą układu diodowo-rezystorowego. Podstawowe układy ograniczników tego rodzaju, a także niektóre inne rozwiązania zostały omówione w rozdziale 1 i nie będziemy ich tutaj przytaczać. Dla dalszej analizy wystarczy, jeśli posłużymy się charakterystyką



6/1 Charakterystyki przejściowe ogranicznika: a) z przejściem uskokowym; b) z przejściem liniowym

z przejściem uskokowym. Pozwoli to na uproszczenie zapisów formalnych, nie wpływając zarazem na poprawność, czy wyniki końcowe prowadzonych rozważań. Dla wyjaśnienia tej kwestii przyjmijmy, że na wejście ogranicznika o charakterystyce z rys. 6/1a został przyłożony sygnał *FM*

$$u_i(t) = U_i\cos(\omega_o t+\Delta\omega \int_0^t f(\vartheta)\,d\vartheta) \tag{6/1}$$

Jeśli wprowadzimy nową zmienną

$$\tau(t) = t+\frac{\Delta\omega}{\omega_o}\int_0^t f(\vartheta)\,d\vartheta \tag{6/2}$$

to równanie (6/1) można zapisać w postaci

$$u_i(\tau) = U_i\cos\omega_o\tau \tag{6/3}$$

przy czym $u_i(\tau)$ jest względem nowej zmiennej okresowy, z okresem $2\pi/\omega_o$. Sygnał taki wywoła odpowiedź również okresową z tym, że jak widać z rys. 6/1a, $u_O(\tau)$ ma zawsze postać przebiegu prostokątnego. W przypadku ogranicznika o charakterystyce z rys. 6/1b mogą istnieć dwie różne sytuacje. Jeśli amplituda $u_i(\tau)$ jest mniejsza od napięcia progowego U_P, to nie ma ograniczania i układ zachowuje się tak, jak układ liniowy. Gdy amplituda $u_i(\tau)$ przekracza napięcie progowe, to $u_O(\tau)$ jest przebiegiem okresowym, w postaci sinusoidy o obciętych wierzchołkach. W obu rozważanych przypadkach można więc $u_O(\tau)$ wyrazić za pomocą takiego samego szeregu o postaci (patrz D8/5)

$$u_O(\tau) = U_{O0}+\sum_{n=1}^{\infty} U_{On}\cos n\omega_o\tau \tag{6/4}$$

lub też, po przejściu do zmiennej t

$$u_O(t) = U_{O0}+\sum_{n=1}^{\infty} U_{On}\cos\left[n\omega_o t+n\Delta\omega\int_0^t f(\vartheta)\,d\vartheta\right] \tag{6/5}$$

Jak zatem widać, od kształtu charakterystyki ogranicznika zależy tylko wartość współczynników szeregu (6/5), a jego postać nie ulega zmianie.

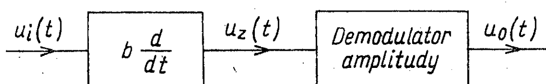
Ograniczony sygnał u_O o kształcie prostokątnym może zostać podany bezpośrednio na wejście niektórych demodulatorów. W większości przypadków musi być on jednak starannie filtrowany, dla uzyskania postaci (6/1). Trudności wiążące się z filtracją takiego sygnału i związane z tym szczegółowe ograniczenia zostały omówione w dodatku D8.

6.2 METODY DEMODULACJI

Przedstawimy teraz podstawowe metody demodulacji sygnału *FM*, pozwalające na wydzielenie z niego sygnału modulującego $f(t)$, przenoszącego informację. O sygnale poddawanym procesowi demodulacji będziemy zakładać, że jest

ograniczony, czyli że posiada stałą amplitudę. Dla zwiększenia czytelności zapisu przyjmiemy, że $u_i(t)$ oznacza sygnał ograniczony i filtrowany, tzn. o postaci (6/1), natomiast $u_{ip}(t)$ będzie oznaczać sygnał ograniczony, ale nie filtrowany, a więc mający kształt przebiegu prostokątnego.

Do najbardziej rozpowszechnionych metod demodulacji należy metoda dwuetapowa polegająca na tym, że najpierw sygnał *FM* przetwarza się na sygnał o podwójnej modulacji *AM-FM*, w którym obwiednia *AM* zmienia się proporcjonalnie do sygnału modulującego $f(t)$, a następnie dokonuje się demodulacji amplitudy za pomocą detektora synchronicznego, lub też detektora obwiedni.



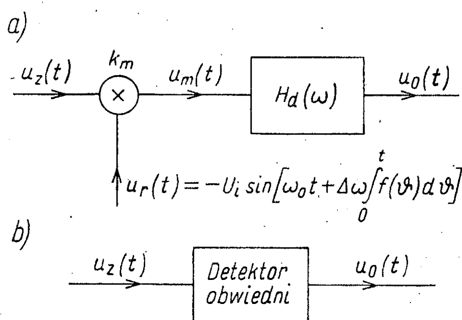
6/2 Schemat funkcjonalny demodulatora częstotliwości

Rozważmy w związku z tym układ funkcjonalny pokazany na rys. 6/2. Przyjmując, że $u_i(t)$ ma postać (6/1) na wyjściu układu różniczkującego otrzymujemy

$$u_z(t) = -bU_i[\omega_o+\Delta\omega f(t)]\sin\left[\omega_o t+\Delta\omega\int_0^t f(\vartheta)d\vartheta\right]$$

$$= -bU_i\omega_i(t)\sin\left[\omega_o t+\Delta\omega\int_0^t f(\vartheta)d\vartheta\right] \quad (6/6)$$

Operacja różniczkowania przetwarza więc sygnał *FM* w sygnał *AM-FM*, przy czym obwiednia *AM* jest, jak widać, dokładną repliką pulsacji chwilowej $\omega_i(t)$



6/3 Detekcja obwiedni sygnałów *AM-FM*: a) za pomocą detektora synchronicznego; b) za pomocą detektora obwiedni

Sygnał $u_z(t)$ podajemy następnie na *detektor synchroniczny* (rys. 6/3a), lub też na *detektor obwiedni* (rys. 6/3b).

Rozważmy najpierw detekcję synchroniczną. Jeśli jako sygnał odniesienia zastosujemy

$$u_r(t) = -U_i\sin\left[\omega_o t+\Delta\omega\int_0^t f(\vartheta)d\vartheta\right] \quad (6/7)$$

to z równań (6/6) i (6/7) wynika, że

$$u_m(t) = u_{m1}(t) - u_{m2}(t) \tag{6/8}$$

gdzie

$$u_{m1}(t) = \frac{1}{2} k_m b U_i^2 \omega_i(t) \tag{6/8a}$$

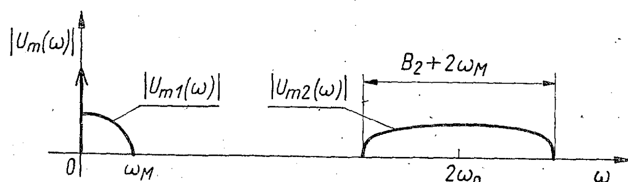
$$u_{m2}(t) = \frac{1}{2} k_m b U_i^2 \omega_i(t) \cos\left[2\omega_o t + 2\Delta\omega \int_0^t f(\vartheta)\,d\vartheta\right]$$

$$= u_{m1}(t) \cos\left[2\omega_o t + 2\Delta\omega \int_0^t f(\vartheta)\,d\vartheta\right] \tag{6/8b}$$

Gdy widma składników $u_{m1}(t)$ i $u_{m2}(t)$ są rozłączne, to sygnał $u_{m2}(t)$ o widmie skupionym wokół pulsacji $2\omega_o$ można usunąć za pomocą filtru dolnoprzepustowego i napięcie wyjściowe ma postać

$$u_O(t) = \frac{1}{2} k_m b U_i^2 \omega_i(t) * h_d(t) = \frac{1}{2} k_m b U_i^2 [\omega_o + \Delta\omega f(t)] * h_d(t) \tag{6/9}$$

gdzie $h_d(t)$ jest odpowiedzią impulsową filtru. Rozważmy zatem warunki rozłączności widm składowych sygnału $u_m(t)$. Jeśli przyjmiemy, że $f(t)$ ma widmo ograniczone do pulsacji ω_M, to widmo $u_{m1}(t)$ jest także ograniczone do ω_M. Bardziej złożona zależność występuje w przypadku $u_{m2}(t)$, który jest sygnałem o podwójnej modulacji. Jak widać z (6/8b), jest to iloczyn $u_{m1}(t)$ przez sygnał *FM* o postaci $\cos\left[2\omega_o t + 2\Delta\omega \int_0^t f(\vartheta)\,d\vartheta\right]$. Przyjmując, że sygnał *FM* zajmuje wokół pulsacji $2\omega_o$ pasmo o szerokości B_2 otrzymujemy w wyniku operacji splotowej, że widmo $u_{m2}(t)$ ma szerokość $B_2 + 2\omega_M$. Sytuację tę zilustrowano na rys. 6/4.



6/4 Rozkład widmowy zróżniczkowanego sygnału *FM*

Sposób określania pasma zajmowanego przez sygnał *FM* został omówiony w dodatku D5. Tutaj warto tylko przypomnieć, że wobec trudności z wyznaczeniem $\mathscr{F}$-transformaty takiego sygnału przyjmuje się sytuację najmniej korzystną, gdy cała energia sygnału modulującego jest skupiona na krańcu zajmowanego przez niego przedziału częstotliwości, tzn. zakłada się, iż $f(t) = \cos\omega_M t$.

Na podstawie rys. 6/4 widać więc, że widma $u_{m1}(t)$ i $u_{m2}(t)$ są rozłączne, jeśli spełniona jest nierówność

$$B_2/2+2\omega_M \leqslant 2\omega_o \tag{6/10}$$

którą można sprowadzić do równoważnej, ale wygodniejszej postaci

$$D = \frac{\Delta\omega}{\omega_o} \leqslant \frac{1}{\dfrac{1}{\beta_2}+\dfrac{B_2}{2\Delta\omega_2}} = D_{max} \tag{6/11}$$

gdzie $\beta_2 = \Delta\omega_2/\omega_M$ a $\Delta\omega_2 = 2\Delta\omega$. Sporządzając wykres $D_{max} = f(\beta)$ możemy dla każdej wartości indeksu modulacji otrzymać wartość maksymalnej dewiacji względnej D_{max}, przy której widma $u_{m1}(t)$ i $u_{m2}(t)$ nie zachodzą na siebie, a więc usunięcie $u_{m2}(t)$ za pomocą filtru jest jeszcze możliwe. Z wykresu zamieszczonego na rys. D5/10 wynika, że jeśli $\beta_2 \to \infty$, to $B_2/2\Delta\omega_2 \to 1$. Zatem dla detekcji synchronicznej prawa strona nierówności (6/11) zmierza wówczas do wartości $D_{max} = 1$.

Zauważmy tu jeszcze, że występujący w układzie funkcjonalnym z rys. 6/3a sygnał odniesienia $u_r(t)$ (lub $-u_r(t)$) można otrzymać z niezróżniczkowanego sygnału wejściowego $u_i(t)$, jeśli zastosujemy układ, który w całym przedziale częstotliwości zajętym przez widmo $u_i(t)$ wprowadzi stałe przesunięcie fazowe o wartości $\pi/2$ (lub $-\pi/2$). Trudność związaną z realizacją takiego układu można rozwiązać przez pewną modyfikację układu funkcjonalnego, o której powiemy później.

Gdy do demodulacji sygnału zróżniczkowanego $u_z(t)$ zastosujemy detektor obwiedni (rys. 6/3b), który — jak wiemy z rozdz. 4 — nie reaguje na zmiany kąta fazowego, to na jego wyjściu uzyskamy sygnał proporcjonalny tylko do zmiany amplitudy chwilowej $u_z(t)$. W przypadku detektora wartości średniej, którego układ funkcjonalny pokazano na rys. 4/10, analiza działania ulega tylko niewielkiej modyfikacji, gdyż jak łatwo zauważyć funkcja kluczująca $s_u(t)$ ma teraz postać przebiegu prostokątnego, o zmiennym w czasie okresie powtarzania. Ponieważ jednak prostownik jest z założenia układem bezinercyjnym, wprowadzenie zmiennej τ zdefiniowanej wzorem (6/2) pozwala natychmiast wykorzystać zastosowane tam ujęcie. W rezultacie otrzymujemy, że

$$u_P(t) = \frac{bU_i}{\pi}\omega_i(t)+\frac{bU_i}{2}\omega_i(t)\sin\left[\omega_o t+\Delta\omega\int_0^t f(\vartheta)\,d\vartheta\right]+$$
$$+[\text{sygnały } AM\text{-}FM \text{ o pulsacjach nośnych } 3\omega_o, 5\omega_o, \ldots] \tag{6/12}$$

Jeśli sygnały niepożądane dadzą się usunąć za pomocą filtru dolnoprzepustowego, to

$$u_O(t) = \frac{bU_i}{\pi}\omega_i(t) * h_d(t) = \frac{bU_i}{\pi}[\omega_o+\Delta\omega f(t)] * h_d(t) \tag{6/13}$$

Warunek rozłączności widm pierwszego, pożądanego składnika $u_P(t)$ oraz składnika o pulsacji środkowej ω_o ma postać

$$B_1/2+2\omega_M \leqslant \omega_o \tag{6/14}$$

lub też

$$D = \frac{\Delta\omega}{\omega_o} \leqslant \frac{1}{\dfrac{2}{\beta_1}+\dfrac{B_1}{2\Delta\omega}} = D_{max} \tag{6/15}$$

gdzie $\beta_1 = \Delta\omega/\omega_M$, a B_1 jest pasmem zajmowanym przez sygnał $\sin\left[\omega_o t + \Delta\omega\int_0^t f(\vartheta)d\vartheta\right]$. I w tym przypadku $D_{max} \to 1$, gdy $\beta_1 \to \infty$; zauważmy jednak, że rozważany teraz sygnał niepożądany ma widmo skupione wokół pulsacji ω_o, a nie $2\omega_o$, jak to miało miejsce przy detekcji synchronicznej.

Jeśli do demodulacji zastosujemy detektor wartości szczytowej, to jak pokazaliśmy w rozdz. 4, przy małym kącie przepływu θ oraz zerowej wartości napięcia progowego U_P, otrzymujemy

$$u_O(t) = bU_i[\omega_o+\Delta\omega f(t)] \tag{6/16}$$

Należy jednak przypomnieć, że w analizie tego układu wprowadziliśmy warunek, iż maksymalna pulsacja ω_M w widmie sygnału modulującego powinna być znacznie mniejsza od pulsacji ω_o przebiegu nośnego, gdyż inaczej napięcie wyjściowe byłoby zniekształcone procesem ładowania się i rozładowywania kondensatora C_o (rys. 4/19a) w filtrze dolnoprzepustowym. Obecnie mamy do czynienia z sygnałem *AM-FM*, który nie ma stałej pulsacji nośnej. Nasuwa się w związku z tym oczywisty wniosek, że nierówność taka powinna teraz dotyczyć ω_M oraz najmniejszej wartości pulsacji chwilowej $\omega_i(t)$. Zwykle przyjmuje się, że powinna zachodzić nierówność

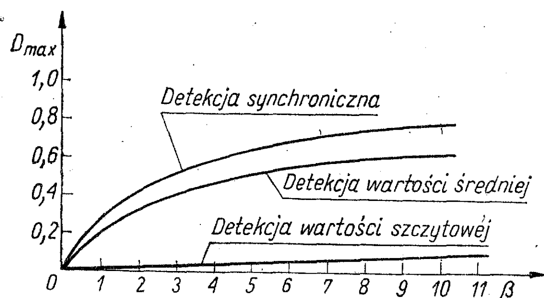
$$|\omega_i(t)|_{min} = \omega_o - \Delta\omega > 100\omega_M \tag{6/17}$$

którą można zapisać również w następującej postaci:

$$D = \frac{\Delta\omega}{\omega_o} \leqslant \frac{\beta}{100+\beta} = D_{max} \tag{6/18}$$

Także w tym przypadku $D_{max} \to 1$, gdy $\beta \to \infty$, ale krzywa $D_{max} = f(\beta)$ narasta bardzo wolno.

Dla porównania warunków (6/11), (6/15) i (6/18) naszkicowano na rys. 6/5 charakterystyczny przebieg $D_{max} = f(\beta)$ dla trzech rodzajów detektorów. Warto dodać, że omawiane ograniczenia mają znaczenie dla bardzo szerokopasmowych



6/5 Wykresy określające D_{max}, przy którym można wydzielić widmo sygnału zdemodulowanego, dla różnych rodzajów detekcji

sygnałów *FM*, gdy β może przyjmować małe wartości. W przypadkach typowych (np. transmisja sygnałów dźwiękowych w pasmie UKF) istotniejsze ograniczenia występują przy filtracji sygnału ograniczonego przed demodulacją — jak to pokazano w dodatku D8.

Do różniczkowania sygnału *FM* trzeba na ogół stosować niekonwencjonalne układy różniczkujące, z uwagi na wykorzystywane zakresy częstotliwości. Dlatego dalsze rozważania będą podyktowane częściowo sposobem wykonywania tej właśnie operacji.

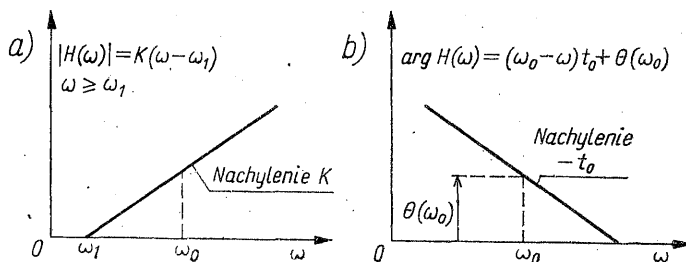
6.2.1 Demodulacja z różniczkowaniem w dziedzinie częstotliwości

Rozważmy układ o charakterystyce amplitudowo-fazowej określonej zależnością

$$H(\omega) = K|\omega-\omega_1|\,e^{j[(\omega_o-\omega)t_o+\theta(\omega_o)]} \tag{6/19}$$

Wykresy obu charakterystyk składowych podano na rys. 6/6. W dodatku D7 (p. 2) wykazano, że jeśli na wejście takiego układu przyłożymy napięcie $u_i(t)$ o postaci (6/1), to odpowiedź $u_z(t)$ będzie określona wzorem

$$u_z(t) = U_i|H[\omega_i(t-t_o)]|\cos\left[\omega_o t+\Delta\omega\int_0^{t-t_o} f(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta+\theta(\omega_o)\right] \tag{6/20}$$



6/6 Charakterystyki układu różniczkującego w dziedzinie częstotliwości

W przypadku, gdy maksymalna pulsacja ω_M w widmie sygnału modulującego $f(t)$ spełnia nierówność

$$\omega_M \ll \frac{1}{t_o} \tag{6/21}$$

wyrażenie (6/19) upraszcza się do postaci

$$u_z(t) = U_i|H[\omega_i(t)]|\cos\left[\omega_o t+\Delta\omega\int_0^{t} f(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta+\theta(\omega_o)\right] \tag{6/22}$$

Przyjmijmy $\theta(\omega_o) = \pm\pi/2$. Wówczas zamiast równania (6/22) otrzymujemy

$$u_z(t) = \mp U_i|H[\omega_i(t)]|\sin\left[\omega_o t+\Delta\omega\int_0^{t} f(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\right] \tag{6/23}$$

gdzie

$$|H[\omega_i(t)]| = K|\omega_i(t)-\omega_1| \tag{6/24}$$

Z porównania równania (6/23) z (6/6) widać, że $u_z(t)$ określone wzorem (6/23) ma postać pochodnej sygnału wejściowego $u_i(t)$. Z uwagi na to, że forma wyrażenia (6/23) jest wynikiem specyficznego kształtu $H(\omega)$ mówimy, że układ o takiej charakterystyce dokonuje *różniczkowania w dziedzinie częstotliwości.*

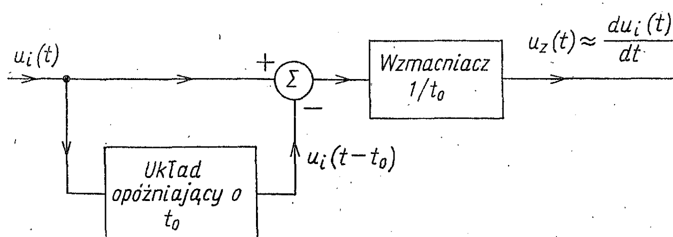
W dodatku D7 wykazano również, że jeśli charakterystyki amplitudowa i fazowa są dokładnie liniowe, to wynik (6/20) jest słuszny przy dowolnie szybkich zmianach pulsacji chwilowej $\omega_i(t)$. W praktyce charakterystyki z rys. 6/6 można przybliżyć tylko w dość ograniczonym przedziale częstotliwości ze skończoną dokładnością. Powoduje to, że odpowiedź układu określona wzorem (6/22) jest poprawna jedynie wówczas, gdy szybkość zmian $\omega_i(t)$ nie jest zbyt duża. Stosowny warunek ograniczający tę szybkość został wyprowadzony w dodatku D7 (p. 1) i ma postać (D7/18). Będziemy z niego korzystać przy omawianiu rozwiązań szczegółowych. Tutaj dodamy tylko, że charakterystykę z rys. 6/6 przybliża się najczęściej za pomocą prostych obwodów rezonansowych, wykorzystując w tym celu zbocze krzywej rezonansowej. Sygnał zróżniczkowany jest podawany z reguły na detektor obwiedni.

6.2.2 Demodulacja z różniczkowaniem w dziedzinie czasu

Z definicji pochodnej wynika, że przybliżone różniczkowanie sygnału $u_i(t)$ można wykonać przeprowadzając operację

$$\frac{u_i(t)-u_i(t-t_0)}{t_0} = u_z(t) \approx \frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t} \tag{6/25}$$

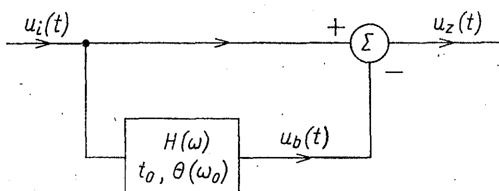
zilustrowaną układem funkcjonalnym na rys. 6/7, przy czym, aby otrzymać odpowiednią dokładność, maksymalna wartość opóźnienia t_0 musi być dobrana stosownie do szybkości zmian $u_i(t)$.



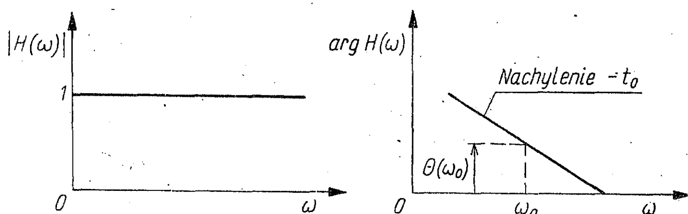
6/7 Schemat funkcjonalny układu różniczkującego w dziedzinie czasu

W celu określenia ograniczeń na t_0 przeprowadzimy analizę układu nieco ogólniejszego, który został podany na rys. 6/8. Układ liniowy o charakterystyce pokazanej na rys. 6/9 jest pasmowym układem opóźniającym i jak pokazaliśmy w dodatku D7, jego odpowiedź na sygnał o postaci (6/1) jest następująca:

$$u_b(t) = U_i \cos\left[\omega_0 t + \Delta\omega \int\limits_0^{t-t_0} f(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta + \theta(\omega_0)\right] \tag{6/26}$$



6/8 Różniczkowanie w dziedzinie czasu z zastosowaniem pasmowego układu opóźniającego



6/9 Charakterystyki częstotliwościowe pasmowego układu opóźniającego

W związku z tym sygnał wyjściowy dany jest wzorem

$$u_z(t) = U_i\cos\left[\omega_o t+\Delta\omega\int\limits_0^t f(\vartheta)\,d\vartheta\right]-U_i\cos\left[\omega_o t+\Delta\omega\int\limits_0^{t-t_o} f(\vartheta)\,d\vartheta+\theta(\omega_o)\right] \tag{6/27}$$

który po prostych przekształceniach trygonometrycznych można sprowadzić do postaci

$$u_z(t) = -a(t)\sin\left[\omega_o t+\Delta\omega\int\limits_0^t f(\vartheta)\,d\vartheta-\frac{\Delta\omega}{2}\int\limits_{t-t_o}^t f(\vartheta)\,d\vartheta+\frac{\theta(\omega_o)}{2}\right] \tag{6/28}$$

gdzie

$$a(t) = 2U_i\sin\left[\frac{\Delta\omega}{2}\int\limits_{t-t_o}^t f(\vartheta)\,d\vartheta-\frac{\theta(\omega_o)}{2}\right] \tag{6/29}$$

Z równania (6/28) widać, że $u_z(t)$ jest sygnałem o podwójnej modulacji *AM-FM*, jednakże jego obwiednia $a(t)$ zależy od $f(t)$ w sposób nieliniowy. Zbadajmy więc, jak należy dobrać opóźnienie t_o, aby zależność ta stała się liniowa.

Wprowadźmy dla wygody oznaczenie

$$g(t) = \frac{\Delta\omega}{2}\int\limits_{t-t_o}^t f(\vartheta)\,d\vartheta = \frac{\Delta\omega}{2}\int\limits_0^t f(\vartheta)\,d\vartheta-\frac{\Delta\omega}{2}\int\limits_0^{t-t_o} f(\vartheta)\,d\vartheta \tag{6/30}$$

Wyznaczając $\mathscr{F}$-transformatę (6/30) otrzymujemy

$$G(\omega) = \frac{\Delta\omega}{2}F(\omega)\frac{1}{j\omega}(1-e^{-j\omega t_o}) = F(\omega)e^{-j\frac{\omega t_o}{2}}\frac{\Delta\omega t_o}{2}\frac{\sin(\omega t_o/2)}{\omega t_o/2}$$

$$= F(\omega)\,H_D(\omega) \tag{6/31}$$

gdzie $G(\omega)$ i $F(\omega)$ oznaczają transformaty $g(t)$ i $f(t)$, a $H_D(\omega)$ ma postać następującą:

$$H_D(\omega) = e^{-j\frac{\omega t_o}{2}} \frac{\Delta\omega t_o}{2} \frac{\sin(\omega t_0/2)}{\omega t_o/2} \tag{6/32}$$

Wykresy modułu i fazy $H_D(\omega)$ w interesującym nas przedziale $(0, 2\pi/t_o)$ pokazano na rys. 6/10. Jak widać, można w przybliżeniu przyjąć, że dla $\omega < 2/t_o \, |H_D(\omega)| = \Delta\omega t_o/2 = \text{const}$. Jeśli więc widmo sygnału modulującego $f(t)$ jest ograniczone do pulsacji ω_M i jest spełniona nierówność

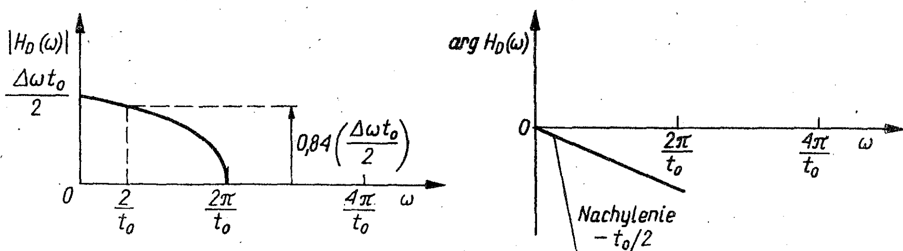
$$t_o < \frac{2}{\omega_M} \tag{6/33}$$

to $G(\omega)$ określoną zależnością (6/31) można przybliżyć wyrażeniem

$$G(\omega) = F(\omega)H_D(\omega) \approx F(\omega)\frac{\Delta\omega t_o}{2}e^{-j\frac{\omega t_o}{2}} \tag{6/34}$$

które po wykonaniu transformacji odwrotnej przyjmie postać

$$g(t) = \frac{\Delta\omega t_o}{2} f\left(t - \frac{t_o}{2}\right) \tag{6/35}$$



6/10 Wykresy modułu i fazy funkcji $H_D(\omega)$

Zamiast równania (6/29) możemy więc napisać

$$a(t) = 2U_i \sin\left[\frac{\Delta\omega t_o}{2} f\left(t - \frac{t_o}{2}\right) - \frac{\theta(\omega_o)}{2}\right] \tag{6/36}$$

Zapiszmy (6/36) w następujący sposób:

$$a(t) = 2U_i \sin g(t) \cos\frac{\theta(\omega_o)}{2} - 2U_i \cos g(t) \sin\frac{\theta(\omega_o)}{2} \tag{6/37}$$

Gdy $|g(t)|_{\max} < 0{,}2$, to można przyjąć, że $\cos g(t) \approx 1$, a $\sin g(t) \approx g(t)$ i zamiast (6/37) otrzymujemy

$$a(t) = 2U_i g(t) \cos\frac{\theta(\omega_o)}{2} - 2U_i \sin\frac{\theta(\omega_o)}{2} =$$

$$= U_i \Delta\omega t_o f\left(t - \frac{t_o}{2}\right) \cos\frac{\theta(\omega_o)}{2} - 2U_i \sin\frac{\theta(\omega_o)}{2} \tag{6/38}$$

Wobec faktu, że sygnał $f(t)$ jest unormowany, tzn. $|f(t)|_{max} = 1$, warunek $|g(t)|_{max} < 0{,}2$ oznacza, iż t_o musi spełniać nierówność

$$t_o < 0{,}4/\Delta\omega \tag{6/39}$$

Należy zauważyć, że dla uzyskania liniowej zależności pomiędzy obwiednią $a(t)$ i sygnałem modulującym $f(t)$, muszą zostać spełnione równocześnie warunki (6/33) oraz (6/39). Łatwo zauważyć, że dla $\beta = \Delta\omega/\omega_M > 0{,}2$ nierówność (6/39) jest ostrzejsza, niż (6/33).

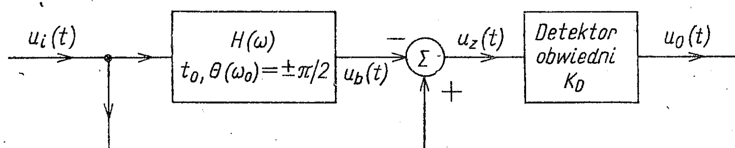
Do ustalenia pozostała jeszcze wartość $\theta(\omega_o)$. Jeżeli $u_z(t)$ jest podawane dalej na detektor obwiedni, którego odpowiedź jest proporcjonalna do $|a(t)|$, to dla uniknięcia dużych zniekształceń, $a(t)$ musi być dla każdej chwili czasu dodatnia, lub też ujemna (patrz rozdz. 4). Można pokazać, że będzie tak wówczas, gdy $|\theta(\omega_o)| > 22{,}7°$. W praktyce przyjmuje się zwykle jedną z wartości $\theta(\omega_o) = \pm\pi/2$, co daje zamiast (6/38) następującą zależność:

$$a(t) = \mp\sqrt{2}U_i\left[1 \mp \frac{\Delta\omega t_o}{2} f\left(t - \frac{t_o}{2}\right)\right] \tag{6/40}$$

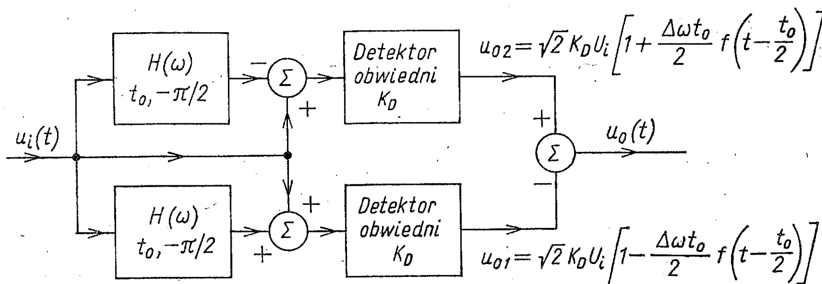
Wprowadzając do układu z rys. 6/8 detektor obwiedni otrzymamy schemat funkcjonalny podany na rys. 6/11. Napięcie

$$u_O(t) = K_D|a(t)| = \sqrt{2}K_D U_i\left[1 \mp \frac{\Delta\omega t_o}{2} f\left(t - \frac{t_o}{2}\right)\right] \tag{6/41}$$

przy czym dla idealnego detektora wartości średniej $K_D = 1/\pi$, a dla idealnego detektora szczytowego $K_D = 1$. Występującą w (6/41) składową stałą $u_O(t)$



6/11 Demodulacja z różniczkowaniem w dziedzinie czasu i detekcją obwiedni; układ podstawowy



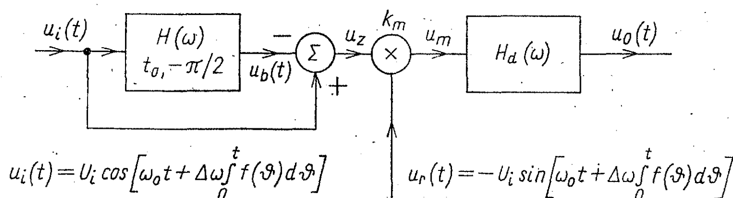
6/12 Demodulacja z różniczkowaniem w dziedzinie czasu i detekcją obwiedni; układ zrównoważony

można usunąć przez zastosowanie układu zrównoważonego, którego jedną z możliwych wersji pokazano na rys. 6/12. Łatwo sprawdzić, że teraz

$$u_O(t) = \sqrt{2}K_D U_i \Delta\omega t_o f\left(t - \frac{t_o}{2}\right) \tag{6/42}$$

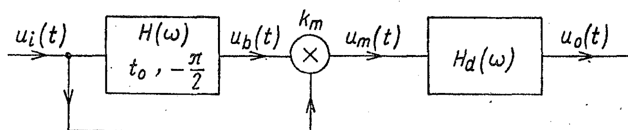
a więc poza eliminacją składowej stałej uzyskuje się także dwukrotny wzrost amplitudy sygnału wyjściowego.

Przyjmijmy teraz, że w układzie z rys. 6/11 zamiast detektora obwiedni został zastosowany detektor synchroniczny. Przypadek ten przedstawiono na rys. 6/13. Napięcie $u_z(t)$ było już wyznaczone poprzednio i ma postać (6/27). Zau-



6/13 Demodulacja z różniczkowaniem w dziedzinie czasu i detekcją synchroniczną

ważmy, że w wyniku operacji mnożenia $u_z(t)$ przez sygnał odniesienia $u_r(t)$ pierwszy wyraz $u_z(t)$ daje tylko składnik o pulsacji nośnej $2\omega_o$, który zostanie usunięty przez filtr dolnoprzepustowy. Wynika stąd oczywisty wniosek, że operacja sumowania sygnału wejściowego $u_i(t)$ i sygnału opóźnionego $u_b(t)$ jest całkowicie zbędna, gdyż dokładnie ten sam efekt otrzymamy w układzie prostszym, pokazanym na rys. 6/14.



6/14 Inna wersja układu z rys. 6/13

Przeprowadźmy analizę tego układu. Ponieważ założyliśmy, że $\theta(\omega_o) = -\pi/2$, więc na podstawie (6/26) możemy napisać, że

$$u_b(t) = -U_i \sin\left[\omega_o t + \Delta\omega \int_0^{t-t_o} f(\vartheta)\,d\vartheta\right] \tag{6/43}$$

Zatem sygnał $u_m(t)$ wyraża się wzorem

$$u_m(t) = k_m u_i(t) u_b(t) =$$

$$= -k_m U_i^2 \cos\left[\omega_o t + \Delta\omega \int_0^t f(\vartheta)\,d\vartheta\right] \cdot \sin\left[\omega_o t + \Delta\omega \int_0^{t-t_o} f(\vartheta)\,d\vartheta\right] \tag{6/44}$$

który można przekształcić do postaci

$$u_m(t) = u_{m1}(t) + u_{m2}(t) \tag{6/45}$$

gdzie

$$u_{m1}(t) = -\frac{1}{2}k_m U_i^2 \sin\left[\Delta\omega \int_{t-t_o}^{t} f(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\right] \tag{6/45a}$$

$$u_{m2}(t) = -\frac{1}{2}k_m U_i^2 \sin\left[2\omega_o t + 2\Delta\omega \int_{0}^{t} f(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta - \Delta\omega \int_{t-t_o}^{t} f(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\right]. \tag{6/45b}$$

Jak widać, składnik $u_{m2}(t)$ ma widmo skupione wokół pulsacji $2\omega_o$ i zostanie wyeliminowany przez filtr dolnoprzepustowy. Interesujący nas składnik $u_{m1}(t)$ zależy nieliniowo od sygnału modulującego $f(t)$ i ma postać analogiczną do (6/29) z tym, że jego argument wynosi $2g(t)$, gdzie $g(t)$ jest określone wzorem (6/30). Jeśli więc uwzględnimy istnienie mnożnika 2, to na podstawie poprzednich rozważań otrzymamy, że przy spełnieniu nierówności

$$t_o < \frac{2}{\omega_M} \quad \text{oraz} \quad t_o < \frac{0{,}2}{\Delta\omega} \tag{6/46}$$

sygnał $u_{m1}(t)$ przyjmuje postać

$$u_{m1}(t) = -\frac{1}{2}k_m U_i^2 \Delta\omega t_o f\left(t - \frac{t_o}{2}\right) \tag{6/47}$$

natomiast sygnał wyjściowy wyrazi się wzorem

$$u_O(t) = -\frac{1}{2}k_m U_i^2 \Delta\omega t_o f\left(t - \frac{t_o}{2}\right) * h_d(t) \tag{6/48}$$

lub też gdy charakterystyka filtru w przedziale, który zajmuje widmo $f(t)$ jest płaska i równa $H_d(0)$, zależnością

$$u_O(t) = -\frac{1}{2}k_m U_i^2 H_d(0)\Delta\omega t_o f\left(t - \frac{t_o}{2}\right) \tag{6/49}$$

Zauważmy, że warunek $t_o < 0{,}2/\Delta\omega$ otrzymany dla analizowanego układu jest nieco ostrzejszy, niż nierówność (6/39) uzyskana dla układu z rys. 6/11. Porównanie innych rezultatów wskazuje jednak, że układ z rys. 6/14 ma niewątpliwe zalety. Zaliczyć do nich można przede wszystkim tę, że napięcie wyjściowe nie posiada składowej stałej, a więc nie ma potrzeby stosowania układów zrównoważonych. Ponadto, jak łatwo sprawdzić, sygnał $u_b(t)$ można ograniczyć usuwając ewentualną modulację amplitudy wprowadzaną przez konwersję *FM/AM* w układzie opóźniającym, bez naruszania warunków poprawnej pracy demodulatora. Śledząc przekształcenia (6/43)...(6/45) nietrudno również dojść do wniosku, że wskutek braku sumatora, charakterystyka amplitudowa układu opóźniającego nie musi być równa 1, jak to pokazano na rys. 6/9, ale może mieć dowolną wartość stałą.

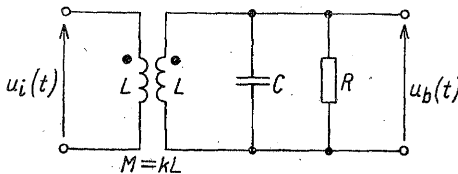
Z przeprowadzonej analizy wynika, że w demodulatorach częstotliwości w których wykorzystuje się różniczkowanie w dziedzinie czasu istotną rolę odgrywa układ opóźniający. Do bardzo często stosowanych należy prosty układ transformatorowy podany na rys. 6/15. Można pokazać, że transmitancja napięciowa tego obwodu wyraża się wzorem

$$H(s) = \frac{U_b(s)}{U_i(s)} = \frac{k\omega_o^2}{s^2+2\alpha s+\omega_o^2} \tag{6/50a}$$

gdzie

$$k = \frac{M}{L}; \qquad \omega_o = \frac{1}{\sqrt{(1-k^2)LC}} \tag{6/50b}$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$



6/15 Pasmowy układ opóźniający

Dla $Q = \omega_o RC > 10$ charakterystykę częstotliwościową układu można przybliżyć wyrażeniem

$$H(\omega) = \frac{kQ\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}}{1+\mathrm{j}\dfrac{\omega-\omega_o}{\alpha}} = \frac{kQ}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega-\omega_o}{\alpha}\right)^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left[\operatorname{arctg}\frac{\omega-\omega_o}{\alpha}+\frac{\pi}{2}\right]} \tag{6/51}$$

Jeśli ponadto spełniona zostanie nierówność

$$\left|\frac{\omega-\omega_o}{\alpha}\right| \leqslant 0{,}2 \tag{6/52}$$

to z małym błędem można przyjąć, że

$$\sqrt{1+\left(\frac{\omega-\omega_o}{\alpha}\right)^2} \approx 1 \text{ oraz } \operatorname{arctg}\frac{\omega-\omega_o}{\alpha} \approx \frac{\omega-\omega_o}{\alpha} \tag{6/53}$$

i (6/51) sprowadza się do postaci

$$H(\omega) = kQ\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left[(\omega-\omega_o)t_o+\frac{\pi}{2}\right]} \tag{6/54}$$

gdzie

$$t_o = 1/\alpha = 2RC \tag{6/55}$$

Dobierając współczynnik sprzężenia k i dobroć obwodu Q tak, aby

$$kQ = 1 \tag{6/56}$$

otrzymujemy w przedziale częstotliwości określonym nierównością (6/52) taki

przebieg charakterystyki amplitudowej i fazowej, jak na rys. 6/9 z tym, że $\theta(\omega_0) = -\pi/2$.

Zauważmy, że jeśli $u_i(t)$ jest sygnałem *FM* zajmującym wokół pulsacji ω_0 pasmo o szerokości B, to dla prawidłowego działania układu pasmo to musi leżeć wewnątrz przedziału częstotliwości, w którym $H(\omega)$ ma pożądany kształt, określonego nierównością (6/52). Możemy to zapisać w postaci warunku

$$\frac{B}{2\alpha} = \frac{B}{2}t_0 \leqslant 0{,}2 \tag{6/57}$$

z którego wynika, że dla układu z rys. 6/15 musi zachodzić nierówność

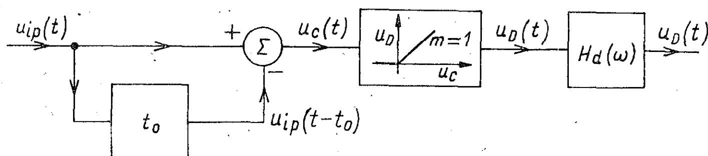
$$t_0 \leqslant 0{,}4/B \tag{6/58}$$

gwarantująca jego poprawne działanie, jako układu opóźniającego. Ponieważ zawsze $B > 2\Delta\omega$ (patrz rys. D5/10) więc widać, że warunek (6/58) jest ostrzejszy, niż (6/39), uzyskany dla idealnego pasmowego układu opóźniającego. W przypadku zastosowania omawianego obwodu w układzie z rys. 6/14, należy także zastąpić nierówność (6/46) warunkiem

$$t_0 \leqslant 0{,}2/B \tag{6/59}$$

6.2.3 Demodulacja z wykorzystaniem zliczania impulsów

Jak wspominaliśmy w p. 6.1 do demodulacji można również wykorzystać sygnał ograniczony, ale nie filtrowany, tzn. o postaci fali prostokątnej. Omówimy więc teraz zasadę działania takiego demodulatora, wykorzystując schemat funkcjonalny podany na rys. 6/16. Zawiera on idealny układ opóźniający (tzn. układ o charakterystykach $|H(\omega)| = 1$ i $\arg H(\omega) = -t_0\omega$), sumator, idealny prostownik jedno-

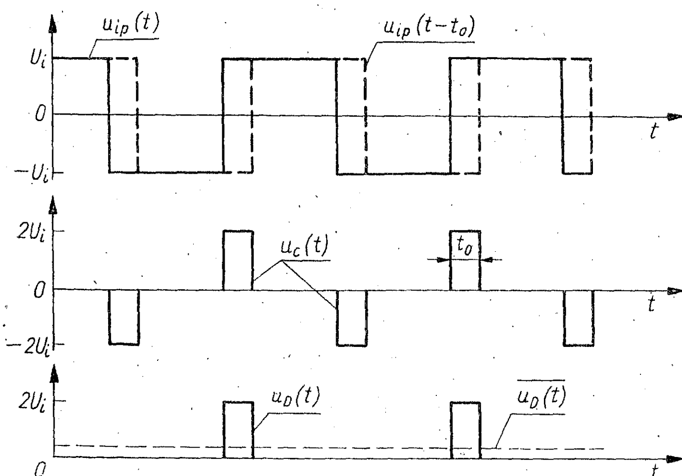


6/16 Demodulacja z wykorzystaniem zliczania impulsów

połówkowy oraz filtr dolnoprzepustowy. Przyjmijmy najpierw, że $u_{ip}(t)$ jest sygnałem prostokątnym o stałym okresie powtarzania, czyli $\omega_i(t) = \omega$. Na rysunku 6/17 pokazano, jaka jest w tym przypadku postać sygnałów w kolejnych węzłach układu funkcjonalnego. Jak widać, na filtr dolnoprzepustowy jest podawany okresowy ciąg impulsów prostokątnych o amplitudach $2U_i$ i czasie trwania t_0. Filtr dolnoprzepustowy przeniesie tylko wartość średnią tego sygnału za okres $T = 2\pi/\omega$, czyli na jego wyjściu otrzymamy

$$\overline{u_O(t)} = \frac{U_i t_0 \omega}{\pi} H_d(0) = \overline{u_D(t)} H_d(0) \tag{6/60}$$

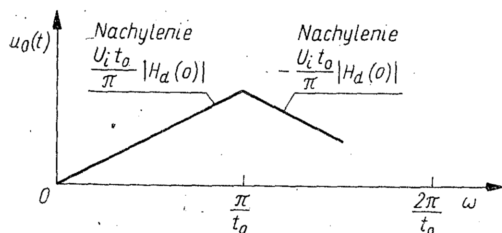
gdzie $H_d(0)$ jest wartością $H_d(\omega)$ dla pobudzeń stałych. Jak łatwo zauważyć



6/17 Przebiegi czasowe sygnałów w układzie z rys. 6/16

(rys. 6/17) dla $t_o \leqslant T/2 = \pi/\omega$, $\overline{u_O(t)}$ rośnie liniowo ze wzrostem ω, natomiast dla $\pi/\omega < t_o < T = 2\pi/\omega$ — maleje liniowo z tym samym nachyleniem, co pokazano na rys. 6/18.

Jeśli teraz przyjmiemy, że $u_{ip}(t)$ jest sygnałem *FM*, to częstotliwość powtarzania impulsów, z których składa się $u_D(t)$, będzie ulegać zmianie w takt zmian ω_i, a w konsekwencji zmieniać się będzie także wartość średnia $\overline{u_D(t)}$. Jeśli szybkość



6/18 Charakterystyka statyczna demodulatora z rys. 6/16

zmian $\omega_i(t)$ nie będzie zbyt duża, to zależność $u_O(t)$ od $\omega_i(t)$ powinna być liniowa, czyli taka jak na rys. 6/18. Aby zmiany $\overline{u_O(t)}$ ograniczały się do narastającej części charakterystyki musi być teraz spełniona nierówność

$$t_o \leqslant \frac{\pi}{[\omega_i(t)]_{\max}} = \frac{\pi}{\omega_o + \Delta\omega} \tag{6/61}$$

Analiza wpływu szybkości zmian $\omega_i(t)$ na charakterystykę omawianego układu pozwala ustalić, że liniowa zależność $u_O(t)$ od $\omega_i(t)$ występuje wówczas, gdy

$$t_o < \frac{2}{\omega_M} \tag{6/62}$$

gdzie ω_M jest maksymalną pulsacją w widmie sygnału modulującego. Ponieważ

jednak w zdecydowanej większości zastosowań praktycznych $\omega_o \gg \omega_M$, o poprawnej pracy demodulatora impulsowego decyduje spełnienie nierówności (6/61). Przyjmując więc, że warunek ten jest spełniony możemy $u_O(t)$ wyrazić w następujący sposób:

$$u_O(t) = \frac{U_i t_o}{\pi} \omega_i(t) * h_d(t) = \frac{U_i t_o}{\pi} [\omega_o + \Delta\omega f(t)] * h_d(t) \qquad (6/63)$$

Zauważmy, że ponieważ od t_o zależy amplituda sygnału wyjściowego, nie należy t_o nadawać wartości mniejszej, niż to jest konieczne.

6.3 PRZYKŁADY ROZWIĄZAŃ UKŁADOWYCH

Przejdziemy teraz do omówienia wybranych rozwiązań układowych. Na ich przykładzie pokażemy, między innymi, użyteczność analizowanych poprzednio układów funkcjonalnych oraz uzyskanych na tej drodze wyników końcowych.

6.3.1 Demodulator z wykorzystaniem nachylenia charakterystyk obwodów rezonansowych

Demodulator pracujący w układzie podanym na rys. 6/19a stanowi przykład rozwiązania, w którym wykorzystuje się różniczkowanie w dziedzinie częstotliwości. Pulsacje obwodów rezonansowych ω_{r1} i ω_{r2} są przesunięte względem pulsacji środkowej sygnału $u_i(t)$ w taki sposób (rys. 6/19b), aby zmiany $\omega_i(t)$ mieściły się w przedziale, w którym charakterystyki obwodów mają w przybliżeniu przebieg liniowy. Jak zobaczymy, dodatkowe zwiększenie zakresu liniowości daje zastosowanie układu zrównoważonego. Sygnał zróżniczkowany jest podawany następnie na detektor wartości średniej, którego analizę przeprowadziliśmy w p. 4.2.1.

Prądy i_1 oraz i_2 można wyznaczyć posługując się zależnością (6/22). Ponieważ jednak detektor obwiedni jest niewrażliwy na zmiany kąta fazowego, będą nas interesować tylko amplitudy chwilowe tych prądów $I_1(t)$ oraz $I_2(t)$. Przyjmując, że $u_i(t)$ jest sygnałem ograniczonym, który został poddany filtracji, możemy napisać, iż

$$u_i(t) = U_i \cos\left[\omega_o t + \Delta\omega \int_0^t f(\vartheta)\,d\vartheta\right] \qquad (6/64)$$

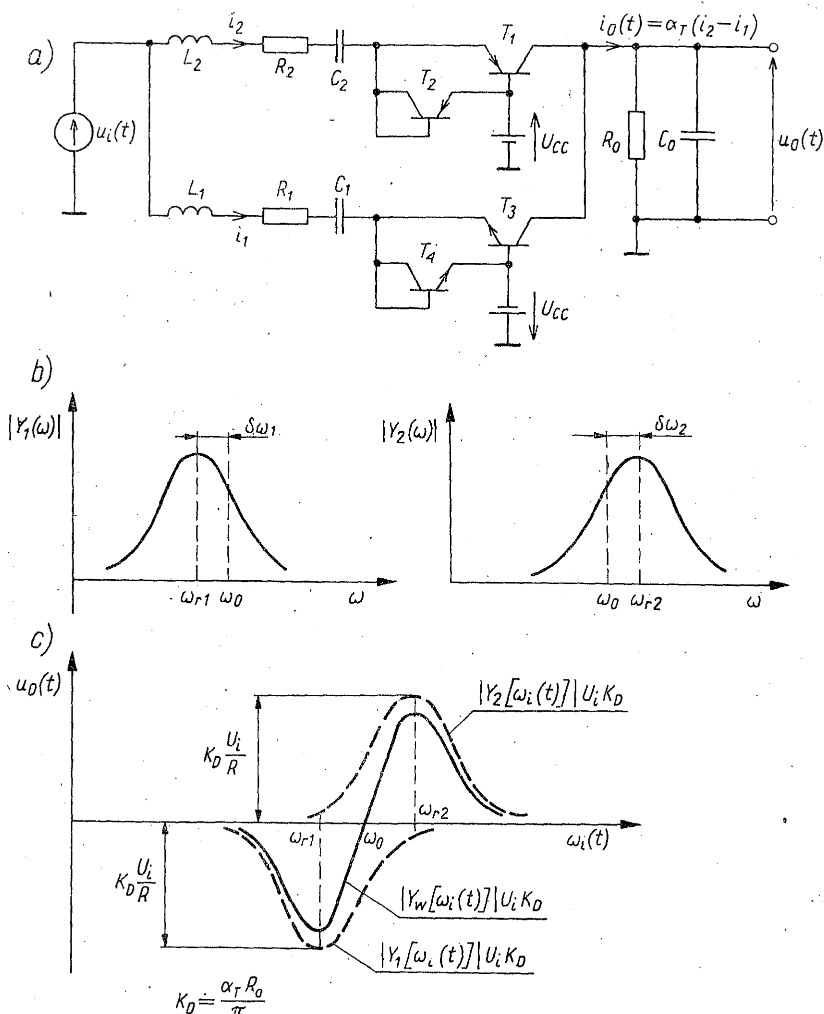
W związku z tym, zgodnie z równaniem (6/22) otrzymujemy:

$$I_1(t) = U_i|Y_1[\omega_i(t)]| = U_i|Y_1[\omega_o + \Delta\omega f(t)]| \qquad (6/65)$$

$$I_2(t) = U_i|Y_2[\omega_i(t)]| = U_i|Y_2[\omega_o + \Delta\omega f(t)]| \qquad (6/66)$$

Napięcie $u_O(t)$ możemy wyznaczyć na podstawie wyprowadzonej poprzednio dla detektora wartości średniej zależności (4/73). Jeśli przyjmiemy, że napięcie progowe $U_P = 0$, to otrzymamy

$$u_O(t) = \frac{\alpha_T R_o}{\pi} \{|I_2(t)| - |I_1(t)|\} = \frac{\alpha_T R_o}{\pi} U_i|Y_W[\omega_i(t)]| \qquad (6/67)$$



6/19 Demodulator, w którym jest wykorzystywana część liniowa charakterystyk obwodów rezonansowych: a) układ demodulatora; b) charakterystyki obwodów; c) charakterystyka wynikowa

gdzie

$$|Y_W[\omega_i(t)]| = |Y_2[\omega_i(t)]| - |Y_1[\omega_i(t)]| \tag{6/68}$$

Wykres zależności u_O od pulsacji ω_i pokazano na rys. 6/19c. Porównanie charakterystyk pojedynczych obwodów z charakterystyką wynikową z rys. 6/19c wyjaśnia wpływ zrównoważenia układu zarówno na sam przebieg, jak i zakres liniowości charakterystyki wynikowej. Gdy parametry obwodów zostaną właściwie dobrane, to charakterystyka wynikowa ma symetrię nieparzystą, a więc można ją rozwinąć w szereg potęgowy o postaci

$$|Y_W(\omega)| = |Y_W(\omega)|'(\omega-\omega_o) + |Y_W(\omega)|'''\frac{(\omega-\omega_o)^3}{3!} + \ldots \tag{6/69}$$

Jeśli okaże się, że będzie można tak dobrać warunki, iż $|Y_W(\omega)|''' = 0$ dla $\omega = \omega_o$, to pierwszym wyrazem, który wprowadzi zniekształcenia nieliniowe będzie wyraz zawierający piątą pochodną $|Y_W(\omega)|$. Zauważmy ponadto, że równość $|Y_W(\omega_o)| = 0$ gwarantuje, iż dla $\omega_i(t) = \omega_o$ dostajemy $u_O(t) = 0$, a więc napięcie wyjściowe nie zawiera składowej stałej.

Dla dokładniejszego zbadania wpływu parametrów obwodów na charakterystykę wynikową przyjmiemy, że dla $Q > 10$ admitancję każdego z obwodów można przybliżyć zależnością

$$Y(\omega) = \frac{G}{1+j\dfrac{\omega-\omega_r}{\alpha}} \tag{6/70}$$

gdzie $G = 1/R$. Otrzymujemy stąd, że

$$|Y_W(\omega)| = \frac{G_2}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega-\omega_{r2}}{\alpha_2}\right)^2}} - \frac{G_1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega-\omega_{r1}}{\alpha_1}\right)^2}} \tag{6/71}$$

przy czym

$$\begin{aligned} \omega_{r1} &= \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}; \quad \omega_{r2} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2G_1 L_1}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{2G_2 L_2} \end{aligned} \tag{6/72}$$

Nieparzystą symetrię $|Y_W(\omega)|$ względem ω_o otrzymuje się przez spełnienie następujących warunków: $G_1 = G_2 = G$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ oraz $\omega_{r1} = \omega_o - \delta\omega$ i $\omega_{r2} = \omega_o + \delta\omega$. Jeśli ponadto odstrojenie każdego z obwodów zostanie tak dobrane, że

$$\delta\omega = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\alpha \tag{6/73}$$

to

$$|Y_W(\omega)|''' = 0 \tag{6/74}$$

Przy spełnieniu wszystkich wymienionych warunków rozwinięcie potęgowe (6/69) sprowadza się do postaci

$$|Y_W(\omega)| = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}\,G\left[\frac{\omega-\omega_o}{\alpha} - \frac{54}{625}\left(\frac{\omega-\omega_o}{\alpha}\right)^5 + \dots\right] \tag{6/75}$$

Po podstawieniu $\omega-\omega_o = \Delta\omega f(t)$ i wykorzystaniu zależności (6/67) otrzymujemy ostatecznie, że

$$u_O(t) = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}\,\frac{\alpha_T R_o}{R}\,U_i\left[\frac{\Delta\omega f(t)}{\alpha} - \frac{54}{625}\left(\frac{\Delta\omega f(t)}{\alpha}\right)^5 + \dots\right] \tag{6/76}$$

Jak widać z równania (6/76) dla uzyskania liniowej zależności pomiędzy $u_O(t)$ i $f(t)$, wyraz zawierający piątą potęgę $f(t)$ powinien być pomijalnie mały w porównaniu z wyrazem liniowym. Ponieważ $|f(t)|_{max} = 1$, więc ustalenie dopusz-

czalnego poziomu zniekształceń nieliniowych wprowadzi ograniczenie na stosunek $\Delta\omega/\alpha$. Do sprawy tej powrócimy nieco później, po zbadaniu ograniczeń, jakie wynikną z uwzględnienia szybkości zmian pulsacji chwilowej $\omega_i(t)$.

W rozważaniach przeprowadzonych w p. 6.2.1 podkreślaliśmy, że zależności (6/20) czy (6/22), na podstawie których napisaliśmy równości (6/65) i (6/66), są dokładne tylko wówczas, gdy charakterystyki częstotliwościowe układu różniczkującego są idealnie liniowe[1]. Jeśli tak nie jest, to jak pokazaliśmy w dodatku D7 można z nich wciąż korzystać, gdy spełniona jest nierówność (D7/18), którą dla omawianego przypadku wygodniej jest napisać w postaci

$$\frac{1}{2}\left|\frac{d\omega_i(t)}{dt}\right|_{max}\left|\frac{\dfrac{d^2Y(\omega)}{d\omega^2}}{Y(\omega)}\right|_{max} \leqslant 1 \qquad (6/77)$$

Przyjmijmy w przybliżeniu, że o maksymalnej szybkości zmian $\omega_i(t)$ decyduje przebieg o pulsacji ω_M, gdzie ω_M jest graniczną pulsacją w widmie sygnału modulującego $f(t)$. Jeśli więc $f(t) = \cos\omega_M t$, to $\omega_i(t) = \omega_0 + \Delta\omega\cos\omega_M t$, a stąd otrzymujemy

$$\left|\frac{d\omega_i(t)}{dt}\right|_{max} = |-\Delta\omega\omega_M\sin\omega_M t|_{max} = \Delta\omega\omega_M \qquad (6/78)$$

Ponieważ założyliśmy, że $Y(\omega)$ można aproksymować wzorem (6/70), więc

$$\frac{d^2Y(\omega)}{d\omega^2} = \frac{-2G}{\alpha^2\left(1+j\dfrac{\omega-\omega_r}{\alpha}\right)^3} \qquad (6/79)$$

Jeżeli przyjmiemy najbardziej niekorzystną sytuację, gdy $\omega_0 = \omega_r$, to

$$\left|\frac{\dfrac{d^2Y(\omega)}{d\omega^2}}{Y(\omega)}\right|_{max} = \frac{2}{\alpha^2} \qquad (6/80)$$

Podstawiając równania (6/78) i (6/80) do (6/77) otrzymujemy

$$\frac{\Delta\omega\omega_M}{\alpha^2} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\Delta\omega}{\alpha}\right)^2 \leqslant 1 \qquad (6/81)$$

gdzie

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_M} \qquad (6/82)$$

Jeśli przykładowo, nierówność silną (6/81) zastąpimy przez

$$\frac{1}{\beta}\left(\frac{\Delta\omega}{\alpha}\right)^2 \leqslant 0{,}05 \qquad (6/83)$$

---

[1] Warto zauważyć, że do tej klasy układów można również zaliczyć przypadek, gdy $|H(\omega)|$ jest liniowa — jak na rys. 6/6a — natomiast $\arg H(\omega) = \text{const}$, czyli $t_0 = 0$.

to dla sytuacji typowej, gdy $\beta = 5$ (co odpowiada, np. $\Delta f = 75$ kHz oraz $f_M = 15$ kHz) otrzymujemy

$$\frac{\Delta\omega}{\alpha} \leqslant 0{,}5 \tag{6/84}$$

Łatwo sprawdzić, że dla $\Delta\omega/\alpha = 0{,}5$ stosunek pierwszego wyrazu nieliniowego w zależności (6/76) do wyrazu liniowego

$$\frac{54}{625}\left(\frac{\Delta\omega}{\alpha}\right)^5 \Big/ \left(\frac{\Delta\omega}{\alpha}\right) = \frac{54}{625}\left(\frac{\Delta\omega}{\alpha}\right)^4 = 0{,}54\% \tag{6/85}$$

co można uznać za rezultat zadowalający. Przyjmując zatem, że jest spełniona nierówność (6/84), zależność (6/76) można uprościć do postaci

$$u_O(t) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\frac{\alpha_T R_o U_i \Delta\omega}{\pi R\alpha} f(t) \tag{6/86}$$

Ponieważ stała α decyduje o szerokości pasma przenoszenia obwodów, a ω_M — o maksymalnej dopuszczalnej szybkości zmian pulsacji chwilowej $\omega_i(t)$, z nierówności (6/81) wynika, że są to wielkości wymienne w tym sensie, iż zwiększenie szerokości pasma pozwala na stosowanie sygnałów o większej ω_M i odwrotnie.

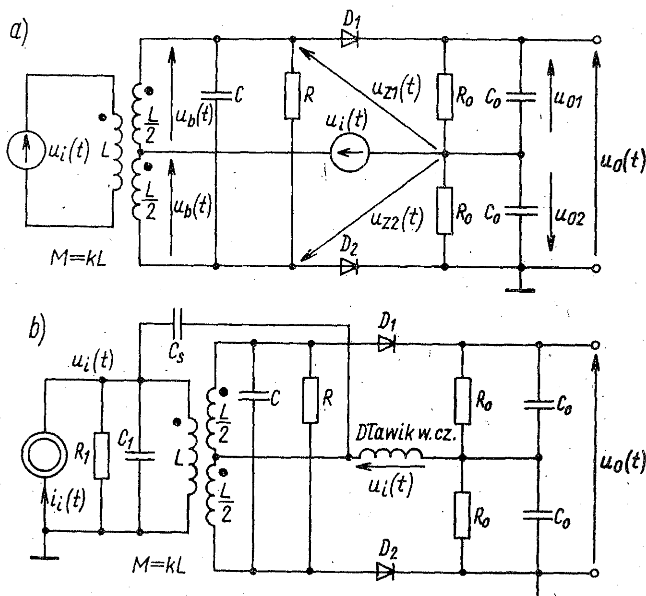
Jak to już wyjaśnialiśmy poprzednio, jeśli nierówność (6/77) nie jest spełniona, to zależności (6/65) i (6/66) przestają być słuszne. Można pokazać, że wówczas w miarę narastania szybkości zmian $\omega_i(t)$ narastają zniekształcenia dynamiczne polegające na tym, że kształty $I_1(t)$ oraz $I_2(t)$ różnią się coraz bardziej od kształtów charakterystyk amplitudowych obwodów rezonansowych. Zjawisko to wywołują specyficzne stany przejściowe w obwodach, wynikające z nienadążania prądów i napięć za zmianami pulsacji chwilowej $\omega_i(t)$.

W układzie z rys. 6/19a zamiast obwodów *RLC* można zastosować rezonatory kwarcowe, wykorzystując ich rezonans szeregowy. Otrzymuje się wówczas charakterystykę wynikową, która w stosunkowo wąskim przedziale częstotliwości wykazuje bardzo dobrą liniowość i duże nachylenie. Z uwagi na dobroć rezonatora kwarcowego (ok. 20 000) i związane z tym wąskie pasmo przenoszenia, istotną rolę odgrywa wówczas ograniczenie wprowadzane przez nierówność (6/77). Układy tego rodzaju wykorzystuje się, jako czułe przetworniki częstotliwość/napięcie, np. do automatycznego dostrajania częstotliwości środkowej niektórych modulatorów *FM*.

6.3.2 Demodulator Fostera-Seeleya

Na rysunku 6/20a przedstawiono układ demodulatora częstotliwości, w którym wykorzystuje się różniczkowanie w dziedzinie czasu. Jak łatwo zauważyć, stanowi on realizację układu funkcjonalnego z rys. 6/12, przy czym jako układ opóźniający został zastosowany obwód pokazany na rys. 6/15, a detekcja obwiedni jest dokonywana za pomocą detektora wartości szczytowej.

Z rysunku 6/20a widać, że w obwodzie wejściowym występuje transformator



6/20 Układy demodulatora Fostera-Seeleya

z dzielonym uzwojeniem wtórnym, co należy uwzględnić przy wyznaczaniu transmitancji układu opóźniającego. Zauważmy w związku z tym, że jeśli tylko zostanie spełniona nierówność (6/52), to charakterystykę amplitudowo-fazową określoną względem każdej połowy uzwojenia wtórnego można na podstawie zależności (6/54) wyrazić wzorem

$$H(\omega) = \frac{1}{2} kQ e^{-j\left[(\omega-\omega_0)t_0 + \frac{\pi}{2}\right]} \tag{6/87}$$

Napięcia $u_{z1}(t)$ i $u_{z2}(t)$ podawane na detektory obwiedni (rys. 6/20a) są sumą algebraiczną opóźnionego napięcia $u_b(t)$ oraz sygnału wejściowego $u_i(t)$ (czyli sumator z rys. 6/12 zastępuje tutaj szeregowe łączenie tych napięć). Z tego względu, jak pokazaliśmy przy analizie układu funkcjonalnego, amplitudy $u_i(t)$ i $u_b(t)$ muszą być jednakowe, a to oznacza, że zamiast równości (6/56) musi być teraz spełniona równość następująca:

$$\frac{1}{2} kQ = 1 \tag{6/88}$$

Jak pokazaliśmy w p. 6.2.2, podstawowym warunkiem prawidłowej pracy omawianego demodulatora, zapewniającym liniową zależność napięcia wyjściowego $u_O(t)$ od sygnału modulującego $f(t)$ jest nierówność (6/39), którą w przypadku zastosowanego tutaj nieidealnego układu opóźniającego trzeba zastąpić warunkiem ostrzejszym, (6/67), o postaci

$$Bt_0 \leqslant 0{,}4 \tag{6/89}$$

gdzie B oznacza szerokość pasma zajętego przez sygnał $u_i(t)$. Przy spełnieniu obu tych warunków, tzn. (6/88) i (6/89), $u_O(t)$ wyrazi się wzorem (6/42), tj.

$$u_O(t) = \sqrt{2}\, K_D U_i \Delta\omega t_o f\left(t-\frac{t_o}{2}\right) \tag{6/90}$$

Zobaczmy teraz, jak na podstawie (6/88) i (6/89) można wyznaczyć interesujące nas parametry obwodu opóźniającego. Przyjmijmy, że znane są takie wielkości charakterystyczne sygnału wejściowego $u_i(t)$, jak ω_o (w przypadku stosowania przemiany częstotliwości nie będzie to pulsacja nośna, ale pulsacja pośrednia), $\Delta\omega$ oraz ω_M. Znając $\beta = \Delta\omega/\omega_M$ możemy z wykresu podanego na rys. D5/10, lub też wzoru przybliżonego (D5/117), określić B, a stąd na podstawie równania (6/89) otrzymujemy, że

$$t_o = \frac{1}{\alpha} = \frac{0{,}4}{B} \tag{6/91}$$

Ponieważ $\alpha = 1/(2RC)$, więc dobroć obwodu wyznaczymy z zależności

$$Q = \omega_o RC = \frac{\omega_o}{2\alpha} \tag{6/92}$$

co pozwala dalej, na podstawie zależności (6/88), ustalić współczynnik sprzężenia k. Zakładając wartość R i wykorzystując równanie (6/50a) otrzymujemy dalej, że

$$C = \frac{1}{2\alpha R} \quad \text{oraz} \quad L = \frac{1}{\omega_o^2 C(1-k^2)} \tag{6/93}$$

Sposób dobierania parametrów szczytowego detektora obwiedni został omówiony w p. 5.2.2. Tutaj dodamy tylko następujące uwagi. Zależność (6/42), a więc i (6/90) została uzyskana przy założeniu, że napięcie progowe diod jest równe zeru. Gdybyśmy jednak przyjęli $U_P \neq 0$ i posłużyli się równością (4/96), to dzięki temu, że układ z rys. 6/20a jest zrównoważony, człony zawierające U_P zostałyby skompensowane i nie pojawiłyby się w wyrażeniu (6/90). Ponadto, jak to pokazaliśmy w p. 4.2.2, detektor szczytowy ma skończoną oporność wejściową, którą w razie potrzeby należy uwzględnić przy wyznaczaniu dobroci obwodu opóźniającego.

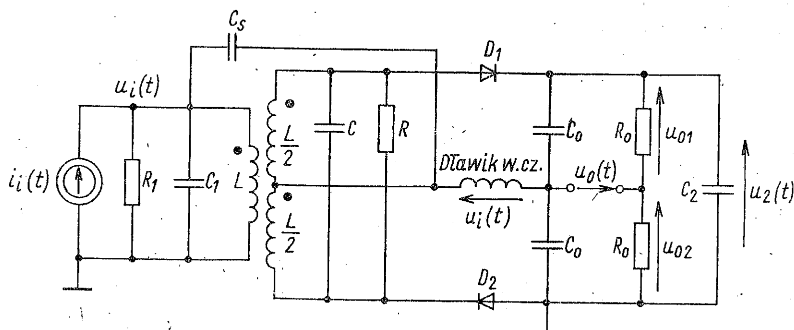
Na rysunku 6/20b pokazano schemat praktycznego układu demodulatora Fostera-Seeleya, w którym napięcie $u_i(t)$ sumowane z sygnałem opóźnionym $u_b(t)$ uzyskuje się na dławiku wielkiej częstotliwości. Jeśli reaktancje kondensatorów C_s i C_o są dla pulsacji ω_o pomijalnie małe w porównaniu z reaktancją dławika, to

$$\frac{j\omega_o L_D}{j\omega_o L_D - j\left(\dfrac{1}{\omega_o C_s} + \dfrac{1}{\omega_o C_o}\right)} \approx 1 \tag{6/94}$$

i napięcie na nim jest w przybliżeniu takie samo, jak na obwodzie wejściowym. Pojemność C_1 tego obwodu jest tak dobrana, aby $1/LC_1 = \omega_o^2$, a odpowiednia wartość R_1 (wraz z rezystancją wnoszoną) zapewnia właściwą szerokość pasma przenoszenia.

6.3.3 Demodulator stosunkowy

Demodulator stosunkowy, którego działanie teraz omówimy, otrzymuje się z układu podanego na rys. 6/20 przez odwrócenie kierunku przewodzenia jednej z diod. Jeśli będzie to na przykład dioda D_2, to dostaniemy układ przedstawiony na rys. 6/21. Przyjmijmy na chwilę, że kondensator C_2 został odłączony. Widać



6/21 Demodulator stosunkowy

wówczas, że jest to realizacja schematu funkcjonalnego z rys. 6/12, w której oba napięcia u_{O1} i u_{O2} są sumowane ze znakami dodatnimi. Ponieważ napięcia na wyjściu poszczególnych detektorów mają postać

$$\begin{aligned} u_{O1}(t) &= \sqrt{2}\, K_D U_i \left[1-\frac{\Delta\omega t_o}{2} f\left(t-\frac{t_o}{2}\right)\right] \\ u_{O2}(t) &= \sqrt{2}\, K_D U_i \left[1+\frac{\Delta\omega t_o}{2} f\left(t-\frac{t_o}{2}\right)\right] \end{aligned} \tag{6/95}$$

więc ich suma

$$u_2(t) = u_{O1}(t)+u_{O2}(t) = 2\sqrt{2}\, K_D U_i = \text{const} \tag{6/96}$$

i jest jak widać wielkością stałą, przy stałej amplitudzie U_i sygnału wejściowego. Załóżmy, że w tym stanie do układu został dołączony kondensator o dużej pojemności C_2 (rzędu kilka µF) i naładował się do napięcia $u_2(t)$ o wartości określonej wzorem (6/96). Jeśli teraz nastąpi nagła zmiana amplitudy sygnału $u_i(t)$, to z uwagi na dużą stałą czasu rozładowywania się C_2 można przyjąć, iż w krótkim przedziale czasu napięcie $u_2(t)$ nie ulegnie zmianie, czyli w dalszym ciągu będzie słuszna zależność (6/96). Ponieważ napięcie na każdym z kondensatorów C_o wynosi $u_2(t)/2$, więc możemy napisać, że

$$\begin{aligned} u_O(t) &= u_{O2}(t)-\frac{u_2(t)}{2} = \frac{1}{2}\,[u_{O2}(t)-u_{O1}(t)] \\ &= u_{O2}(t)-\sqrt{2}\, K_D U_i = \frac{\sqrt{2}}{2} K_D U_i \Delta\omega t_o f\left(t-\frac{t_o}{2}\right) \end{aligned} \tag{6/97}$$

Zauważmy, że stosunek $u_O(t)/u_2(t)$ zależy tylko od sygnału modulującego, a to wobec równości (6/96) oznacza, że przy ustalonej wartości $f(t)$ amplituda $u_O(t)$ pozostaje również stała, mimo założonej nagłej zmiany U_i. Przy wolnych zmianach U_i napięcie $u_2(t)$, a więc i $u_O(t)$, będzie także ulegać zmianom. Ponieważ więc układ nie reaguje na szybkie i niezbyt duże zmiany sygnału wejściowego mówimy, że ograniczanie ma charakter dynamiczny. Porównanie zależności (6/97) i (6/90) pokazuje, że ceną, którą płacimy za te właściwości układu, jest dwukrotne zmniejszenie się amplitudy sygnału wyjściowego w porównaniu z demodulatorem Fostera-Seeleya. Mechanizm ograniczania dynamicznego można wyjaśnić jakościowo w następujący sposób. Przyjmijmy, że w pewnej chwili nastąpił nagły wzrost amplitudy sygnału wejściowego U_i. Ponieważ $u_2(t)$ nie ulega zmianie, więc następuje wzrost kąta przepływu prądów płynących przez diody (patrz rys. 4/19), a to z kolei powoduje zmniejszenie się sprawności detekcji oraz rezystancji wejściowej detektorów, obciążających wtórny obwód rezonansowy. Następuje więc gwałtowny spadek dobroci obwodu, co w konsekwencji pociąga za sobą zmniejszenie się panującego na nim napięcia. Mechanizm ten jest na tyle skuteczny, że wzrost U_i może nawet spowodować zmniejszenie amplitudy $u_O(t)$. Podstawowy układ demodulatora stosunkowego można rozbudować wprowadzając dodatkowe elementy optymalizujące jego działanie, ale zagadnienia tego nie będziemy tutaj omawiać.

6.3.4 Demodulator z układem mnożącym

Interesującym rozwiązaniem demodulatora częstotliwości jest realizacja układu funkcjonalnego z rys. 6/14, który był analizowany w p. 6.2.2. Pokazaliśmy tam, że w układzie podstawowym, a więc niezrównoważonym, sygnał zdemodulowany nie zawiera składowej stałej, a ponadto jeden z sygnałów mnożonych może być ograniczony nawet do postaci fali prostokątnej, bez naruszania warunków poprawnej pracy demodulatora. Rozważmy w związku z tym układ przedstawiony na rys. 6/22, składający się z pasmowego obwodu opóźniającego (rys. 6/15) oraz układu mnożącego, który został omówiony w rozdz. 1. Pokazano tam, że przy spełnieniu warunków

$$R_Y I_Y \gg 2U_T \quad \text{oraz} \quad |u_i(t)|_{\max} \leqslant R_Y I_Y \tag{6/98}$$

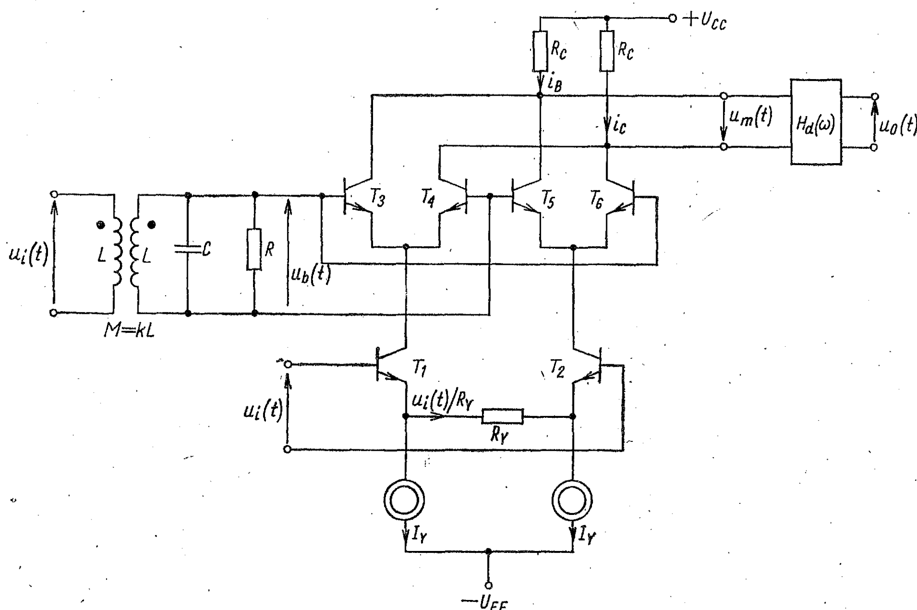
napięcie $u_m(t)$ wyraża się wzorem

$$u_m(t) = R_C i_R = R_C(i_B - i_C) = 2\frac{R_C}{R_Y} u_i(t) \operatorname{tgh} \frac{u_b(t)}{2U_T} \tag{6/99}$$

Przyjmijmy, że

$$u_i(t) = U_i \cos\left[\omega_o t + \Delta\omega \int_0^t f(\vartheta)\,d\vartheta\right] \tag{6/100}$$

i jest sygnałem ograniczonym, po filtracji. Przy spełnieniu warunku (6/52) charak-



6/22 Demodulator z układem mnożącym

terystyka częstotliwościowa układu opóźniającego wyraża się wzorem (6/54), tj.

$$H(\omega) = kQ e^{-j\left[(\omega-\omega_o)t_o+\frac{\pi}{2}\right]} \tag{6/101}$$

gdzie $k = M/L$, $Q = \omega_o RC$, $t_o = 2RC$ oraz $\omega_o^2 = 1/(1-k^2)LC$. W związku z tym napięcie $u_b(t)$ ma postać analogiczną do (6/43), gdyż jedyna różnica wynika z faktu, że teraz $|H(\omega)| = kQ \neq 1$. Otrzymujemy więc

$$u_b(t) = -U_b \sin\left[\omega_o t + \Delta\omega \int_0^{t-t_o} f(\vartheta)\,d\vartheta\right] \tag{6/102}$$

przy czym

$$U_b = kQU_i \tag{6/103}$$

Wprowadzając nową zmienną

$$\tau(t) = t + \frac{\Delta\omega}{\omega_o} \int_0^{t-t_o} f(\vartheta)\,d\vartheta \tag{6/104}$$

sygnał $u_b(t)$ można zapisać w postaci

$$u_b(\tau) = -U_b \sin\omega_o \tau \tag{6/105}$$

przy czym $u_b(\tau)$ jest teraz okresowy względem τ z okresem $2\pi/\omega_o$. W związku z tym funkcja

$$\operatorname{tgh}\left(-\frac{U_b}{2U_T}\sin\omega_o\tau\right) = -\operatorname{tgh}\left(\frac{U_b}{2U_T}\sin\omega_o\tau\right) \tag{6/106}$$

jest również okresowa i można ją przedstawić szeregiem Fouriera o postaci analogicznej do (6/4). W dodatku D3 na rys. D3/3a podano wykresy współczynników tego rodzaju szeregu, z których wynika, że dla $U_b/U_T \geqslant 10$ można z powodzeniem stosować następujące przybliżenie:

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{U_b}{2U_T}\sin\omega_o\tau\right) \approx \operatorname{sgn}(\sin\omega_o\tau) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\omega_o\tau+\frac{1}{3}\sin 3\omega_o\tau+\ldots\right) \tag{6/107}$$

Podstawiając równanie (6/107) do (6/99) i przechodząc ponownie do zmiennej t otrzymamy

$$u_m(t) = -\frac{8R_C}{\pi R_Y}u_i(t)\operatorname{sgn}\left[\sin(\omega_o t+\Delta\omega)\int\limits_0^{t-t_o} f(\vartheta)\,d\vartheta\right] \tag{6/108}$$

lub w postaci rozwiniętej

$$u_m(t) = -\frac{8}{\pi}\frac{R_C}{R_Y}U_i\cos\left[\omega_o t+\Delta\omega\int\limits_0^t f(\vartheta)\,d\vartheta\right]\times$$
$$\times\sin\left[\omega_o t+\Delta\omega\int\limits_0^{t-t_o} f(\vartheta)\,d\vartheta\right]+\begin{bmatrix}\text{wyrazy o pulsacjach}\\ \text{nośnych } 2\omega_o, 4\omega_o, \ldots\end{bmatrix} \tag{6/109}$$

Zauważmy, że pierwszy wyraz w szeregu (6/109) ma — za wyjątkiem stałego mnożnika — taką samą postać jak wyrażenie (6/44), które badaliśmy w p. 6.2.2. Przyjmując, że filtr dolnoprzepustowy usunie składniki niepożądane o widmach skupionych wokół pulsacji $2\omega_o$, $4\omega_o$, ... widzimy, iż przy spełnieniu nierówności (6/46), tj.

$$t_o < \frac{2}{\omega_M} \quad \text{oraz} \quad t_o < \frac{0{,}2}{\Delta\omega} \tag{6/110}$$

pierwszy składnik $u_m(t)$ można zapisać w postaci analogicznej do (6/47). Uwzględniając różnicę w mnożnikach występujących we wzorach (6/44) i (6/109), otrzymujemy

$$u_{m1}(t) = -\frac{4}{\pi}\frac{R_C}{R_Y}U_i\Delta\omega t_o f\left(t-\frac{t_o}{2}\right) \tag{6/111}$$

Sygnał na wyjściu filtru dolnoprzepustowego jest więc określony wzorem

$$u_O(t) = -\frac{4}{\pi}\frac{R_C}{R_Y}U_i\Delta\omega t_o f\left(t-\frac{t_o}{2}\right)*h_d(t) \tag{6/112}$$

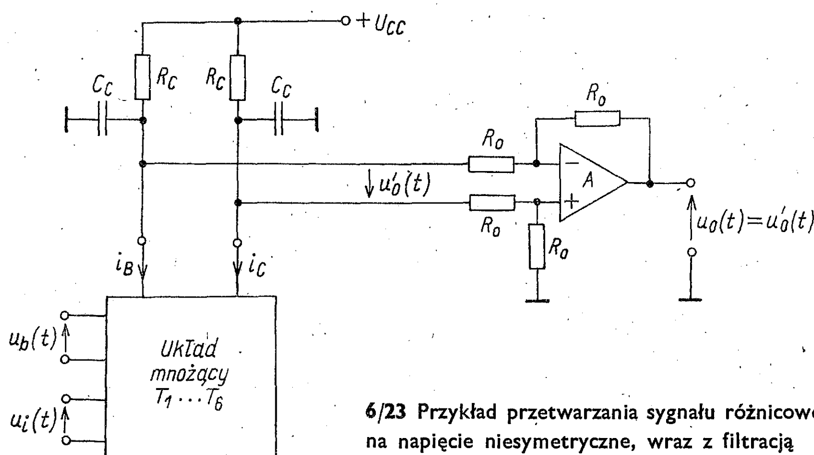
lub też

$$u_O(t) = -\frac{4}{\pi}\frac{R_C}{R_Y}U_i\Delta\omega t_o f\left(t-\frac{t_o}{2}\right)H_d(0) \tag{6/113}$$

jeśli przyjmiemy, że charakterystyka amplitudowa filtru jest płaska w przedziale $(0, \omega_M)$.

Jak łatwo zauważyć, warunki rozłączności widm sygnału użytecznego oraz sygnału niepożądanego o pulsacji nośnej $2\omega_0$ określa krzywa przedstawiona na rys. 6/5 dla detektora synchronicznego. Wynik ten nie powinien zaskakiwać, gdyż pokazaliśmy poprzednio, że układy z rys. 6/14 i 6/13 są sobie równoważne.

Sygnał wyjściowy z demodulatora można w zależności od potrzeby pobierać w sposób symetryczny lub też asymetryczny, stosując proste albo też bardziej rozbudowane filtry. Na rysunku 6/23 pokazano przykładowe rozwiązanie, w któ-



6/23 Przykład przetwarzania sygnału różnicowego na napięcie niesymetryczne, wraz z filtracją dolnoprzepustową

rym prąd różnicowy $i_R = i_B - i_C$ jest przetwarzany na napięcie $u_O(t)$ z równoczesną filtracją dolnoprzepustową. Napięcie $u'_O(t)$ można wyrazić wzorem

$$u'_O(t) = -\frac{4}{\pi}\frac{U_i}{R_Y}\Delta\omega t_o f\left(t-\frac{t_o}{2}\right) * h_d(t) \tag{6/114}$$

z tym, że w rozważanym przypadku

$$h_d(t) = \mathscr{L}^{-1}[Z_d(s)]$$

gdzie

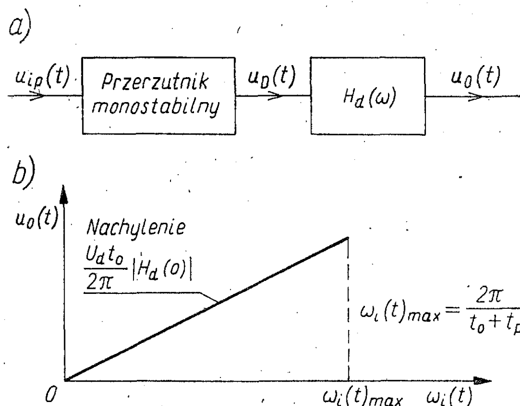
$$Z_d(s) = \frac{U'_O(s)}{I_R(s)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{R_C}+\frac{1}{R_o}\right)+sC_C} \tag{6/115}$$

a $U'_O(s)$ i $I_R(s)$ stanowią odpowiednio $\mathscr{L}$-transformaty $u'_O(t)$ oraz $i_R(t)$. Zauważmy, że dla $C_C = 0$ i $R_o = \infty$ otrzymujemy $Z_d(s) = R_C$ i wzór (6/114) jest identyczny ze wzorem (6/111), określającym składową pożądaną nie filtrowanego napięcia $u_m(t)$.

6.3.5 Demodulator impulsowy

Demodulator, w którym wykorzystuje się zliczanie i uśrednianie impulsów (rys. 6/16), analizowany w p. 6.2.3, realizuje się praktycznie w sposób zilustrowany układem funkcjonalnym z rys. 6/24a. Sygnał ograniczony, nie filtrowany

$u_{ip}(t)$ przy każdym dodatnim przejściu przez zero wyzwala przerzutnik monostabilny, który generuje impuls o czasie trwania t_o i amplitudzie U_d. W rezultacie $u_D(t)$ stanowi ciąg powtarzających się ze zmiennym okresem $T_i = 2\pi/\omega_i(t)$ impulsów unipolarnych. Ponieważ w rozważanym teraz rozwiązaniu $u_D(t)$ jest generowane przez przerzutnik, a nie uzyskiwane drogą sumowania $u_{ip}(t)$ oraz



6/24 Demodulator impulsowy: a) układ funkcjonalny; b) charakterystyka demodulacji

$u_{ip}(t-t_o)$, charakterystyka statyczna demodulatora jest linią prostą, mającą zawsze dodatnie nachylenie, jak to pokazano na rys. 6/24b (por. z rys. 6/18). Przy spełnieniu nierówności (6/62), tj. $t_o < 2/\omega_M$, ta sama charakterystyka wiąże ze sobą $u_O(t)$ oraz $\omega_i(t)$. Uwzględniając to, że amplituda impulsów została teraz oznaczona przez U_d (por. rys. 6/17) możemy na podstawie wzoru (6/63) napisać, że

$$u_O(t) = \frac{U_d t_o}{2\pi} \omega_i(t) * h_d(t) \tag{6/116}$$

lub też, przy założeniu, iż w przedziale $(0, \omega_M)$, $H_d(\omega) = H(0)$

$$u_O(t) = \frac{U_d t_o}{2\pi} H_d(0)\omega_i(t) \tag{6/117}$$

Jeśli przyjmiemy, że czas potrzebny po generacji każdego impulsu na powrót przerzutnika do stanu początkowego wynosi t_p, to najkrótszy okres sygnału demodulowanego ogranicza nierówność $T_{min} \geqslant t_o + t_p$, czyli zamiast (6/61) otrzymujemy warunek

$$t_o + t_p \leqslant \frac{2\pi}{[\omega_i(t)]_{max}} = \frac{2\pi}{\omega_o + \Delta\omega} \tag{6/118}$$

Nierówność ta ogranicza zakres częstotliwości demodulowanych sygnałów. Zwiększenie tego zakresu można uzyskać stosując dzielenie częstotliwości sygnału $u_{ip}(t)$.

Zauważmy, że zależność (6/116) jest słuszna, jeśli widma sygnału użytecz-

nego i sygnałów niepożądanych są rozłączne. Ponieważ najbliższy sygnał niepożądany ma widmo skupione wokół pulsacji ω_0, warunek rozłączności tych widm określa krzywa dla detektora wartości średniej, pokazana na rys. 6/5. Jeśli okazałoby się, że konieczne jest stosowanie nazbyt rozbudowanych filtrów, to można zastosować rozwiązanie, w którym wyzwalanie przerzutnika następuje przy każdym, tzn. zarówno dodatnim jak i ujemnym przejściu przez zero sygnału $u_{ip}(t)$. Wówczas najbliższy sygnał niepożądany ma widmo skupione wokół $2\omega_0$ i warunki rozłączności widm określa krzywa z rys. 6/5 dla detektora synchronicznego. Przy takim rozwiązaniu zamiast zależności (6/116) i (6/118) dostajemy odpowiednio

$$u_O(t) = \frac{U_d t_o}{\pi} \omega_i(t) * h_d(t) \tag{6/119}$$

oraz

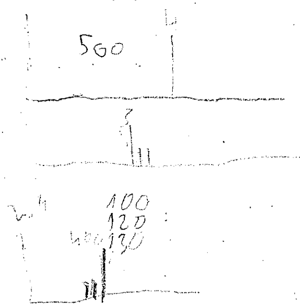
$$t_o + t_p \leqslant \frac{\pi}{\omega_o + \Delta\omega} \tag{6/120}$$

Warto tu jeszcze zwrócić uwagę na dość oczywisty fakt, że impulsy generowane przez przerzutnik nie muszą mieć kształtu prostokątnego, jak to dla czytelności zapisu przyjmowaliśmy we wzorach (6/116), (6/117) i (6/119). Istotne jest, aby kształt impulsów nie ulegał zmianie przy zmianach $\omega_i(t)$.

Demodulatory impulsowe wykonuje się w postaci scalonej, co pozwala uzyskać zarówno bardzo dobrą liniowość charakterystyki, jak i szeroki zakres częstotliwości ich działania.

Literatura

1. Baghdady E. J.: *Lectures on Communication System Theory*. McGraw-Hill, New York 1961.
2. Clarke K. K., Hess D. T.: *Communication Circuits*: *Analysis and design*. Addison-Wesley, London 1971.
3. Filipkowski A.: *Układy elektroniczne analogowe i cyfrowe*. WNT, Warszawa 1978.
4. Golde W.: *Układy elektroniczne* T. II. WNT, Warszawa 1976.
5. Gregg W. D.: *Podstawy telekomunikacji analogowej i cyfrowej*. WNT, Warszawa 1983.
6. Lathi B. P.: *Systemy telekomunikacyjne*. WNT, Warszawa 1972.
7. Panter P. F.: *Modulation, Noise and Spectral Analysis*. McGraw-Hill, New York 1965.
8. Pawłowski J.: *Podstawowe układy elektroniczne*: *nieliniowe układy analogowe*. WKŁ, Warszawa 1979.
9. Shanmugam K. Sam.: *Digital and Analog Communication Systems*. J. Wiley, New York 1979.

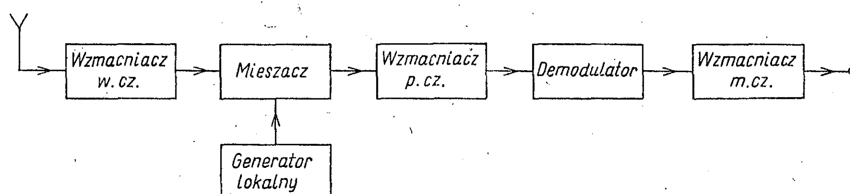


7

MIESZACZE

Mieszanie albo *przemiana częstotliwości*, polega na przesunięciu widma sygnału wejściowego na skali częstotliwości, bez zmiany pozostałych cech sygnału. Operacja ta pozwala w szczególności na umieszczenie widma sygnału w takim zakresie częstotliwości, w którym można przeprowadzić w sposób prostszy, czy też bardziej skuteczny inne operacje, na przykład takie, jak wzmocnienie czy filtracja.

Klasycznym przykładem wykorzystania przemiany częstotliwości do takich właśnie celów jest koncepcja odbiornika superheterodynowego, którego układ blokowy przedstawiono na rys. 7/1. Pasmowy sygnał wejściowy o pulsacji środ-



7/1 Schemat blokowy odbiornika superheterodynowego

kowej ω_s, po wstępnym wzmocnieniu i filtracji, zostaje w mieszaczu poddany operacji przesunięcia za pomocą sygnału o pulsacji ω_h wytwarzanego w generatorze lokalnym (*heterodynie*), w wyniku której uzyskuje nową pulsację nośną ω_p, nazywaną *pulsacją pośrednią*, przy czym, jak pokażemy dalej, w najprostszym i najczęściej spotykanym przypadku $\omega_p = \omega_h - \omega_s$, lub (rzadziej) $\omega_p = \omega_h + \omega_s$.

Jeśli ω_s może przyjmować różne wartości z pewnego przedziału częstotliwości (jak np. w radiofonii, czy radiokomunikacji), to dla uzyskania w każdym przypadku przesunięcia do tej samej pulsacji ω_p generator lokalny musi być przestrajany współbieżnie z filtrami poprzedzającymi mieszacz. W rezultacie sygnał wyjściowy z mieszacza ma stałą pulsację środkową i może zostać poddany

wzmocnieniu oraz filtracji we wzmacniaczu pośredniej częstotliwości o starannie dobranych i niezmiennych charakterystykach. Uzyskanie odpowiedniego wzmocnienia jest sprawą istotną, gdyż jak pokazaliśmy w rozdz. 4 i 5 demodulatory działają prawidłowo wówczas, gdy podawany na nie sygnał osiąga poziom rzędu woltów, podczas gdy poziom sygnałów wejściowych w odbiorniku jest zwykle rzędu $10^{-6}...10^{-3}$ V.

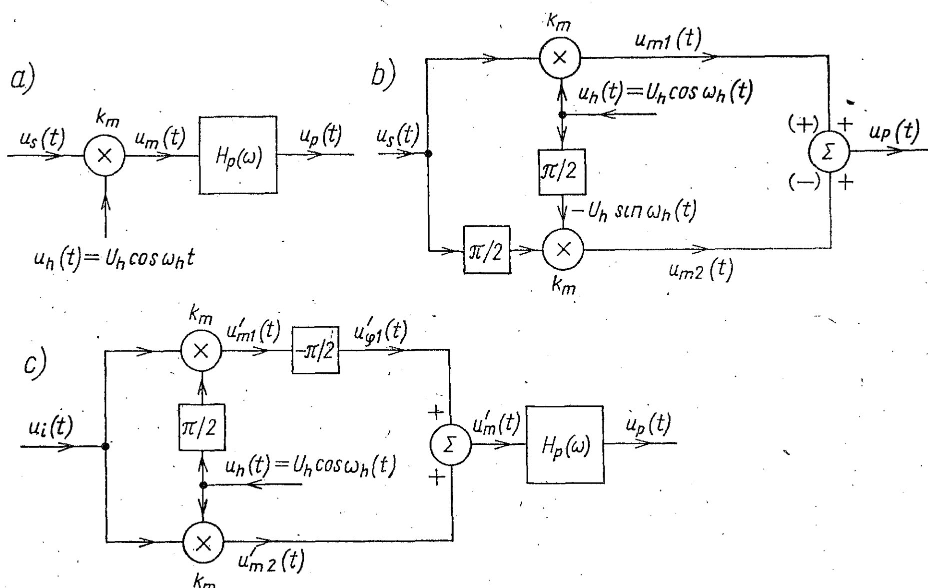
Należy równocześnie zauważyć, że wprowadzenie stopnia przemiany częstotliwości daje nie tylko korzyści w postaci uproszczenia konstrukcji odbiornika, ale stwarza także pewne nowe problemy techniczne, które trzeba rozwiązywać. Operacja mieszania jest operacją nieliniową, co w powiązaniu z pasmowym charakterem przetwarzanych sygnałów jest źródłem specyficznych, często bardzo kłopotliwych zniekształceń, nazywanych intermodulacyjnymi. Niektóre z tych zagadnień postaramy się wyjaśnić przy omawianiu układów funkcjonalnych.

7.1 METODY PRZEMIANY CZĘSTOTLIWOŚCI

7.1.1 Przemiana z zastosowaniem układu mnożącego

Najprostszym koncepcyjnie układem, w którym można uzyskać przemianę częstotliwości, jest układ funkcjonalny pokazany na rys. 7/2. Przyjmijmy, że sygnał wejściowy ma postać

$$u_s(t) = U_s(t)\cos[\omega_s t + \varphi_s(t)] \tag{7/1}$$



7/2 Mieszacz: a) z układem mnożącym; b) dający tylko jedną wstęgę boczną; c) bez kanału lustrzanego

czyli jest sygnałem zmodulowanym amplitudowo i kątowo, oraz załóżmy, że heterodyna generuje przebieg sinusoidalny

$$u_h(t) = U_h \cos\omega_h t \tag{7/2}$$

Po układzie mnożącym otrzymamy

$$u_m(t) = k_m u_s(t) u_h(t) = k_m U_h U_s(t) \cos\omega_h t \cos[\omega_s t + \varphi_s(t)]$$

$$= \frac{1}{2} k_m U_h U_s(t) \cos[(\omega_h - \omega_s) t - \varphi_s(t)] +$$

$$+ \frac{1}{2} k_m U_h U_s(t) \cos[(\omega_h + \omega_s) t + \varphi_s(t)] \tag{7/3}$$

Otrzymaliśmy zatem dwa sygnały o pulsacjach środkowych $\omega_h - \omega_s$ oraz $\omega_h + \omega_s$, które zachowały bez zniekształceń modulację taką jak sygnał wejściowy. Jeśli przyjmiemy, co występuje najczęściej, że

$$\omega_p = \omega_h - \omega_s \tag{7/4}$$

to przy właściwie dobranej charakterystyce filtru pasmowego wyraz niepożądany zostanie usunięty i na wyjściu otrzymamy sygnał pośredniej częstotliwości

$$u_p(t) = \left\{ \frac{1}{2} k_m U_h U_s(t) \cos[\omega_p t - \varphi_s(t)] \right\} * h_p(t) \tag{7/5}$$

Zakładając w przybliżeniu, że w pasmie zajętym przez sygnał $H_p(\omega) = H_p(\omega_p) =$ $=$ const, możemy zamiast (7/5) napisać

$$u_p(t) = \frac{1}{2} H_p(\omega_p) k_m U_h U_s(t) \cos[\omega_p t - \varphi_s(t)] \tag{7/6}$$

Jeden z sygnałów składowych, o pulsacji $\omega_h + \omega_s$ lub $\omega_h - \omega_s$, można usunąć stosując układ pokazany na rys. 7/2b. Otrzymujemy wówczas $u_{m1}(t)$ o postaci (7/3), natomiast $u_{m2}(t)$ wyraża się wzorem

$$u_{m2}(t) = k_m U_h U_s(t) \sin\omega_h t \sin[\omega_s t + \varphi_s(t)] =$$

$$= \frac{1}{2} k_m U_h U_s(t) \cos[(\omega_h - \omega_s) t - \varphi_s(t)]$$

$$- \frac{1}{2} k_m U_h U_s(t) \cos[(\omega_h + \omega_s) t + \varphi_s(t)] \tag{7/7}$$

W zależności od tego, czy $u_{m1}(t)$ i $u_{m2}(t)$ zostaną zsumowane ze znakami „+" czy też ze znakami podanymi na rys. 7/2b w nawiasach otrzymamy

$$u_p(t) = k_m U_h U_s(t) \cos[(\omega_h - \omega_s) t - \varphi_s(t)] \tag{7/8}$$

lub

$$u_p(t) = k_m U_h U_s(t) \cos[(\omega_h + \omega_s) t + \varphi_s(t)] \tag{7/9}$$

Z uwagi na trudności związane z realizacją układu dającego przesunięcie fazowe o wartości $\pi/2$ w całym pasmie zajętym przez sygnał $u_s(t)$, rozwiązanie takie wchodzi w rachubę tylko wówczas, gdy pulsacja ω_s nie ulega zmianie.

Powróćmy jeszcze do układu podstawowego z rys. 7/2a. Przyjmijmy dla

ustalenia uwagi, że $\omega_h > \omega_s$. Łatwo sprawdzić na podstawie zależności (7/3), że jeśli na wejście zostanie doprowadzony sygnał

$$u_l(t) = U_l(t)\cos[\omega_l t + \varphi_l(t)] \tag{7/10a}$$

gdzie

$$\omega_l = \omega_s + 2\omega_p = \omega_h + \omega_p \tag{7/10b}$$

to

$$u_m(t) = \frac{1}{2} k_m U_h U_l(t)\cos[(\omega_l - \omega_h)t + \varphi_l(t)] + \frac{1}{2} k_m U_h U_l(t)\cos[(\omega_l + \omega_h)t + \varphi_l(t)] \tag{7/11}$$

Pierwszy składnik $u_m(t)$ ma więc pulsację środkową równą pulsacji pośredniej, ponieważ $\omega_l - \omega_h = \omega_p$. Porównując (7/4) i (7/10b) widzimy, że $\omega_s = \omega_h - \omega_p$ oraz $\omega_l = \omega_h + \omega_p$ są położone symetrycznie względem pulsacji heterodyny ω_h, w związku z czym sygnał (7/10) jest nazywany *sygnałem lustrzanym*. Gdybyśmy przyjęli, że $\omega_s > \omega_h$, to sygnałem lustrzanym byłby sygnał o pulsacji $\omega_l = \omega_s - 2\omega_p = \omega_h - \omega_p$.

Jak więc widać, jeśli na wejściu układu z rys. 7/2a istnieją równocześnie dwa sygnały, jeden (pożądany) o pulsacji ω_s i drugi (niepożądany) o częstotliwości lustrzanej, to oba zostaną przeniesione w mieszaczu w to samo pasmo częstotliwości położone wokół ω_p. Temu niekorzystnemu zjawisku trzeba przeciwdziałać. Jednym z najczęściej wykorzystywanych rozwiązań jest zastosowanie odpowiedniej filtracji w układach poprzedzających stopień przemiany. Inne rozwiązanie przedstawiono na rys. 7/2c. Prześledźmy działanie układu przyjmując, że nie interesują nas składniki o pulsacjach sumarycznych, tj. $\omega_s + \omega_h$ i $\omega_l + \omega_h$, gdyż zostaną one usunięte przez dołączony na wyjściu filtr pasmowy. Składniki o pulsacjach różnicowych mają następującą postać:

$$u'_{m1}(t) = \frac{1}{2} k_m U_h U_s(t)\cos[(\omega_h - \omega_s)t - \varphi_s(t) + \pi/2] + \frac{1}{2} k_m U_h U_l(t)\cos[(\omega_l - \omega_h)t + \varphi_l(t) - \pi/2] \tag{7/12}$$

$$u'_{\varphi 1}(t) = \frac{1}{2} k_m U_h U_s(t)\cos[(\omega_h - \omega_s)t - \varphi_s(t)] - \frac{1}{2} k_m U_h U_l(t)\cos[(\omega_l - \omega_h)t + \varphi_l(t)] \tag{7/13}$$

oraz

$$u'_{m2}(t) = \frac{1}{2} k_m U_h U_s(t)\cos[(\omega_h - \omega_s)t - \varphi_s(t)] + \frac{1}{2} k_m U_h U_l(t)\cos[(\omega_l - \omega_h)t + \varphi_l(t)] \tag{7/14}$$

Po układzie sumującym otrzymujemy tylko

$$u'_m(t) = u'_{\varphi 1}(t) + u'_{m2}(t) = k_m U_h U_s(t) \cos[(\omega_h - \omega_s)t - \varphi_s(t)] \quad (7/15)$$

gdyż składniki wywołane przez sygnał lustrzany ulegają kompensacji. Układ taki nosi nazwę *mieszacza bez kanału lustrzanego.*

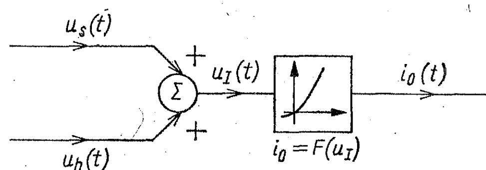
Jak już wzmiankowaliśmy poprzednio, poziom sygnału $u_s(t)$ podawanego na mieszacz jest zwykle bardzo mały. Z tego względu jest istotne, aby stopień przemiany cechował się małym poziomem szumów własnych zwłaszcza, że szumy generowane przez mieszacz są z reguły większe, niż szumy generowane we wzmacniaczach. Ponieważ analiza właściwości szumowych mieszaczy, której z braku miejsca nie będziemy tu przeprowadzać, a także wyniki eksperymentalne wskazują, że szumy wprowadzane w stopniach przemiany wykorzystujących układy mnożące są na ogół większe, niż w przypadku mieszaczy prostych, w których jako przetworniki nieliniowe wykorzystuje się tranzystory polowe, bipolarne, lub też diody, przejdziemy teraz do omówienia zagadnień związanych z zastosowaniem tego rodzaju elementów.

7.1.2 Przemiana na elemencie nieliniowym

Rozważmy układ funkcjonalny pokazany na rys. 7/3, w którym do elementu nieliniowego o charakterystyce przejściowej

$$i_O = F(u_I) \quad (7/16)$$

została przyłożona suma dwóch sygnałów: sygnału podlegającego przemianie $u_s(t)$ oraz sygnału heterodyny $u_h(t)$. Przyjmijmy dla uproszczenia, że $u_s(t)$ jest



7/3 Przemiana na elemencie nieliniowym

sygnałem niemodulowanym, tj. $u_s(t) = U_s \cos\omega_s t$, a $u_h(t)$ ma jak poprzednio postać (7/2). Jeżeli stosunek ω_h/ω_s nie jest liczbą wymierną, co zwykle występuje, gdyż sygnały te pochodzą z dwóch niezależnych źródeł, to

$$u_I(t) = U_s \cos\omega_s t + U_h \cos\omega_h t \quad (7/17)$$

jest najprostszym sygnałem prawie okresowym. Przyjmując, że zależność (7/16) można przybliżyć wielomianem n-tego stopnia

$$i_O = b_0 + b_1 u_I + b_2 u_I^2 + \dots b_n u_I^n \quad (7/18)$$

otrzymujemy

$$i_O = 2b_2 u_s u_h + b_0 + b_1(u_s + u_h) + b_2(u_s^2 + u_h^2) + \sum_{k=3}^{n} b_k(u_s + u_h)^k \quad (7/19)$$

Z wyrażenia tego widać, że sygnał o pulsacji $\omega_p = \omega_h - \omega_s$ otrzymamy tylko w wyniku mnożenia sygnałów u_s oraz u_h, czyli dzięki istnieniu wyrazu $2b_2 u_s u_h$. Pozostałe wyrazy są odpowiedzialne za tworzenie się składowych o innych

częstotliwościach, gdyż jak łatwo wykazać, przy pobudzeniu (7/17) sygnał $i_O(t)$ będzie również prawie okresowy i można wyrazić go szeregiem

$$i_O = I_{OO}+\sum_{k=1}^{n} I_{kO}\cos k\omega_h t+\sum_{l=1}^{n} I_{Ol}\cos l\omega_s t$$

$$+\sum_{k,l=1}^{k+l=n} I_{kl}\{\cos[(k\omega_h+l\omega_s)t]+\cos[(k\omega_h-l\omega_s)t]\} \tag{7/20}$$

Sygnał wyjściowy zawiera więc składowe harmoniczne sygnałów wejściowych o pulsacjach $k\omega_h$ i $l\omega_s$ oraz składowe o pulsacjach kombinacyjnych $k\omega_h+l\omega_s$ i $|k\omega_h-l\omega_s|$. Liczba $(k+l)$ jest rzędem składowej kombinacyjnej, a jej największa wartość równa się stopniowi wielomianu n. Zauważmy, że nawet w tak prostym przypadku jakim się zajmujemy, widmo sygnału wyjściowego jest bardzo bogate. Pojawienie się na wejściu większej liczby sygnałów, uwzględnienie faktu, że są to sygnały pasmowe oraz włączenie do rozważań selektywnych obwodów liniowych występujących na wejściu i wyjściu układu komplikuje zagadnienie analizy do tego stopnia, że staje się konieczne zastosowanie bardziej zaawansowanych metod matematycznych. Bardzo przydatna jest tu metoda analizy układów nieliniowych, w której wykorzystuje się szeregi Volterry oraz oparte na niej metody numeryczne [1]. Ponieważ ujęcia tego nie możemy tutaj zastosować, ograniczymy się tylko do wskazania pewnych częściej występujących zjawisk, które można wyjaśnić w sposób elementarny.

Przyjmijmy, że pulsacja pośrednia została wybrana tak, jak poprzednio i wynosi $\omega_p = \omega_h-\omega_s$ (zauważmy przy okazji, że jest możliwa także przemiana wyższych rzędów, w której są wykorzystywane harmoniczne heterodyny, np. $\omega_p = k\omega_h-\omega_s$, jest ona jednak rzadko stosowana). Z postaci wyrażenia (7/20) oraz faktu, że amplitudy poszczególnych składowych maleją na ogół wraz ze wzrostem ich rzędu widać, że przede wszystkim należy uwzględnić następujące sygnały zakłócające: znany już sygnał lustrzany o pulsacji $\omega_l = \omega_s+2\omega_p$, sygnały o pulsacjach ω_p, $\omega_p/2$, $\omega_s/2$ i $\omega_l/2$, a także sygnał o pulsacji $\omega_h+\omega_s$. Zauważmy jednak, że w każdym konkretnym przypadku istotne znaczenie ma tutaj kształt charakterystyki elementu nieliniowego oraz poziom sygnałów zakłócających.

Jak już mówiliśmy, bardzo ważną rolę w usuwaniu sygnałów niepożądanych spełnia wzmacniacz w.cz., poprzedzający stopień przemiany. Należy jednak zauważyć, że poziom sygnałów zakłócających na wejściu tego wzmacniacza może być znacznie wyższy od poziomu sygnału pożądanego. Może to wówczas wywołać nieliniową pracę wzmacniacza i spowodować wystąpienie efektów analogicznych do tych, jakie obserwujemy w pracy mieszacza. Na przykład istnienie wyrazu kwadratowego w charakterystyce przejściowej wzmacniacza spowoduje, że sygnały o pulsacjach $\omega_s/2$ i $\omega_l/2$ wywołają powstanie harmonicznych o pulsacjach ω_s i ω_l, które mogą dotrzeć na wejście mieszacza. Szczególny rodzaj zniekształceń wprowadza wyraz sześcienny $b_3u_I^3$. Aby to wyjaśnić przyjmijmy, że na wejściu wzmacniacza istnieją dwa sygnały zmodulowane, sygnał pożądany

$$u_s(t) = U_s(t)\cos\omega_s t \tag{7/21}$$

oraz sygnał zakłócający

$$u_z(t) = U_z(t)\cos\omega_z t \tag{7/22}$$

Wówczas, z rozwinięcia $b_3(u_s+u_z)^3$ wynika, że wyraz $3b_3 u_s u_z^2$ zawiera składnik o następującej postaci

$$\frac{3}{2} b_3 U_s(t) U_z^2(t)\cos\omega_s t \tag{7/23}$$

Jak widać, obwiednia modulacyjna sygnału pożądanego została zniekształcona przez obwiednię sygnału zakłócającego. Zjawisko to nazywamy *modulacją skrośną*, a zniekształceń nim spowodowanych nie można usunąć przez filtrację ani przed, ani też po demodulacji. Nie jest trudno sprawdzić, że również w przypadku mieszacza wyraz sześcienny w rozwinięciu potęgowym charakterystyki przejściowej może spowodować wystąpienie modulacji skrośnej. Zniekształceniom nieliniowym tego rodzaju przeciwdziała się przez stosowanie automatycznej regulacji wzmocnienia (ARW) stopni wejściowych, co pozwala na utrzymanie w szerokich granicach liniowego zakresu ich pracy. Należy tu jeszcze dodać, że nie można stosować układów wejściowych o zbyt dużej selektywności, gdyż konieczność zapewnienia odpowiedniej współbieżności przestrajania filtrów o różnych pulsacjach środkowych ogranicza dobroci tych obwodów.

Zauważmy na koniec, że jeśli w mieszaczu zastosuje się element, którego charakterystyka jest kwadratowa, to przy pobudzeniu o postaci (7/17) wystąpią tylko sygnały o pulsacjach $2\omega_s$, $2\omega_h$, $(\omega_h-\omega_s)$ i $(\omega_h+\omega_s)$. Wszystkie sygnały niepożądane można wówczas usunąć za pomocą filtru pasmowego. Jest to przyczyna, dla której w mieszaczach, a także we wzmacniaczach wejściowych, chętnie stosuje się tranzystory polowe.

Różnicę poziomów sygnału poddawanego przemianie $u_s(t)$ oraz lokalnie wytwarzanego przebiegu heterodyny $u_h(t)$ wykorzystuje się często do uproszczenia analizy mieszaczy. Aby pokazać, jak to można uczynić przyjmijmy, że napięcie heterodyny u_h wywołuje odpowiedź i_{Oh}, co zgodnie z zależnością (7/16) można zapisać

$$i_{Oh} = F(u_h) \tag{7/24}$$

Załóżmy dalej, że na wejście elementu nieliniowego jest podawany także sygnał u_s, przy czym

$$|u_s(t)|_{\max} \ll |u_h(t)|_{\max} \tag{7/25}$$

Otrzymamy wówczas zależność

$$i_{Oh}+i_{Os} = F(u_h+u_s) \tag{7/26}$$

którą można wyrazić wzorem Taylora

$$i_{Oh}+i_{Os} = F(u_h)+F'(u_h)u_s+\frac{1}{2}F''(u_c)u_s^2 \tag{7/27}$$

gdzie

$$u_c = u_h+\gamma u_s, \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant 1$$

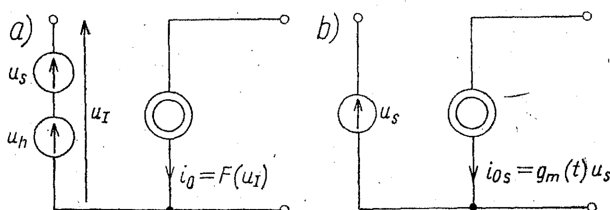
Jeżeli pominiemy wyrazy rzędu wyższego, niż pierwszy względem u_s, to otrzymamy

$$i_{Os} \approx F'(u_h)u_s \tag{7/28}$$

przy czym błąd takiego przybliżenia można oszacować w następujący sposób:

$$|i_{Os} - F'(u_h)u_s| < \frac{1}{2}\sup_u |F''(u)||u_s|^2 \tag{7/29}$$

Ponieważ u_h jest funkcją czasu, otrzymana zależność przybliżona (7/28) jest zależnością parametryczną, to znaczy stanowi równanie liniowe o współczynnikach zmiennych w czasie. Rozważmy dla przykładu często spotykany przypadek, gdy elementem nieliniowym jest generator prądowy sterowany napięciem, jak to



7/4 Przybliżenie nieliniowego źródła sterowanego (a) źródłem parametrycznym (b)

pokazano na rys. 7/4a. Jeśli zależność $i_O = F(u_I)$ zapiszemy w postaci (7/18) i przyjmiemy, że napięcie heterodyny jest sinusoidalne, tj. $u_h(t) = U_h \cos\omega_h t$, to równanie (7/28) możemy zapisać następująco:

$$i_{Os}(t) = g_m(t)u_s(t) \tag{7/30}$$

gdzie

$$g_m(t) = F'(u_h)|_{u_h=u_h(t)} = \sum_{k=1}^{n} kb_k u_h^{k-1}(t)$$

$$= g_{m0} + \sum_{k=1}^{n} g_{mk} \cos k\omega_h t \tag{7/31}$$

Równaniu (7/30) odpowiada układ liniowy, zawierający źródło prądowe o parametrycznie zmiennej wydajności, pokazany na rys. 7/4b. Inaczej można powiedzieć, że z punktu widzenia sygnału u_s element nieliniowy o charakterystyce $i_O = F(u_I)$ został zastąpiony zmienną w czasie transkonduktancją $g_m(t)$, której wartość w chwili t jest określona przez chwilowe położenie punktu pracy, podyktowane wartością napięcia heterodyny $u_h(t)$.

Jeśli przyjmiemy, że $u_s(t)$ jest sygnałem niemodulowanym o postaci $u_s(t) = U_s \cos\omega_s t$, to z równań (7/30) i (7/31) wynika natychmiast, iż prąd $i_{Os}(t)$ będzie zawierał tylko składowe o pulsacjach ω_s, $|k\omega_h - \omega_s|$ oraz $k\omega_h + \omega_s$. Dla

przemiany podstawowej składowa prądu o pulsacji pośredniej $\omega_p = \omega_h - \omega_s$ wyniesie

$$\frac{1}{2} g_{m1} U_s \cos\omega_p t = I(\omega_p)\cos\omega_p t \tag{7/32}$$

Jednym z podstawowych parametrów charakteryzujących pracę mieszacza jest tzw. *konduktancja przemiany* g_p, definiowana jako stosunek amplitudy składowej prądu wyjściowego o pulsacji pośredniej $I(\omega_p)$ do amplitudy niemodulowanego sygnału wejściowego U_s, tj.

$$g_p = \frac{I(\omega_p)}{U_s} \tag{7/33}$$

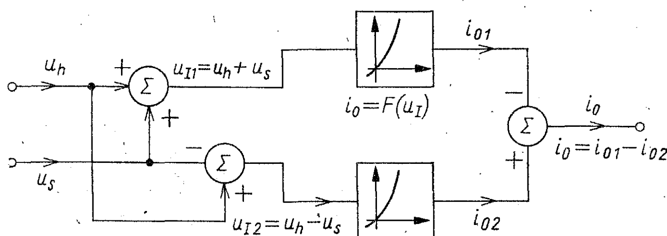
Z równania (7/32) widać, że przy zastosowaniu do elementu nieliniowego przybliżenia parametrycznego dostajemy

$$g_p = \frac{1}{2} g_{m1} \tag{7/34}$$

Przy wykorzystaniu przemiany wyższego rzędu, np. dla $\omega_p = k\omega_h - \omega_s$ otrzymalibyśmy

$$g_{pk} = \frac{1}{2} g_{mk} \tag{7/35}$$

Zauważmy ponadto, że dla elementu o charakterystyce kwadratowej $g_m(t) = g_{m1}\cos\omega_h t$, to znaczy sinusoidalne napięcie heterodyny wywołuje również sinusoidalną zmianę konduktancji parametrycznej.



7/5 Układ pojedynczo zrównoważony

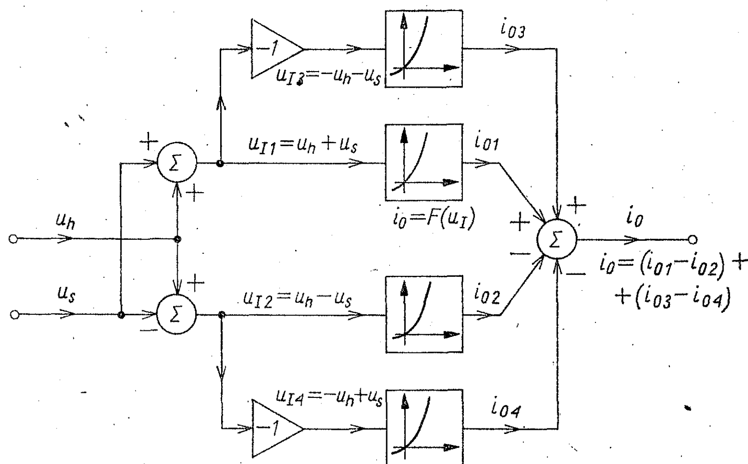
W analogiczny sposób wyznacza się konduktancję przemiany przy stosowaniu analizy nieliniowej. Można wówczas badać w sposób jawny zmiany jej wartości w zależności od amplitudy napięcia heterodyny. Rozważania takie przeprowadzimy przy omawianiu rozwiązań szczegółowych.

Pewne korzystne wyniki można uzyskać stosując układy zrównoważone, gdyż wówczas niektóre spośród sygnałów niepożądanych ulegają kompensacji. Rozważmy w związku z tym układ funkcjonalny z rys. 7/5, nazywany *układem*

pojedynczo zrównoważonym. Przyjmując, że charakterystyki elementów nieliniowych są identyczne i określone przez (7/18) możemy napisać

$$i_O = i_{O1} - i_{O2} = F(u_h + u_s) - F(u_h - u_s) =$$
$$= 4b_2 u_s u_h + 2b_1 u_s + \sum_{k=3}^{n} b_k[(u_h+u_s)^k - (u_h-u_s)^k] \qquad (7/36)$$

Z porównania zależności (7/36) i (7/19) widać, że wyraz zawierający iloczyn $u_s u_h$ ma teraz dwukrotnie większą wartość, niż w układzie niezrównoważonym. Zauważmy również, że gdy $u_s = 0$, to także $i_O = 0$, a więc na wyjściu nie pojawia się składnik o pulsacji heterodyny. Jest to istotne, gdyż sygnał ten wytwarzany lokalnie ma stosunkowo dużą amplitudę, co utrudnia jego filtrację. Przy $u_s \neq 0$ składnik o pulsacji ω_h wystąpi w wyniku istnienia wyrazów wyższego stopnia, ale jego amplituda będzie mniejsza, niż w układzie z rys. 7/3. Można wykazać ponadto, że kompensacji ulegną niektóre ze składowych kombinacyjnych.



7/6 Układ podwójnie zrównoważony

Dodatkowe korzyści daje zastosowanie układu podwójnie zrównoważonego, który został pokazany na rys. 7/6. Otrzymujemy wówczas

$$i_O = (i_{O1} - i_{O2}) + (i_{O3} - i_{O4}) =$$
$$= [F(u_h+u_s) - F(u_h-u_s)] + [F(-u_h-u_s) - F(u_h+u_s)]$$
$$= 8b_2 u_s u_h + \sum_{k=2}^{l} 2b_{2k}[(u_h+u_s)^{2k} - (u_h-u_s)^{2k}] \qquad (7/37a)$$

gdzie

$$l = \begin{cases} n/2; & n \text{ — parzyste} \\ (n-1)/2; & n \text{ — nieparzyste} \end{cases} \qquad (7/37b)$$

Jak widać, wyraz pożądany, zawierający iloczyn $u_h u_s$, ma teraz wartość czterokrotnie większą, niż w układzie niezrównoważonym i dwukrotnie większą, niż

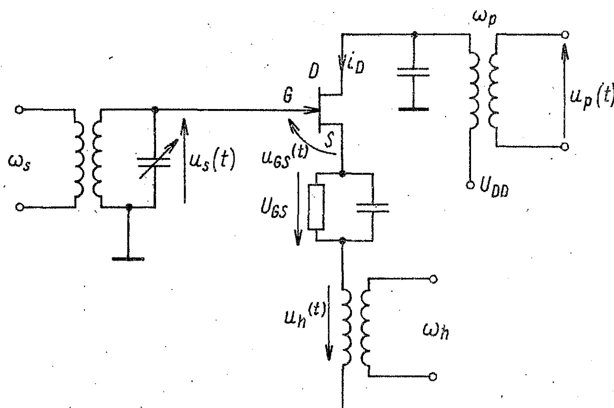
w układzie pojedynczo zrównoważonym. Oprócz tego $i_O = 0$ przy $u_s = 0$ oraz przy $u_h = 0$, a więc żaden z sygnałów wejściowych nie pojawia się na wyjściu, gdy działa pojedynczo. Nie występuje również wyraz powodujący powstawanie modulacji skrośnej. Ponadto, w porównaniu z układem pojedynczo zrównoważonym, dalsze składowe kombinacyjne ulegają redukcji.

Jak zobaczymy w innym miejscu, zrównoważenie układu powoduje również zwiększenie zakresu liniowej pracy mieszacza, w którym amplituda sygnału o częstotliwości pośredniej jest proporcjonalna do amplitudy sygnału wejściowego.

7.2 PRZYKŁADY ROZWIĄZAŃ UKŁADOWYCH

7.2.1 Mieszacz z tranzystorem polowym

Obydwa znane typy tranzystorów unipolarnych, FET i MOSFET, charakteryzują się tym, że w pewnych obszarach polaryzacji bramki charakterystyka statyczna prądu drenu w funkcji napięcia bramka-źródło jest nieomal dokładnie kwadratowa. Ze względu na wynikające stąd zalety tranzystory unipolarne są często stosowane w układach przemiany częstotliwości. Omówimy tutaj mieszacz na



7/7 Mieszacz z tranzystorem polowym

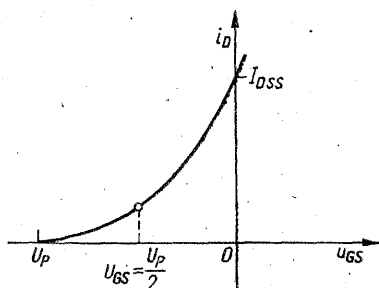
złączowym tranzystorze polowym z kanałem n, którego układ jest przedstawiony na rys. 7/7. Jeżeli przyjmiemy, że tranzystor pracuje w obszarze nasycenia, to jego charakterystyka przejściowa (rys. 7/8) może być przybliżona zależnością

$$i_D = I_{DSS}\left(1-\frac{u_{GS}}{U_P}\right)^2 \tag{7/38}$$

gdzie U_P jest napięciem odcięcia, a I_{DSS} prądem drenu przy $u_{GS} = 0$ oraz $u_{DS} = -U_P$. Z rys. 7/7 widać, że w obwodzie bramki działa suma napięć

$$u_{GS}(t) = U_{GS}+u_s(t)+u_h(t) \tag{7/39}$$

a więc układ zastępczy mieszacza można przedstawić w sposób pokazany na rys.



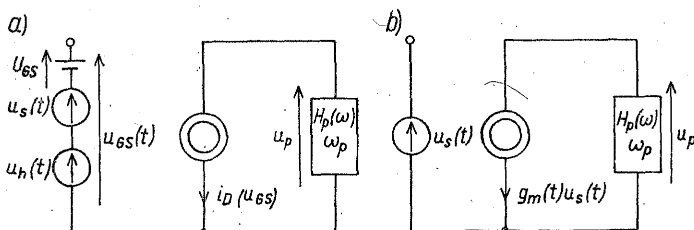
7/8 Charakterystyka przejściowa tranzystora polowego

7/9a. Jeśli zastosujemy przybliżenie małosygnałowe, omówione w p. 7.1.2, to otrzymamy układ parametryczny z rys. 7/9b.

Konduktancję parametryczną wyznaczymy przy $u_s = 0$. Jak widać z równania (7/39), sygnał duży ma teraz składową stałą U_{GS}, otrzymujemy zatem

$$g_m(t) = \left.\frac{\partial i_D}{\partial u_{GS}}\right|_{u_{GS}=U_{GS}+u_h} = -\left.\frac{2I_{DSS}}{U_P^2}(U_P-u_{GS})\right|_{u_{GS}=U_{GS}+u_h} =$$

$$= -\frac{2I_{DSS}}{U_P^2}[U_P-(U_{GS}+u_h)] \tag{7/40}$$



7/9 Układ zastępczy mieszacza z rys. 7/7: a) nieliniowy; b) parametryczny

Przyjmując, że sygnał heterodyny jest sinusoidalny, $u_h(t) = U_h \cos\omega_h t$, otrzymamy

$$g_m(t) = -\frac{2I_{DSS}}{U_P^2}(U_P-U_{GS})+\frac{2I_{DSS}}{U_P^2}U_h\cos\omega_h t = g_{m0}+g_{m1}\cos\omega_h t \tag{7/41}$$

Przy założeniu, że sygnał wejściowy jest niemodulowany, tj. $u_s(t) = U_s\cos\omega_s t$, prąd drenu wyraża się wzorem

$$i_D(t) = g_m(t)u_s(t) = g_{m0}U_s\cos\omega_s t+$$

$$+\frac{1}{2}g_{m1}U_s[\cos(\omega_h-\omega_s)t+\cos(\omega_h+\omega_s)t] \tag{7/42}$$

Amplituda składowej o pulsacji pośredniej $\omega_p = \omega_h-\omega_s$ wynosi więc

$$I_d(\omega_p) = \frac{1}{2}g_{m1}U_s = \frac{I_{DSS}}{U_P^2}U_hU_s \tag{7/43}$$

a stąd otrzymujemy, że konduktancja przemiany jest określona zależnością

$$g_p = \frac{I_d(\omega_p)}{U_s} = \frac{1}{2} g_{m1} = \frac{I_{DSS}}{U_P^2} U_h \tag{7/44}$$

Zauważmy, że wartość g_p rośnie wraz ze wzrostem amplitudy napięcia heterodyny. Przypomnijmy w związku z tym, że zależność (7/38), na podstawie której otrzymaliśmy (7/44), jest słuszna tylko wówczas, gdy

$$U_P \leqslant u_{GS} \leqslant 0 \tag{7/45}$$

Ponieważ założyliśmy, że $U_s \ll U_h$, więc z warunku (7/45) wynika natychmiast, iż największa wartość U_h, jaką można zastosować bez naruszania tego warunku

$$U_h = \frac{|U_P|}{2} \tag{7/46}$$

przy napięciu polaryzacji $U_{GS} = U_P/2$. Podstawiając równanie (7/46) do (7/44) dostajemy, że wówczas

$$g_p = \frac{1}{2} g_{m1} = \frac{I_{DSS}}{2|U_P|} \tag{7/47}$$

Dla podanych wartości U_h i U_{GS} wzór (7/41) przyjmuje postać

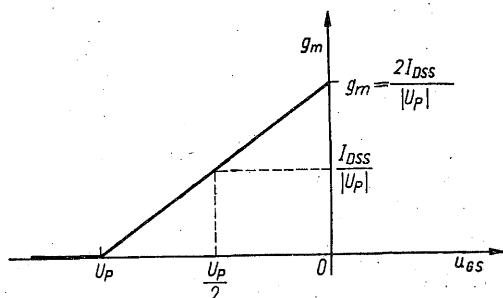
$$g_m(t) = \frac{I_{DSS}}{|U_P|} (1+\cos\omega_h t) \tag{7/48}$$

czyli konduktancja parametryczna zmienia się wokół wartości $I_{DSS}/|U_P|$ ($u_{GS} = U_P/2$) od $[g_m(t)]_{\min} = 0$ ($u_{GS} = U_P$) do $[g_m(t)]_{\max} = 2I_{DSS}/|U_P|$($u_{GS} = 0$). Konduktancja g_p określona wzorem (7/47) wynosi więc połowę transkonduktancji małosygnałowej wyznaczonej w punkcie $u_{GS} = U_P/2$, lub też inaczej

$$g_p = 0{,}25\ [g_m(t)]_{\max} \tag{7/49}$$

gdzie $[g_m(t)]_{\max}$ jest transkonduktancją wyznaczoną dla $u_{GS} = 0$. Przebieg małosygnałowej transkonduktancji tranzystora dla $u_{GS} \leqslant 0$ jest pokazany na rys. 7/10.

Zauważmy, że gdybyśmy naruszyli warunek (7/45) przesuwając punkt pracy określony napięciem U_{GS} w kierunku U_P i zwiększając równocześnie amplitudę napięcia heterodyny U_h, to $g_m(t)$ nie byłaby dłużej przebiegiem sinusoidalnym, lecz okresowym. Można pokazać, że jeśli przyjmiemy $U_{GS} = 0{,}536 U_P$ i zwiększymy amplitudę napięcia heterodyny do wartości $U_h = 0{,}536|U_P|$($u_{GS} \leqslant 0$) —



7/10 Wykres transkonduktancji różniczkowej tranzystora polowego

czemu odpowiada kąt przepływu prądu $i_D(t)$ $\theta = 120°$ — to konduktancja przemiany osiągnie wartość maksymalną

$$g_p = 0{,}268[g_m(t)]_{max} \tag{7/50}$$

Dostajemy w ten sposób nieznaczny wzrost konduktancji przemiany w porównaniu z wartością (7/49), ale równocześnie $g_m(t)$ zawiera wyższe harmoniczne, a więc otrzymujemy dodatkowe niepożądane składowe o pulsacjach kombinacyjnych $|k\omega_h \pm \omega_s|$.

Z zależności (7/44) widać, że jeśli amplituda heterodyny pozostaje stała, to stała jest również konduktancja przemiany, a wówczas — zgodnie z zależnością (7/43) — zachodzi liniowa zależność pomiędzy $I_d(\omega_p)$ oraz U_s. Jeśli więc sygnał wejściowy jest sygnałem zmodulowanym amplitudowo, $u_s(t) = U_s(t)\cos\omega_s t$, to również zmiany obwiedni tego sygnału przeniosą się w sposób liniowy na zmiany obwiedni prądu wyjściowego o pulsacji ω_p. Przyjmując, że filtr wyjściowy usunie składowe niepożądane możemy napisać, iż napięcie wyjściowe $u_p(t)$ wyrazi się, zgodnie z zależnościami (7/42), (7/43) i (7/44), następującym wzorem:

$$u_p(t) = [g_p U_s(t)\cos\omega_p t] * h_p(t) \tag{7/51}$$

Łatwo sprawdzić, że gdybyśmy zamiast przybliżenia małosygnałowego zastosowali do omawianego układu analizę nieliniową, to przy tych samych ograniczeniach na u_{GS} otrzymalibyśmy taką samą wartość g_p, określoną wzorami (7/44) oraz (7/47). Dodatkowo uzyskalibyśmy tylko informację, że oprócz składowych uwidocznionych w (7/42) wystąpią także przebiegi o pulsacjach $2\omega_p$ i $2\omega_s$ oraz nastąpi pewne przesunięcie spoczynkowego punktu pracy. Wynika stąd, że przy sinusoidalnym napięciu heterodyny zniekształcenia intermodulacyjne może spowodować sygnał lustrzany o pulsacji $\omega_p/2$. Jeśli U_h nie przekroczy wartości $|U_P|/2$, to amplituda sygnału wejściowego U_s nie ma w zasadzie wpływu na te zniekształcenia. Gdy w przebiegu $u_h(t)$ istnieje także druga harmoniczna, to zniekształcenia może spowodować również sygnał o pulsacji $\omega_h + \omega_s$.

7.2.2 Mieszacze z tranzystorami bipolarnymi

Rozważmy teraz układ pokazany na rys. 7/11, który stanowi przykład prostego mieszacza z tranzystorem bipolarnym. Analizę układu przeprowadzimy zakładając, że tranzystor pracuje w obszarze aktywnym, a prąd emitera może być przybliżony zależnością

$$i_E = \frac{i_C}{\alpha} = I_{ES}\exp\frac{u_{BE}}{U_T} \tag{7/52}$$

Jak pokazano w dodatku D2, przy zastosowanym układzie polaryzacji spoczynkowy punkt pracy tranzystora ($u_s = u_h = 0$) jest określony przez współrzędne (U_{BEQ}, I_{EQ}), związane ze sobą równaniami

$$U_{BEQ} = U_T \ln\frac{I_{EQ}}{I_{ES}} \tag{7/53}$$

$$I_{EQ} = \frac{U_{BB} - U_{BEQ}}{R_E + (1-\alpha) R_B} \tag{7/54}$$

gdzie

$$U_{BB} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{CC} \quad \text{oraz} \quad R_B = R_1 || R_2 \tag{7/55}$$

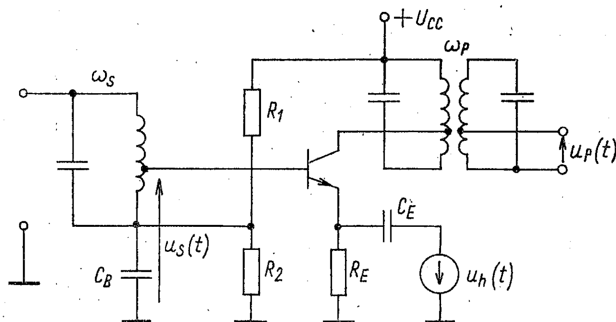
Załóżmy teraz, że w układzie działają oba zaznaczone na schemacie sygnały zmienne, to znaczy niemodulowany sygnał wejściowy $u_s(t) = U_s \cos\omega_s t$ oraz napięcie heterodyny $u_h(t) = U_h \cos\omega_h t$. Jeśli przyjmiemy, że pojemności C_E i C_B stanowią w przybliżeniu zwarcie dla tych sygnałów, to prąd emitera możemy wyrazić zależnością

$$i_E(t) = I_{ES} \exp \frac{U_{BE}}{U_T} e^{x_h \cos\omega_h t} e^{x_s \cos\omega_s t} \tag{7/56}$$

przy czym, dla wygody zapisu, zastosowaliśmy oznaczenia $x_s = U_s/U_T$ oraz $x_h = U_h/U_T$. U_{BE} jest wartością średnią napięcia baza-emiter

$$U_{BE} = U_{BEQ} - \Delta U \tag{7/57}$$

a ΔU oznacza przyrost względem wartości spoczynkowej U_{BEQ}, wywołany działaniem sygnałów zmiennych $u_h(t)$ i $u_s(t)$.



7/11 Mieszacz z tranzystorem bipolarnym

Z uwagi na rodzaj nieliniowości, z jaką mamy do czynienia, wykorzystanie już w tym miejscu założenia, że $u_s(t)$ jest sygnałem małym i zastosowanie przybliżenia parametrycznego — jak to robiliśmy w p. 7.2.1 — nie jest celowe z powodów, które wyjaśnimy później. Dlatego zastosujemy dalej analizę nieliniową, rozwijając każdą z funkcji wykładniczych w szereg Fouriera. Otrzymamy w ten sposób

$$i_E(t) = I_{ES} \exp \frac{U_{BE}}{U_T} \left[I_0(x_h) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(x_h) \cos n\omega_h t \right] \times$$

$$\times \left[I_0(x_s) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(x_s) \cos n\omega_s t \right] \tag{7/58}$$

Symbole $I_n(x)$ oznaczają zmodyfikowane funkcje Bessela. Zależność (7/58) wygodniej jest zapisać w postaci

$$i_E(t) = I_{E0}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_n(x_h)}{I_0(x_h)}\cos n\omega_h t\right]\times$$

$$\times\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_n(x_s)}{I_0(x_s)}\cos n\omega_s t\right] \qquad (7/59)$$

gdzie I_{E0} stanowi wartość średnią prądu emitera i wyraża się wzorem

$$I_{E0} = I_{EQ}\exp\left(\frac{-\Delta U}{U_T}\right)I_0(x_h)I_0(x_s) \qquad (7/60)$$

Jak to pokazano w dodatku D2, wzór (D2/28), pomiędzy I_{E0} i I_{EQ} istnieje związek

$$I_{E0} = I_{EQ}\left[1+\frac{\ln I_0(x_h)I_0(x_s)}{X_R}\right] \qquad (7/61a)$$

przy czym

$$X_R = \frac{U_{BB}-U_{BEQ}}{U_T} \qquad (7/61b)$$

Wykonując w równaniu (7/59) mnożenie szeregów otrzymamy składowe o pulsacjach $|k\omega_h \pm l\omega_s|$, gdzie k i l są liczbami naturalnymi. Jeśli wypiszemy tylko początkowe wyrazy, które nas interesują, to

$$i_E(t) = I_{E0}\left[1+2\frac{I_1(x_s)}{I_0(x_s)}\cos\omega_s t+2\frac{I_1(x_h)}{I_0(x_h)}\cos\omega_h t\right.$$

$$\left.+4\frac{I_1(x_s)}{I_0(x_s)}\frac{I_1(x_h)}{I_0(x_h)}\cos\omega_h t\cos\omega_s t+\ldots\right]. \qquad (7/62)$$

Amplitudy składowych o pulsacjach ω_s, ω_h i $\omega_p = \omega_h-\omega_s$ wyrażają się więc następującymi wzorami:

$$I_e(\omega_s) = 2I_{E0}\frac{I_1(x_s)}{I_0(x_s)} \qquad (7/63)$$

$$I_e(\omega_h) = 2I_{E0}\frac{I_1(x_h)}{I_0(x_h)} \qquad (7/64)$$

$$I_e(\omega_p) = 2I_{E0}\frac{I_1(x_s)}{I_0(x_s)}\frac{I_1(x_h)}{I_0(x_h)} \qquad (7/65)$$

Stosunek

$$G_p = \frac{I_c(\omega_p)}{U_s} = \frac{\alpha I_e(\omega_p)}{U_s} \qquad (7/66)$$

nazywamy *wielkosygnałową konduktancją przemiany*, gdyż amplituda $I_e(\omega_p)$ została wyznaczona za pomocą nieliniowej analizy układu, bez nakładania ograniczeń

na poziom sygnału $u_s(t)$. Wykorzystując wzór (7/65) oraz zależność $U_s = x_s U_T$ możemy napisać, że

$$G_p = \frac{\alpha I_{E0}}{U_T} \frac{I_1(x_h)}{I_0(x_h)} \frac{2I_1(x_s)}{x_s I_0(x_s)} \qquad (7/67)$$

Należy zauważyć, że G_p zależy w sposób nieliniowy zarówno od amplitudy napięcia heterodyny (x_h), jak i amplitudy sygnału wejściowego (x_s), podczas gdy dla prawidłowej pracy mieszacza jej wartość powinna być stała, lub też mówiąc inaczej konieczne jest, aby pomiędzy $I_e(\omega_p)$ oraz U_s istniała zależność liniowa. Zbadajmy więc pod tym kątem widzenia wyrażenie (7/65). Jeśli przyjmiemy, że x_h = const (tzn. U_h nie ulega zmianom) oraz $U_s \ll U_h$ tak, że zmiany U_s nie będą wpływały na I_{E0} — patrz wzory (7/60) i (7/61) — to o rodzaju zależności $I_e(\omega_p)$ od U_s decyduje iloraz $I_1(x_s)/I_0(x_s)$. Rozwinięcie tego stosunku dla małego argumentu x_s w szereg potęgowy można przybliżyć wyrażeniem

$$\frac{I_1(x_s)}{I_0(x_s)} \approx \frac{x_s}{2}\left(1 - \frac{x_s^2}{8} + \frac{x_s^4}{16}\right) \qquad (7/68)$$

Jeśli teraz zażądamy — przykładowo — że pierwszy wyraz nieliniowy może mieć wartość nie większą, niż 2% wartości wyrazu liniowego, tzn.

$$x_s^2/8 \leqslant 0{,}02 \quad \text{lub} \quad x_s \leqslant 0{,}4 \qquad (7/69)$$

to amplituda sygnału wejściowego zostanie ograniczona nierównością

$$U_s \leqslant 0{,}4 U_T \approx 10{,}4 \text{ mV} \qquad (7/70)$$

Gdy sygnał $u_s(t)$ jest zmodulowany, to (7/70) można zapisać w następujący sposób:

$$|u_s(t)|_{\max} \leqslant 10{,}4 \text{ mV} \qquad (7/71)$$

Przy spełnieniu warunku (7/69) zależność (7/65) przyjmuje pożądaną postać liniową

$$I_e(\omega_p) = I_{E0} \frac{I_1(x_h)}{I_0(x_h)} x_s = g_{we} \frac{I_1(x_h)}{I_0(x_h)} U_s \qquad (7/72)$$

gdzie

$$g_{we} = \frac{I_{E0}}{U_T} = \frac{g_m}{\alpha} \qquad (7/73)$$

jest małosygnałową konduktancją wejściową widzianą z zacisków generatora $u_s(t)$, wyznaczoną w punkcie pracy określonym przez współrzędne (I_{E0}, U_{BE}), a g_m wyznaczoną w tym samym punkcie transkonduktancją różniczkową tranzystora. Wykorzystując równanie (7/73) i przyjmując $\alpha = 1$ możemy napisać

$$I_e(\omega_p) = g_m \frac{I_1(x_h)}{I_0(x_h)} U_s \qquad (7/74)$$

a stąd otrzymujemy, że małosygnałowa konduktancja przemiany

$$g_p = g_m \frac{I_1(x_h)}{I_0(x_h)} \qquad (7/75)$$

Porównajmy teraz wielkości G_p oraz g_p wykorzystując wyrażenia (7/67) i (7/75).

Można pokazać, że dla $x_s \to 0$ stosunek $2I_1(x_s)/I_0(x_s) \to x_s$ (patrz np. rys. D2/2b), a stąd wynika, że

$$G_p \xrightarrow[x_s \to 0]{} g_p = g_m \frac{I_1(x_h)}{I_0(x_h)} \tag{7/76}$$

Powróćmy teraz na chwilę do początku naszych rozważań i zamieszczonej tam uwagi o przybliżeniu małosygnałowym. Otóż łatwo sprawdzić, że gdybyśmy do zależności (7/56) zastosowali przybliżenie parametryczne, to otrzymalibyśmy na małosygnałową konduktancję przemiany g_p wyrażenie identyczne z (7/75). Nie uzyskalibyśmy jednak tą drogą warunku (7/69), który określa maksymalną amplitudę sygnału $u_s(t)$, przy której takie przybliżenie jest słuszne. Można by co prawda wykorzystać w tym celu oszacowanie błędu podane wzorem (7/29), ale trudno byłoby w ten sposób otrzymać tak czytelny i prosty warunek, jak (7/69).

Jak widać z zależności (7/75), wartość konduktancji przemiany zależy od x_h, czyli od amplitudy napięcia heterodyny. Z przebiegu funkcji Bessela wiadomo, że przy wzroście x_h stosunek $I_1(x_h)/I_0(x_h)$ zmierza bardzo szybko do swej wartości asymptotycznej, która wynosi 1 (rys. D2/2b). Na przykład $I_1(2)/I_0(2) \approx 0{,}7$, $I_1(4)/I_0(4) \approx 0{,}86$, a $I_1(6)/I_0(6) \approx 0{,}92$. Widać stąd, że stosowanie $x_h > 6$ nie przynosi już widocznych korzyści. Wartości $x_h = 6$ odpowiada $U_h = 6U_T \approx$ ≈ 150 mV. Zauważmy jeszcze, że dla $x_h \geqslant 6$ ewentualne zmiany amplitudy napięcia heterodyny wpływają w bardzo małym stopniu na wartości g_p. Gdy x_h jest małe, to $I_1(x_h)/I_0(x_h) \approx x_h/2$ i g_p zależy od U_h w sposób liniowy.

Porównując analizowany układ z mieszaczem, w którym zastosowano tranzystor polowy widzimy, że teraz dla $x_h \approx 6$, $g_p \approx g_m$, przy czym wartość g_m można ustalać przez dobór spoczynkowego punktu pracy. W mieszaczu z tranzystorem polowym mieliśmy $g_p = 0{,}5g_m$ z tym, że zmiana punktu pracy tranzystora miała niewielki wpływ na wartość g_p. Równocześnie należy zauważyć, że w mieszaczu z tranzystorem bipolarnym otrzymujemy znacznie więcej sygnałów niepożądanych, które mogą wprowadzić zniekształcenia.

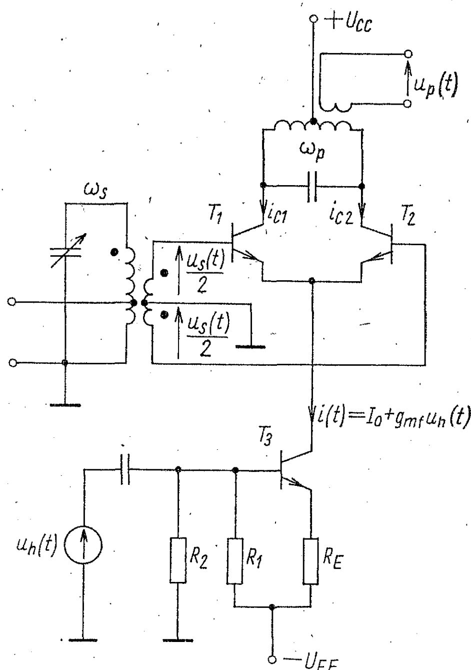
Jeśli na wejście mieszacza z rys. 7/11 zostanie przyłożony sygnał zmodulowany $u_s(t) = U_s(t)\cos\omega_s t$, to przy spełnieniu warunku (7/71) oraz stałej amplitudzie napięcia heterodyny praca układu będzie liniowa i na podstawie zależności (7/74) i (7/75) możemy napisać, że

$$u_p(t) = [g_p U_s(t)\cos\omega_p t] * h_p(t) \tag{7/77}$$

W przeprowadzonej analizie zakładaliśmy, że złącze emiter-baza (czy też bramka-źródło, w przypadku tranzystora polowego) jest złączem idealnym. Istnienie rezystancji szeregowej R_s, która występuje w każdym elemencie rzeczywistym, lub też jest wprowadzana z zewnątrz (np. rezystancje wewnętrzne źródeł) powoduje zawsze pewną linearyzację charakterystyki wynikowej. Zagadnienie to zostało omówione w dodatku D1. Pokazano tam również, że poza skrajnymi przypadkami, gdy $gR_s \ll 1$ lub $gR_s \gg 1$, gdzie g jest konduktancją różniczkową złącza w spoczynkowym punkcie pracy, wpływ rezystancji R_s jest bardzo trudny

do ujęcia analitycznego. Dlatego nie będziemy się tą sprawą zajmowali; zwrócimy jedynie uwagę, że istnienie R_s powoduje w każdym przypadku zmniejszenie konduktancji przemiany.

Z uwagi na bogate widmo prądu wyjściowego, jakie występuje w mieszaczu z tranzystorem bipolarnym, korzystne jest stosowanie układów zrównoważonych. Na rysunku 7/12 jest pokazany układ, w którym wykorzystuje się parę różnicową



7/12 Mieszacz z zastosowaniem układu różnicowego

Tranzystor T_3 pracujący z silnym emiterowym sprzężeniem zwrotnym stanowi dla pary różnicowej źródło prądowe o wydajności

$$i(t) = I_0 + g_{mf} u_h(t) \tag{7/78}$$

gdzie

$$g_{mf} = \frac{g_m}{1+g_m R_E} \tag{7/79}$$

a g_m jest transkonduktancją różniczkową. Dla $g_m R_E \gg 1$ otrzymujemy

$$g_{mf} \approx \frac{1}{R_E} \tag{7/80}$$

Składowa stała prądu I_0 wyraża się wzorem ($\alpha = 1$)

$$I_0 = \frac{U_{BB} - U_{BEQ}}{R_E + (1-\alpha) R_1 || R_2} = \frac{U_{BB} - U_{BEQ}}{R_E} \tag{7/81}$$

gdzie

$$U_{BB} = \frac{R_2}{R_1+R_2} U_{EE} \tag{7/82}$$

a U_{BEQ} jest napięciem spoczynkowym przy $u_h(t) = 0$. Jak pokazano w dodatku D3 — wzór (D3/9) — wyjściowy prąd różnicowy określony jest zależnością ($\alpha = 1$)

$$i_R(t) = i_{C1}(t) - i_{C2}(t) = i(t)\,\mathrm{tgh}\,\frac{u_s(t)}{2U_T} \tag{7/83}$$

Jeśli spełniony jest warunek

$$|u_s(t)|_{\max} \ll 2U_T \tag{7/84}$$

to zamiast (7/83) możemy napisać

$$i_R \approx i(t)\frac{u_s(t)}{2U_T} \tag{7/85}$$

Przyjmując, że napięcie heterodyny jest sinusoidalne, a sygnał $u_s(t)$ niemodulowany dostajemy

$$i_R = \left(I_0 + \frac{U_h}{R_E}\cos\omega_h t\right)\frac{U_s}{2U_T}\cos\omega_s t = \frac{I_0}{2U_T}U_s\cos\omega_s t +$$
$$+\frac{U_h U_s}{4R_E U_T}\left[\cos(\omega_h-\omega_s)t+\cos(\omega_h+\omega_s)t\right] \tag{7/86}$$

Ponieważ amplituda składowej prądu $i_R(t)$ o pulsacji pośredniej $\omega_p = \omega_h - \omega_s$

$$I_r(\omega_p) = \frac{U_h U_s}{4R_E U_T} \tag{7/87}$$

więc konduktancja przemiany

$$g_p = \frac{U_h}{4R_E U_T} \tag{7/88}$$

Jeśli założymy, że $U_h = \mathrm{const}$, a $u_s(t) = U_s(t)\cos\omega_s t$, to napięcie $u_p(t)$ można wyrazić wzorem

$$u_p(t) = [g_p U_s(t)\cos\omega_p t] * h_p(t) \tag{7/89}$$

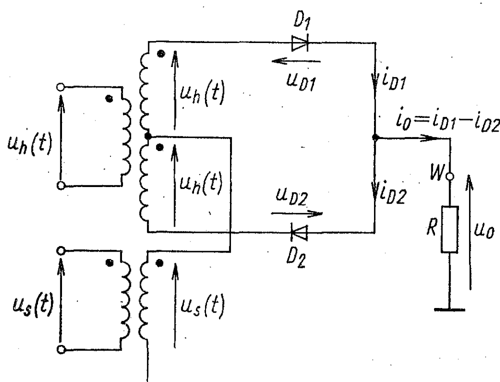
gdyż filtr pasmowy usunie sygnały niepożądane. Zauważmy przy tym, że jeśli tranzystory T_1 i T_2 są identyczne, a obwody wejściowy i wyjściowy symetryczne, to dzięki zrównoważeniu układu sygnał heterodyny nie pojawia się ani na wyjściu, ani na wejściu mieszacza, co stanowi poważną zaletę omawianego rozwiązania. Przy idealnej symetrii układu i sinusoidalnym napięciu heterodyny jedynym sygnałem zakłócającym jest tutaj sygnał lustrzany.

7.2.3 Zrównoważone mieszacze diodowe

Bardzo ważną klasę omawianych układów stanowią mieszacze diodowe zarówno ze względu na zakres częstotliwości, w którym mogą pracować, jak i z uwagi na łatwość tworzenia układów pojedynczo i podwójnie zrównoważonych, których zalety omawialiśmy w p. 7.1.2.

Jako pierwszy przeanalizujemy mieszacz pojedynczo zrównoważony, którego schemat jest podany na rys. 7/13. Załóżmy, że charakterystyki diod są identyczne i można je opisać zależnością

$$i_D = I_S\left[\exp\frac{u_D}{U_T}-1\right] \tag{7/90}$$



7/13 Mieszacz diodowy pojedynczo zrównoważony

Ponieważ prąd wyjściowy i_O wyraża się wzorem

$$i_O = i_{D1}-i_{D2} \tag{7/91}$$

a z bilansu napięć wynika, że

$$\begin{aligned} u_{D1} &= u_h-u_O+u_s \\ u_{D2} &= u_h+u_O-u_s \end{aligned} \tag{7/92}$$

gdzie

$$u_O = Ri_O \tag{7/93}$$

więc możemy napisać

$$i_O = I_S\left\{\exp\left[\frac{u_h}{U_T}\left(1-\frac{u_O}{u_h}\right)+\frac{u_s}{U_T}\right]-\exp\left[\frac{u_h}{U_T}\left(1+\frac{u_O}{U_T}\right)-\frac{u_s}{U_T}\right]\right\} \tag{7/94}$$

Jest to zależność uwikłana, gdyż prąd i_O występuje po obu jej stronach. Zauważmy jednak, że ze względu na zrównoważenie układu, przy $u_s = 0$ zachodzi równość $i_{D1} = i_{D2}$, a stąd wynika iż wówczas $u_O = 0$. Ponieważ dalej będzie nas interesować przypadek, gdy $|u_s(t)|_{max} \ll |u_h(t)|_{max}$, więc możemy przyjąć, że

$$\left|\frac{u_O}{u_h}\right| \ll 1 \tag{7/95}$$

i pominąć ten wyraz w zależności (7/94). W wyniku tego uproszczenia otrzymujemy

$$i_O = 2I_S\exp\left(\frac{u_h}{U_T}\right)\sinh\left(\frac{u_s}{U_T}\right) \tag{7/96}$$

Jeżeli spełniona zostanie nierówność

$$|u_s(t)|_{\max} \ll U_T \tag{7/97}$$

to

$$\sinh\left(\frac{u_s}{U_T}\right) \approx \frac{u_s}{U_T} \tag{7/98}$$

i zamiast zależności (7/96) możemy napisać

$$i_O(t) = 2\frac{I_S}{U_T} u_s(t)\exp\left[\frac{u_h(t)}{U_T}\right] \tag{7/99}$$

Przyjmijmy, jak to już zrobiliśmy poprzednio, że $u_h(t) = U_h\cos\omega_h t$ oraz $u_s(t) = U_s\cos\omega_s t$. Po wprowadzeniu oznaczenia $x_h = U_h/U_T$ i rozwinięciu funkcji wykładniczej w szereg Fouriera otrzymamy

$$\begin{aligned} i_O(t) &= 2\frac{I_S}{U_T} U_s\cos\omega_s t\left[I_0(x_h)+2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(x_h)\cos n\omega_h t\right] \\ &= 2\frac{I_S}{U_T}\Big\{U_s I_0(x_h)\cos\omega_s t+2U_s I_1(x_h)\cos\omega_h t\cos\omega_s t \\ &\quad +\sum_{n=2}^{\infty} U_s I_n(x_h)[\cos(n\omega_h-\omega_s)t+\cos(n\omega_h+\omega_s)t] \end{aligned} \tag{7/100}$$

Jak widać z równania (7/100), w prądzie $i_O(t)$ nie występuje składowa o pulsacji heterodyny. Amplituda składowej o pulsacji pośredniej $\omega_p = \omega_h - \omega_s$

$$I_o(\omega_p) = 2\frac{I_S}{U_T} U_s I_1(x_h) \tag{7/101}$$

a stąd konduktancja przemiany

$$g_p = 2\frac{I_S}{U_T} I_1(x_h) \tag{7/102}$$

Przejdźmy teraz do układu podwójnie zrównoważonego, podanego na rys. 7/14. Z bilansu napięć wynika, że

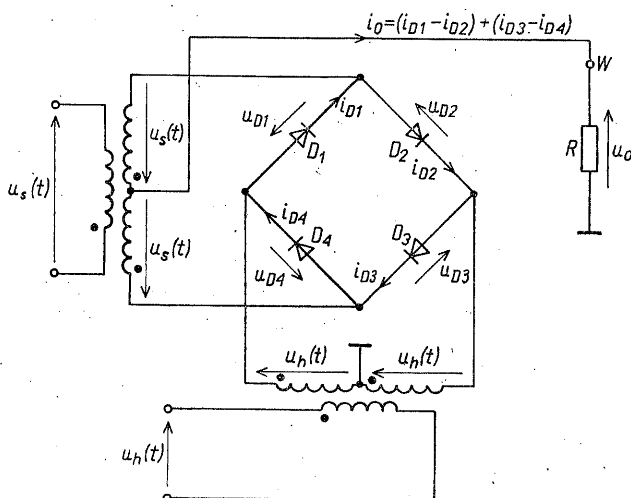
$$\begin{aligned} u_{D1} &= u_h+u_s-u_O \\ u_{D2} &= u_h-u_s+u_O \\ u_{D3} &= -u_h-u_s-u_O \\ u_{D4} &= -u_h+u_s+u_O \end{aligned} \tag{7/103}$$

a prąd i_O wyraża się wzorem

$$i_O = (i_{D1}-i_{D2})+(i_{D3}-i_{D4}) \tag{7/104}$$

Jeśli tak jak poprzednio przyjmiemy, że jest spełniona nierówność (7/95), to w wyniku prostych przekształceń otrzymamy zależność

$$i_O(t) = 4I_S\sinh\left[\frac{u_h(t)}{U_T}\right]\sinh\left[\frac{u_s(t)}{U_T}\right] \tag{7/105}$$



7/41 Mieszacz diodowy podwójnie zrównoważony

Dla sinusoidalnego napięcia heterodyny słuszne jest rozwinięcie

$$\sinh[x_h \cos\omega_h t] = 2\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n-1}(x_h)\cos[(2n-1)\omega_h]t \tag{7/106}$$

Przyjmując, że sygnał $u_s(t)$ jest niemodulowany i zakładając spełnienie zależności (7/97) oraz (7/98) dostaniemy ostatecznie, że

$$i_O(t) = 4\frac{I_S}{U_T}\Big\{2U_s I_1(x_h)\cos\omega_h t\cos\omega_s t + \sum_{n=2}^{\infty} U_s I_{2n-1}(x_h)[\cos[(2n-1)\omega_h-\omega_s]t + \cos[(2n-1)\omega_h+\omega_s]t]\Big\} \tag{7/107}$$

W sygnale wyjściowym $i_O(t)$ nie występuje teraz ani składowa o pulsacji ω_h, ani też składowa o pulsacji ω_s. Ponadto nastąpiła kompensacja części składowych o pulsacjach kombinacyjnych. Amplituda składowej o pulsacji $\omega_p = \omega_h - \omega_s$

$$I_o(\omega_p) = 4\frac{I_S}{U_T} I_1(x_h) U_s \tag{7/108}$$

a stąd otrzymujemy wyrażenie na konduktancję przemiany

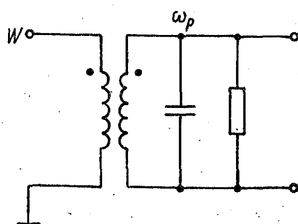
$$g_p = 4\frac{I_S}{U_T} I_1(x_h) \tag{7/109}$$

Jak widać, ma ona wartość dwukrotnie większą, niż w układzie pojedynczo zrównoważonym.

Zależności (7/102) i (7/109) wskazują na to, że konduktancja przemiany rośnie wraz ze wzrostem amplitudy napięcia heterodyny, gdyż $I_1(x_h)$ narasta

monotonicznie przy wzroście $x_h = U_h/U_T$. Zwiększanie amplitudy U_h powoduje jednakże wzrost rezystancji szeregowej diod. Niestety i w tym przypadku próba uwzględnienia w analizie wpływu tej rezystancji na pracę mieszacza nie prowadzi do żadnych czytelnych wyników, poza skrajnymi przypadkami, gdy $g_d R_s \ll 1$ (założenie wykorzystane w przeprowadzonych rozważaniach), lub $g_d R_s \gg 1$ — gdzie g_d jest konduktancją różniczkową diody. Jakościowy charakter wpływu R_s jest wciąż ten sam: linearyzacja charakterystyk wynikowych diod, co powoduje zmniejszenie wartości konduktancji przemiany.

Ponieważ na rys. 7/13 i 7/14 przyjęliśmy, że obciążenie mieszacza stanowi rezystancja R, na rys. 7/15 pokazano przykładowo wyjściowy filtr pasmowy,



7/15 Przykład filtru wyjściowego do układu z rys. 7/13 i 7/14

który może zostać dołączony do zaznaczonego na schemacie zacisku W. Rezystancję R można wówczas traktować jako rezystancję wnoszoną do obwodu pierwotnego. Jeśli przyjmiemy, że $i_O(t)$ płynie przez uzwojenie pierwotne tego filtru, a jego selektywność wystarcza do usunięcia składowych niepożądanych, to

$$u_p(t) = [g_p U_s(t)\cos\omega_p t] * h_p(t) \qquad (7/110)$$

Istotną sprawą w pracy mieszaczy zrównoważonych jest zachowanie symetrii układu. Dlatego do ich konstrukcji stosuje się scalone zestawy diodowe, lub że, elementy o specjalnie dobieranych charakterystykach. Zrównoważone mieszacze diodowe (z zastosowaniem diod krzemowych Schottky'ego) wraz z szerokopasmowymi, symetrycznymi transformatorami są produkowane w postaci hermetycznie zamkniętych modułów na różne pasma częstotliwości, przy czym zakres częstotliwości ich pracy rozciąga się od pojedynczych kHz do paru GHz.

Literatura

1. Busgang J. J., Ehrman L., Graham J. W.: Analysis of Nonlinear systems with Multiple Inputs. *Proc. IEEE*, vol. 62, No. 8, pp. 1088—1119, 1974.
2. Clarke K. C., Hess D. T.: *Communication Circuits*: *Analysis and Design*. Addison-Wesley, London 1971.
3. Chramiec J., Wojtkiewicz A.: *Mikrofalowe mieszacze diodowe*. WKŁ, Warszawa 1975.
4. Filipkowski A.: *Układy elektroniczne analogowe i cyfrowe*. WNT, Warszawa 1978.
5. Golde W.: *Układy elektroniczne*. T. II, WNT, Warszawa 1976.
6. Korzec Z., Kacprzak T.: *Tranzystory polowe złączowe*. WNT, Warszawa 1984.
7. Pawłowski J.: *Nieliniowe układy analogowe*. WKŁ, Warszawa 1979.

8

UKŁADY Z FAZOWĄ PĘTLĄ SPRZĘŻENIA ZWROTNEGO

Układy z fazową pętlą sprzężenia zwrotnego, lub krótko *pętle fazowe* PLL (ang. *phase-locked loop*), znajdują z uwagi na swoje właściwości niezwykle szerokie zastosowanie we współczesnej elektronice, a liczba rozmaitych układów, w których są one wykorzystywane wciąż wzrasta. Na tak szybki rozwój zastosowań wpłynął niewątpliwie fakt podjęcia w latach siedemdziesiątych produkcji pętli fazowych w postaci układów scalonych.

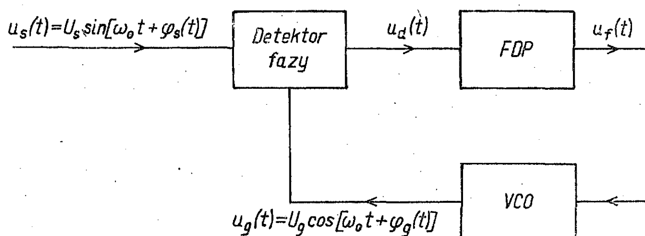
W zależności od rodzaju przetwarzanych sygnałów oraz zastosowanych w pętli bloków funkcjonalnych rozróżniamy *pętle analogowe* — APLL (ang. *analogue phase-locked loop*) i *cyfrowe* — DPLL (ang. *digital phase-locked loop*). Występują również rozwiązania mieszane nazywane często quasi-cyfrowymi. W niniejszym rozdziale, zgodnie z zakresem tematycznym książki, ograniczymy się tylko do omówienia podstawowych właściwości i wybranych zastosowań pętli analogowych.

8.1 ZASADA DZIAŁANIA I PODSTAWOWE WŁAŚCIWOŚCI PĘTLI FAZOWEJ

Pętla fazowa jest układem nieliniowym o bardzo specyficznych właściwościach. Jej analiza nie należy do łatwych i pozwala na ogół na uzyskiwanie jedynie wyników przybliżonych, często tylko w postaci numerycznej. Stąd wiele zjawisk występujących w pętlach fazowych jest wciąż przedmiotem badań i to przy wykorzystaniu bardzo zaawansowanych metod matematycznych. Na szczęście, w większości zastosowań interesuje nas praca pętli w stanie synchronizacji, a wówczas, przy spełnieniu pewnych warunków, można jej działanie opisać modelem liniowym, którego analiza jest znacznie prostsza. Niektóre z jej właściwości można jednak badać tylko w oparciu o model nieliniowy.

8.1.1 Model pętli i jego równanie

Podstawowy schemat funkcjonalny pętli fazowej pokazano na rys. 8/1. Zawiera on *detektor* (komparator) *fazy*, *filtr dolnoprzepustowy* (FDP) oraz *generator przestrajany napięciem* (VCO); w niektórych rozwiązaniach stosuje się także *generatory przestrajane prądem*. Jest to specjalny układ automatycznej regulacji,



8/1 Podstawowy schemat funkcjonalny pętli fazowej

którego zadanie polega na śledzeniu fazy chwilowej sygnału wejściowego $u_s(t)$ przez sygnał wytwarzany w generatorze lokalnym pętli (VCO). Mechanizm działania można krótko ująć tak. Detektor fazy przeprowadza porównanie faz sygnałów $u_s(t)$ i $u_g(t)$ oraz wytwarza sygnał błędu $u_d(t)$, zależny od różnicy tych faz. Po odfiltrowaniu niepożądanych składowych przez filtr dolnoprzepustowy otrzymuje się sygnał $u_f(t)$, który jest podawany na generator VCO przestrajając go w taki sposób, aby różnica faz uległa zmniejszeniu. Przez śledzenie fazy chwilowej sygnału wejściowego uzyskuje się także śledzenie częstotliwości chwilowej tego sygnału przez sygnał $u_g(t)$ — czyli synchronizację częstotliwości obu sygnałów. Dlatego sygnał wejściowy $u_s(t)$ nosi nazwę *sygnału odniesienia*, lub też *sygnału synchronizującego*.

Aby zbadać bliżej właściwości pętli fazowej należy wyprowadzić jej równanie. W tym celu musimy określić rodzaj sygnałów $u_s(t)$ i $u_g(t)$ oraz opisać działanie występujących w niej bloków funkcjonalnych.

Załóżmy, że sygnał wejściowy i przebieg wytwarzany w generatorze VCO mają następujące postacie:

$$\begin{aligned} u_s(t) &= U_s \sin[\omega_o t + \varphi_s(t)] \\ u_g(t) &= U_g \cos[\omega_o t + \varphi_g(t)] \end{aligned} \tag{8/1}$$

gdzie $\varphi_s(t)$ i $\varphi_g(t)$ oznaczają fazy chwilowe każdego z sygnałów. Wynika stąd, że ich pulsacje chwilowe są określone zależnościami:

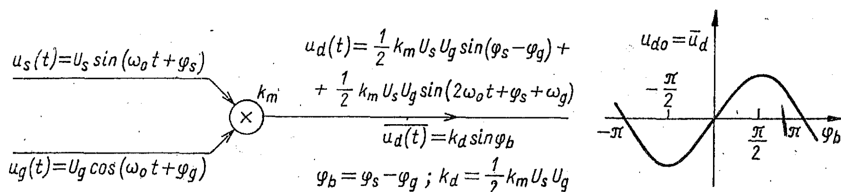
$$\begin{aligned} \omega_s(t) &= \omega_o + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\varphi_s(t)] \\ \varphi_g(t) &= \omega_o + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\varphi_g(t)] \end{aligned} \tag{8/2}$$

Trzy podstawowe bloki występujące w układzie funkcjonalnym z rys. 8/1 można opisać w następujący sposób.

Detektor fazy

Przyjmiemy, że jako detektor fazy został zastosowany układ mnożący, gdyż jest to przypadek o szczególnym znaczeniu zarówno praktycznym jak i poznawczym. Rozważmy najpierw sytuację zilustrowaną na rys. 8/2, gdy na układ mnożący zostały podane dwa przebiegi harmoniczne, czyli załóżmy, że fazy chwilowe występujące w wyrażeniu (8/1) spełniają warunki

$$\varphi_s(t) = \varphi_s = \text{const} \quad \text{oraz} \quad \varphi_g(t) = \varphi_g = \text{const} \tag{8/3}$$



8/2 Układ mnożący jako detektor fazy

Sygnał wyjściowy $u_d(t)$ wyraża się wówczas wzorem

$$u_d(t) = \frac{1}{2} k_m U_s U_g \sin(\varphi_s - \varphi_g) + \frac{1}{2} k_m U_s U_g \sin(2\omega_o t + \varphi_s + \varphi_g) \tag{8/4}$$

gdzie k_m jest stałą układu mnożącego.

Pierwszy składnik, który stanowi wartość średnią $u_d(t)$ zależy od różnicy faz obu sygnałów. Jeśli wprowadzimy oznaczenie $\varphi_b = \varphi_s - \varphi_g$, to możemy napisać

$$\overline{u_d(t)} = U_{d0} = \frac{1}{2} k_m U_s U_g \sin\varphi_b = k_d \sin\varphi_b \tag{8/5}$$

gdzie

$$k_d = \frac{1}{2} k_m U_s U_g \tag{8/6}$$

Zależność (8/5) nazywamy *charakterystyką detektora fazy*. Jak widać, charakterystyka ta jest funkcją okresową o okresie 2π, a współczynnik k_d określa jej nachylenie w punkcie $\varphi_b = 0$. Z zależności (8/5) widać także, że charakterystyka omawianego detektora zależy nie tylko od różnicy faz porównywanych sygnałów, ale również od ich amplitud. Zwróćmy uwagę ponadto na fakt, że gdy $\varphi_b = 0$, to sygnały $u_s(t)$ i $u_g(t)$ są przesunięte względem siebie w fazie o kąt $\pi/2$. Zastosowaną konwencję zapisu $u_s(t)$ i $u_g(t)$ przyjmuje się po to, żeby spoczynkowy punkt pracy pętli, który odpowiada zerowemu sygnałowi wyjściowemu z detektora fazy, był ulokowany w początku układu współrzędnych.

Gdy na układ mnożący podamy sygnały o postaci (8/1), to zamiast (8/4) otrzymamy zależność następującą:

$$u_d(t) = k_d \sin\varphi_b(t) + k_d \sin[2\omega_o t + \varphi_s(t) + \varphi_g(t)] \tag{8/7}$$

przy czym $\varphi_b(t)$ stanowi teraz różnicę faz chwilowych

$$\varphi_b(t) = \varphi_s(t) - \varphi_g(t) \tag{8/8}$$

a k_d określone jest, tak jak poprzednio, wzorem (8/6). Przy pracy układu mnożącego w pętli fazowej wielkość $\varphi_b(t)$ nazywamy błędem fazy. Zauważmy, że pierwszy składnik w równaniu (8/7) jest sygnałem wolnozmiennym, natomiast drugi składnik ma widmo skupione wokół pulsacji $2\omega_o$. Jeśli zatem chcemy wykorzystać układ mnożący jako detektor fazy, a więc uzyskać taki sygnał, który zależy tylko od różnicy faz sygnałów wejściowych, to niepożądany składnik występujący w $u_d(t)$ trzeba usunąć za pomocą filtru dolnoprzepustowego.

Filtr dolnoprzepustowy

O filtrze tym założymy tylko, że jest opisany transmitancją $H(s)$, lub też odpowiedzią impulsową $h(t) = \mathscr{L}^{-1}[H(s)]$. Wpływ jego charakterystyki na pracę pętli zostanie omówiony bardziej szczegółowo w toku dalszych rozważań.

Generator przestrajany napięciem

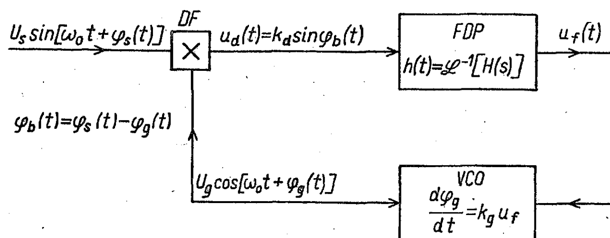
Dla prawidłowego działania pętli jest konieczne, aby pulsacja generatora VCO była monotoniczną funkcją napięcia sterującego; najlepiej, jeśli będzie to zależność liniowa w całym zakresie pracy. Założymy więc, że

$$\omega_g(t) = \omega_o + k_g u_f(t) \tag{8/9}$$

Z porównania zależności (8/9) z (8/2) widać, iż pomiędzy $\varphi_g(t)$ i $u_f(t)$ istnieje związek

$$\frac{d\varphi_g(t)}{dt} = k_g u_f(t) \tag{8/10}$$

Przy spełnieniu podanych wyżej założeń dotyczących poszczególnych podzespołów, układ funkcjonalny z rys. 8/1 można przedstawić tak, jak to pokazano na rys. 8/3. Jeśli przyjmiemy, że filtr dolnoprzepustowy usunie niepożądane



8/3 Schemat funkcjonalny pętli fazowej z układem mnożącym jako detektorem fazy

składniki z sygnału wyjściowego detektora fazy i nie będziemy ich uwzględniać w dalszych rozważaniach, to związek pomiędzy $u_d(t)$ oraz sygnałami $u_s(t)$ i $u_g(t)$ można zapisać w sposób następujący:

$$u_d(t) = k_d \sin\varphi_b(t) \tag{8/11}$$

Na wyjściu filtru otrzymamy zatem

$$u_f(t) = u_d(t) * h(t) = [k_d \sin\varphi_b(t)] * h(t) \tag{8/12}$$

Sygnał ten moduluje częstotliwość drgań generatora VCO, a związek pomiędzy nim i fazą $\varphi_g(t)$ ujmuje zależność (8/10). Podstawiając zależność (8/12) do (8/10) dostaniemy

$$\frac{d\varphi_g(t)}{dt} = k_d k_g \{\sin[\varphi_s(t) - \varphi_g(t)]\} * h(t) \tag{8/13}$$

Wprowadzając oznaczenie $K = k_d k_g$ otrzymamy ostatecznie, że równanie pętli ma postać

$$\frac{d\varphi_g(t)}{dt} = K\{\sin[\varphi_s(t) - \varphi_g(t)]\} * h(t) \tag{8/14}$$

Równanie to opisuje związek pomiędzy fazą sygnału wejściowego i fazą generatora lokalnego pętli, przy czym rolę wymuszenia spełnia $\varphi_s(t)$. Jeśli wykorzystamy zależność (8/8), to równanie (8/14) można zapisać również w takiej formie

$$\frac{d\varphi_b(t)}{dt} = \frac{d\varphi_s(t)}{dt} - K\{\sin\varphi_b(t)\} * h(t) \tag{8/15}$$

Zauważmy, że nieliniowość równań (8/14) i (8/15) jest spowodowana nieliniowością charakterystyki detektora fazy.

Jak zobaczymy dalej, stosując inny sposób opisu filtru dolnoprzepustowego można otrzymać dla pętli nieliniowe równanie różniczkowe, którego rząd zależy od postaci transmitancji $H(s)$.

8.1.2 Pętla w stanie synchronizacji; model liniowy

O pętli mówimy, że jest w stanie synchronizacji, jeśli jest spełniona równość

$$\omega_s(t) = \omega_g(t) \tag{8/16}$$

Z zależności (8/2) widać, iż przebiegi $\varphi_s(t)$ i $\varphi_g(t)$ różnią się wówczas co najwyżej o stałą, którą oznaczymy przez φ_{b0}. Przyjmiemy, że w stanie synchronizacji $|\varphi_{b0}| \leqslant \pi/2$, to znaczy praca odbywa się w przedziale podstawowym charakterystyki detektora fazy, w którym jest ona monotoniczna. Każdemu pojedynczemu okresowi $u_s(t)$ odpowiada wówczas dokładnie jeden okres $u_g(t)$. Nawet chwilowy brak tej odpowiedniości oznacza utratę synchronizacji. W dobrze zaprojektowanej pętli błąd φ_{b0} jest bardzo mały i spełnia nierówność $|\varphi_{b0}| \ll \pi/2$.

Wykorzystajmy teraz założenie (8/9) i zbadajmy w jakim zakresie generator lokalny pętli może być przestrajany wokół swej pulsacji spoczynkowej ω_0 przez sygnał $u_f(t)$. Przyjmiemy w tym celu, że $u_s(t)$ jest sygnałem harmonicznym o stałej pulsacji

$$\omega_s(t) = \omega_s = \text{const} \tag{8/17}$$

Z zależności (8/4) widać, że wówczas

$$U_{d0} \equiv \overline{u_d(t)} = \frac{1}{2} k_m U_s U_g \sin\varphi_{b0} \tag{8/18}$$

Przy $-\pi/2 \leqslant \varphi_{b0} \leqslant \pi/2$ wartość składowej stałej napięcia wyjściowego z detektora fazy zawiera się w granicach

$$-\frac{1}{2} k_m U_s U_g \leqslant U_{d0} \leqslant \frac{1}{2} k_m U_s U_g \tag{8/19}$$

Jeśli teraz przyjmiemy, że tylko ta składowa $u_d(t)$ zostanie przeniesiona przez filtr dolnoprzepustowy, to na generator VCO jest podawane napięcie

$$U_{f0} = H(0) U_{d0} \tag{8/20}$$

W przypadku, gdy napięcie U_{d0} wytwarzane przez detektor fazy nie jest wystarczająco duże, aby wysterować generator VCO, filtr dolnoprzepustowy zawiera także wzmacniacz, czyli zachodzi nierówność $H(0) > 1$. W większości przypadków wzmocnienie nie jest jednak potrzebne. Dlatego najczęściej zakłada się, że $H(0) = 1$, co oznacza, że filtr przenosi U_{d0} bez wzmocnienia i bez tłumienia, tj. $U_{f0} = U_{d0}$. Wykorzystując ten warunek otrzymamy, iż pulsacja generatora może przyjmować wartości z przedziału

$$\omega_o - \frac{1}{2} k_m k_g U_s U_g \leqslant \omega_g \leqslant \omega_o + \frac{1}{2} k_m k_g U_s U_g \tag{8/21}$$

Pętla fazowa może zatem pozostawać w stanie synchronizacji (warunek (8/16)) jedynie wówczas, gdy pulsacja ω_s sygnału synchronizującego będzie utrzymywać się w przedziale określonym wyrażeniem (8/21). Przedział pulsacji sygnału wejściowego, dla których generator pętli pozostaje w stanie synchronizacji z tym sygnałem nosi nazwę *zakresu trzymania* (ang. *hold-in range*), lub *zakresu śledzenia* (ang. *tracking range*) pętli fazowej. W omawianym przypadku zakres trzymania jest symetryczny względem pulsacji ω_o, a dopuszczalna amplituda zmian pulsacji sygnału wejściowego ma wartość

$$\Delta\omega_T = \frac{1}{2} k_m k_g U_s U_g = k_d k_g = K \tag{8/22}$$

Zakres trzymania wynosi zatem $\pm\Delta\omega_T$.

Przyjmijmy, że pętla jest w stanie synchronizacji, a błąd fazy spełnia warunek

$$|\varphi_{b0}| \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{8/23}$$

Przy tych założeniach charakterystykę detektora fazy można przybliżyć wyrażeniem

$$U_{d0} = k_d \sin(\varphi_s - \varphi_g) \approx k_d(\varphi_s - \varphi_g) \tag{8/24}$$

czyli przyjąć, że jest to linia prosta o nachyleniu k_d określonym przez wyrażenie (9/6). Podstawiając zależność (8/24) do równań (8/14) i (8/15) otrzymamy odpowiednio

$$\frac{d\varphi_g(t)}{dt} = K[\varphi_s(t) - \varphi_g(t)] * h(t) \tag{8/25}$$

oraz

$$\frac{d\varphi_b(t)}{dt} = \frac{d\varphi_s(t)}{dt} - K[\varphi_b(t)] * h(t) \tag{8/26}$$

Są to równania liniowe i najwygodniej jest przedstawić je w postaci równań algebraicznych, stosując przekształcenie Laplace'a. Otrzymujemy wówczas

$$s\phi_g(s) = K[\phi_s(s) - \phi_g(s)]H(s) \tag{8/27}$$

$$s\phi_b(s) = s\phi_s(s) - K\phi_b(s)H(s) \tag{8/28}$$

gdzie $\phi_g(s)$, $\phi_s(s)$, $\phi_b(s)$ i $H(s)$ stanowią odpowiednio $\mathscr{L}$-transformaty przebiegów $\varphi_g(t)$, $\varphi_s(t)$, $\varphi_b(t)$ oraz $h(t)$.

Wyznaczmy z równań (8/27) i (8/28) stosunki $\phi_g(s)/\phi_s(s)$ i $\phi_b(s)/\phi_s(s)$

$$G(s) = \frac{\phi_g(s)}{\phi_s(s)} = \frac{KH(s)}{s + KH(s)} \tag{8/29}$$

$$G_b(s) = 1 - G(s) = \frac{\phi_b(s)}{\phi_s(s)} = \frac{s}{s + KH(s)} \tag{8/30}$$

Wielkość $G(s)$ nosi nazwę *transmitancji pętli fazowej* i opisuje układ w sytuacji, gdy pętla sprzężenia zwrotnego jest zamknięta; sygnałem wymuszającym jest $\phi_s(s)$. Transmitancja $G_b(s)$ spełnia analogiczną rolę w odniesieniu do błędu fazy $\phi_b(s)$.

Zauważmy, że biorąc $\mathscr{L}$-transformaty równania (8/10) działanie generatora przestrajanego napięciem możemy scharakteryzować w dziedzinie s następującą transmitancją:

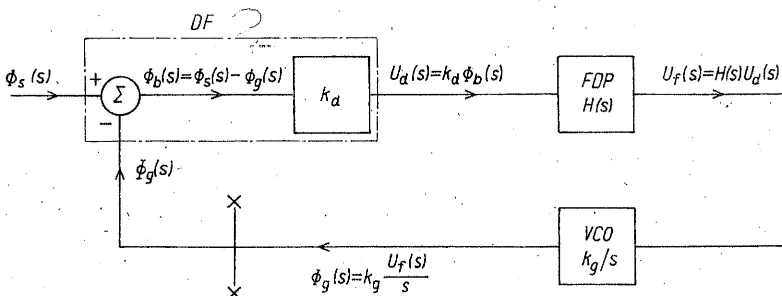
$$\frac{\phi_g(s)}{U_f(s)} = \frac{k_g}{s} \tag{8/31}$$

czyli generator VCO zachowuje się, jak układ całkujący.

Z równań (8/27) i (8/31) widać, że w stanie synchronizacji, przy spełnieniu warunku (8/23), układ funkcjonalny pętli z rys. 8/3 można zastąpić układem podanym na rys. 8/4.

Łatwo zauważyć, że gdy pętla zostanie rozcięta w przekroju x-x zaznaczonym na rysunku, to transmitancja pętli otwartej ma postać

$$G_o(s) = \left[\frac{\phi_g(s)}{\phi_s(s)}\right]_o = k_d k_g \frac{H(s)}{s} = K\frac{H(s)}{s} \tag{8/32}$$



8/4 Schemat funkcjonalny pętli w stanie synchronizacji; model liniowy

Dla składowej stałej sygnału $u_d(t)$, przy założeniu $H(0) = 1$, otrzymujemy $G_o(s) = k_d k_g/s = K/s$. Dlatego wielkość K nazywa się *wzmocnieniem pętli*. Z zależności (8/9) i (8/24) widać, iż k_g wyraża się w [rad/Vs^{-1}], natomiast k_d w [V/rad], stąd wzmocnienie pętli ma wymiar [s^{-1}].

Z wzorów (8/29), (8/30) i (8/32) widać, że właściwości pętli fazowej zależą w istotny sposób od transmitancji $H(s)$, dlatego zajmiemy się teraz zbadaniem wpływu filtru dolnoprzepustowego na zachowanie się pętli w liniowym zakresie jej pracy.

8.1.3 Wpływ filtru na właściwości śledzące pętli

W badaniu wpływu transmitancji filtru dolnoprzepustowego na pracę pętli ograniczymy się do przypadku najczęściej spotykanego w zastosowaniach i przyjmiemy, że jest to filtr pierwszego rzędu. Typowe układy pasywnych i aktywnych filtrów tego rodzaju oraz ich amplitudowe charakterystyki asymptotyczne (Bodego) zestawiono na rys. 8/5.

Rodzaj	Pasywny		Aktywny	
	1	2	3	4
Układ	R_1, C	R_1, R_2, C	R_1, R_2, C	R_1, C
Asymptoty $\lvert H(\omega)\rvert$	$\lvert H_1(\omega)\rvert$, ω	$\lvert H_2(\omega)\rvert$, ω	$\lvert H_3(\omega)\rvert$, ω	$\lvert H_4(\omega)\rvert$, ω
$H(\omega)$	$H_1(\omega)=\frac{1}{1+j\omega\tau_1}$	$H_2(\omega)=\frac{1+j\omega\tau_2}{1+j\omega(\tau_1+\tau_2)}$	$H_3(\omega)=\frac{1+j\omega\tau_2}{j\omega\tau_1}$	$H_4(\omega)=\frac{1}{j\omega\tau_1}$
	$\tau_1=R_1C$ $\tau_2=R_2C$			

8/5 Typowe układy filtrów dolnoprzepustowych oraz ich amplitudowe charakterystyki asymptotyczne

Zauważmy, że funkcja przenoszenia filtru pasywnego oznaczona przez $H_1(s)$ jest przypadkiem szczególnym $H_2(s)$ dla $\tau_2 = 0$; podobnie, zakładając w $H_3(s)$, $\tau_2 = 0$ otrzymamy funkcję $H_4(s)$. Wystarczy więc przy zapisywaniu dalszych zależności posłużyć się funkcjami przenoszenia oznaczonymi przez $H_2(s)$ i $H_3(s)$, aby ująć w rozważaniach wszystkie cztery rodzaje filtrów. Podstawiając $H_2(s)$ i $H_3(s)$ do równości (8/29) otrzymamy następujące wyrażenia, określające transmitancję pętli oznaczoną przez $G(s)$:

dla filtru pasywnego

$$G(s) = \frac{K(1+\tau_2 s)(\tau_1+\tau_2)^{-1}}{s^2+\dfrac{1+K\tau_2}{\tau_1+\tau_2}s+\dfrac{K}{\tau_1+\tau_2}} \tag{8/33}$$

dla filtru aktywnego

$$G(s) = \frac{K(1+\tau_2 s)\tau_1^{-1}}{s^2+\left(K\dfrac{\tau_2}{\tau_1}\right)s+\dfrac{K}{\tau_1}} \tag{8/34}$$

Wprowadźmy, dla uproszczenia zapisu $G(s)$, wielkości unormowane ξ oraz ω_n zdefiniowane w następujący sposób:
dla filtru pasywnego

$$\omega_n = \left(\frac{K}{\tau_1+\tau_2}\right)^{1/2} \tag{8/35a}$$

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{K}{\tau_1+\tau_2}\right)^{1/2}\left(\frac{1+K\tau_2}{K}\right) \tag{8/35b}$$

dla filtru aktywnego

$$\omega_n = \left(\frac{K}{\tau_1}\right)^{1/2} \tag{8/36a}$$

$$\xi = \frac{\tau_2}{2}\left(\frac{K}{\tau_1}\right)^{1/2} \tag{8/36b}$$

Zamiast (8/33) otrzymamy wówczas wyrażenie

$$G(s) = \frac{\omega_n\left(2\xi-\dfrac{\omega_n}{K}\right)s+\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \tag{8/37}$$

natomiast (8/34) przekształci się do postaci

$$G(s) = \frac{2\xi\omega_n s+\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \tag{8/38}$$

Zauważmy, że gdy zachodzi nierówność

$$K \gg \omega_n \tag{8/39}$$

to transmitancja pętli z filtrem pasywnym jest w przybliżeniu taka sama, jak transmitancja pętli z filtrem aktywnym, czyli wzór (8/38) ujmuje oba interesujące nas przypadki. Pętlę, dla której zachodzi nierówność (8/39) nazywamy *pętlą o dużym wzmocnieniu* (ang. *high-gain loop*).

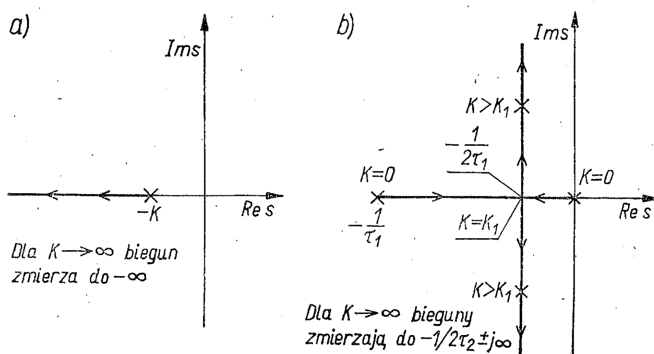
Łatwo sprawdzić, że transmitancja $G_b(s)$, związana z błędem fazy, przyjmie dla pętli z filtrem pasywnym postać

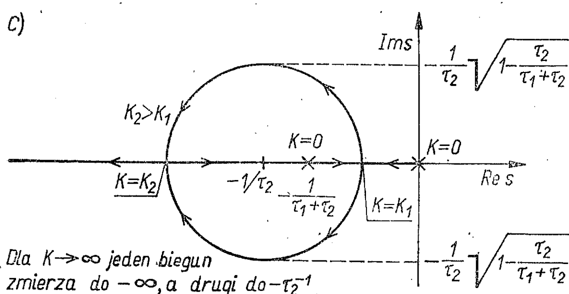
$$G_b(s) = \frac{s^2+K^{-1}\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \tag{8/40}$$

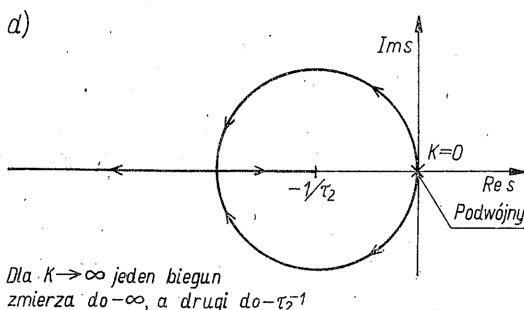
a dla pętli z filtrem aktywnym

$$G_b(s) = \frac{s^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \tag{8/41}$$

Zauważmy, że mianownik $G(s)$ i $G_b(s)$ jest wielomianem charakterystycznym, którego pierwiastki decydują o stabilności pętli w quasiliniowym zakresie jej pracy (do zagadnienia tego powrócimy jeszcze w dalszych rozważaniach). Dlatego na rys. 8/6 pokazano przykładowo położenie biegunów $G(s)$ dla kilku wybranych transmitancji $H(s)$ oraz narysowano linie pierwiastkowe określające ruch tych osobliwości, gdy wzmocnienie K pętli wzrasta poczynając od wartości $K = 0$.







8/6 Położenie biegunów dla transmitancji $G(s)$ określonych wzorami: a) (8/42); b) (8/43); c) (8/33) i d) (8/34)

Należy tu jeszcze wspomnieć, że przyjęło się klasyfikować pętle fazowe tak, jak układy automatycznej regulacji, na podstawie transmitancji pętli otwartej, $G_o(s)$ (patrz wzór (8/32)). Całkowita liczba biegunów $G_o(s)$ określa rząd pętli, natomiast liczba biegunów tej transmitancji ulokowanych w początku układu współrzędnych określa typ pętli.

Powróćmy do rys. 8/6. Zilustrowano na nim następujące przypadki:

1. $H(s) = 1$; pętla pierwszego rzędu, typu pierwszego (rys. 8/6a)

$$G(s) = \frac{K}{s+K} \tag{8/42}$$

2. $H(s) = H_1(s) = \frac{1}{1+\tau_1 s}$; pętla drugiego rzędu, typu pierwszego (rys. 8/6b)

$$G(s) = \frac{K\tau_1^{-1}}{s^2+\tau_1^{-1}s+K\tau_1^{-1}} \tag{8/43}$$

3. $H(s) = H_2(s) = \frac{1+\tau_2 s}{1+(\tau_1+\tau_2)s}$; pętla drugiego rzędu, typu pierwszego (rys. 8/6c).

Transmitancja $G(s)$ określona jest w tym przypadku wzorem (8/33).

4. $H(s) = H_3(s) = \frac{1+\tau_2 s}{\tau_1 s}$; pętla drugiego rzędu, typu drugiego (rys. 8/6d).

Transmitancja $G(s)$ dana jest wzorem (8/34).

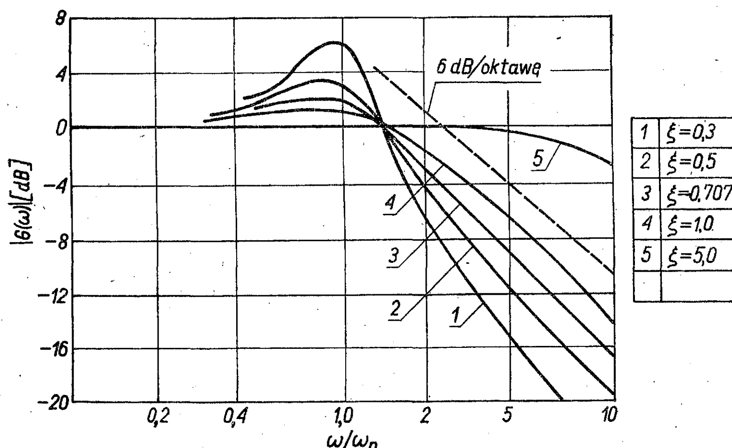
Jak widać z rys. 8/6, we wszystkich rozważanych tu przypadkach pętla jest stabilna. Zauważmy tylko, że w przypadku drugim ujemna część rzeczywista biegunów pozostaje stała dla $K \to \infty$. W praktyce zawsze będziemy mieli do czynienia z biegunami nie uwzględnionymi w modelu idealizowanym, położonymi w znacznej odległości (po osi $j\omega$) od biegunów dominujących. Przy dużym wzmocnieniu K wpływ takich biegunów może spowodować w omawianym przypadku niestabilność układu.

Przy badaniu stanów przejściowych w pętli okazuje się, że istotny wpływ na ich przebieg mają współczynnik tłumienia ξ oraz pulsacja drgań swobodnych pętli ω_n, występujące w wyrażeniach na transmitancje $G(s)$ i $G_b(s)$. Decydują one o tym, czy przebiegi przejściowe mają charakter aperiodyczny, czy oscylacyjny, jaka jest maksymalna wartość błędu fazy w stanie nieustalonym itp. Dla pętli o dużym wzmocnieniu związek pomiędzy ω_n i dobrze znaną 3-decybelową pulsacją graniczną jest następujący [4]:

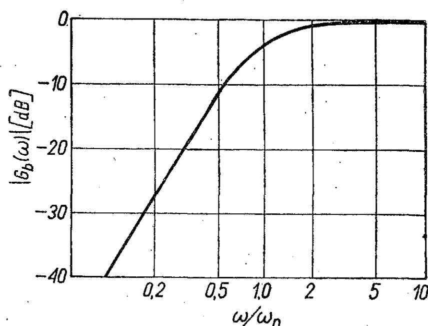
$$\omega_{3dB} = \omega_n\left[1+2\xi^2+\sqrt{(2\xi^2+1)^2+1}\;\right]^{1/2} \tag{8/44}$$

Z zależności tej oraz wzorów (8/35) i (8/36) widzimy, że współczynniki te ujmują wpływ wzmocnienia oraz szerokości pasma przenoszenia pętli na charakter stanów przejściowych. Dlatego na rys. 8/7 podano tytułem przykładu (dla pętli o dużym wzmocnieniu) wykresy amplitudowych charakterystyk częstotliwościowych dla kilku wartości ξ w funkcji unormowanej pulsacji ω/ω_n. Jak widać, są to charakterystyki dolnoprzepustowe; krzywa dla $\xi = 0{,}707$ jest maksymalnie

płaska. Na rysunku 8/8 podano także wykres $|G_b(\omega)|$ dla $\xi = 0{,}707$. Ta charakterystyka jest górnoprzepustowa i wskazuje na to, że pętla może śledzić tylko dostatecznie wolne zmiany fazy.



8/7 Amplitudowe charakterystyki częstotliwościowe $|G(\omega)|$ pętli rzędu drugiego, wg [1]



8/8 Amplitudowa charakterystyka częstotliwościowa $|G_b(\omega)|$ pętli rzędu drugiego dla $\xi = 0{,}707$

Zajmiemy się teraz zbadaniem zdolności śledzenia przez pętlę zmian fazy sygnału wejściowego. Badania właściwości śledzących pętli przeprowadzimy przy założeniu, że jej początkowym stanem jest stan synchronizacji. W stanie tym następuje zaburzenie w sygnale wejściowym, które wywołuje proces przejściowy. Zaburzenie jest na tyle małe, że opisujące pętlę równania liniowe pozostają słuszne. Przyjmuje się zwykle, że zaburzenie sygnału wejściowego ma charakter standardowy o postaci:

1. Skokowej zmiany fazy.
2. Skokowej zmiany częstotliwości.
3. Liniowej zmiany częstotliwości.

Badanie odpowiedzi na te pobudzenia pozwala ujawnić różne właściwości pętli.

Zapiszmy w formie analitycznej wszystkie trzy postacie sygnału wymuszającego $\varphi_s(t)$ oraz ich $\mathscr{L}$-transformaty przyjmując, że zaburzenie nastąpiło w chwili $t = 0$.

1. Skokowa zmiana fazy

$$\varphi_s(t) = \Delta\varphi\mathbf{1}(t)$$
$$\phi_s(s) = \frac{\Delta\varphi}{s} \tag{8/45}$$

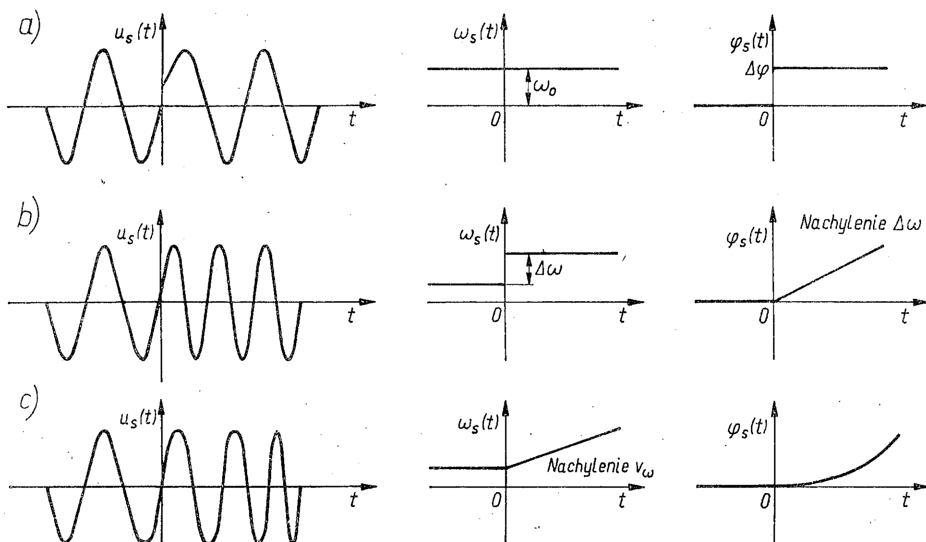
2. Skokowa zmiana pulsacji

$$\varphi_s(t) = \Delta\omega t\mathbf{1}(t)$$
$$\phi_s(s) = \frac{\Delta\omega}{s^2} \tag{8/46}$$

3. Liniowa zmiana pulsacji

$$\varphi_s(t) = \frac{1}{2}v_\omega t^2\mathbf{1}(t)$$
$$\phi_s(s) = \frac{v_\omega}{s^3} \tag{8/47}$$

Przypadki te zostały zilustrowane na rys. 8/9, gdzie podano zarówno przebiegi $\varphi_s(t)$, jak i $u_s(t)$.



8/9 Standardowe wymuszenia przy badaniu stanów przejściowych w pętli: a) skokowa zmiana fazy; b) skokowa zmiana pulsacji; c) liniowa zmiana pulsacji

Przekształcając równanie (8/30) opisujące pętlę dla błędu fazy do postaci

$$\phi_b(s) = G_b(s)\phi_s(s) = \frac{s}{s+KH(s)}\phi_s(s) \tag{8/48}$$

widzimy, że wykorzystując zależności (8/40) i (8/41) możemy z równania tego wyznaczyć $\phi_b(s)$, a co za tym idzie także $\varphi_b(t)$ dla każdego z podanych wyżej pobudzeń. Ponieważ można tego dokonać dobrze znanymi metodami, nie bę-

dziemy tutaj z braku miejsca wyznaczać i dyskutować rozwiązań szczegółowych, a zajmiemy się tylko zbadaniem ich właściwości asymptotycznych dla $t \to \infty$. Wykorzystamy w tym celu twierdzenie o wartości granicznej dla transformat Laplace'a, zgodnie z którym

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_b(t) = \lim_{s\to 0} s\phi_b(s) \tag{8/49}$$

Podstawiając za $\phi_b(s)$ prawą stronę (8/48), dostaniemy

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_b(t) = \varphi_{b0} = \lim_{s\to 0} \frac{s^2}{s+KH(s)} \phi_s(s) \tag{8/50}$$

Zbadajmy teraz po kolei poszczególne przypadki.

Skokowa zmiany fazy

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_b(t) = \varphi_{b0} = \lim_{s\to 0} \frac{s\Delta\varphi}{s+KH(s)} = 0 \tag{8/51}$$

jeśli tylko $H(0) \neq 0$. Jak widać, pętla jest w stanie śledzić każdą zmianę fazy (należy oczywiście pamiętać, że przybliżenie liniowe można stosować, jeśli $\Delta\varphi \ll \ll \pi/2$), a błąd fazy w stanie ustalonym osiąga wartość zerową.

Skokowa zmiany pulsacji

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_b(t) = \varphi_{b0} = \lim_{s\to 0} \frac{\Delta\omega}{s+KH(s)} = \frac{\Delta\omega}{KH(0)} \tag{8/52}$$

W tym przypadku asymptotyczna wartość błędu fazy zależy od rodzaju zastosowanego w pętli filtru. Dla filtrów o transmitancjach $H_1(s)$ oraz dla $H(s) = 1$ (pętla bez filtru) mamy $H(0) = 1$, a w związku z tym

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_b(t) = \varphi_{b0} = \frac{\Delta\omega}{K} \tag{8/53}$$

Zatem w stanie ustalonym błąd fazy jest różny od zera, a jego wartość zależy od wzmocnienia pętli oraz początkowej różnicy pulsacji sygnałów $u_s(t)$ i $u_g(t)$.

Dla filtru aktywnego o transmitancji $H_3(s)$ asymptotyczna wartość błędu fazy $\varphi_{b0} = 0$, gdyż $H_3(s) \to \infty$, przy $s \to 0$. Należy jednak pamiętać, że taką postać transmitancji uzyskujemy przy założeniu, że wzmacniacz operacyjny ma nieskończenie wielkie wzmocnienie. W warunkach rzeczywistych wzmocnienie tego układu jest skończone. Dobierając więc odpowiednią wartość wzmocnienia filtru aktywnego możemy uzyskać w stanie ustalonym dowolnie mały błąd fazy, co ma istotne znaczenie w niektórych zastosowaniach (patrz np. rozdz. 4).

Liniowa zmiany pulsacji

Dla pętli z filtrem pasywnym, gdy $KH(0)$ ma wartość skończoną, otrzymujemy

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_b(t) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \frac{v_\omega}{s+KH(s)} = \infty \tag{8/54}$$

a więc błąd fazy narasta nieograniczenie. Szybkość narastania tego błędu

$$\lim_{t\to\infty}\frac{d\varphi_b(t)}{dt} = \lim_{s\to 0} s[s\phi_b(s)] = \lim_{s\to 0}\frac{v_\omega}{s+KH(s)} = \frac{v_\omega}{K} \tag{8/55}$$

gdyż $H(0) = 1$. Błąd fazy narasta więc z upływem czasu, powodując pracę detektora fazy poza zakresem liniowym, a gdy przekroczy określoną wartość (patrz p. 8.1.4), następuje utrata synchronizacji,

Dla pętli z filtrem aktywnym transmitancja $G_b(s)$ ma postać (8/41) (przy założeniu nieskończenie wielkiego wzmocnienia wzmacniacza operacyjnego), zatem

$$\lim_{t\to\infty}\varphi_b(t) = \varphi_{b0} = \lim_{s\to 0}\frac{v_\omega}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{v_\omega}{\omega_n^2} \tag{8/56}$$

Bliższe badanie $\varphi_b(t)$ wskazuje, że jeśli współczynnik tłumienia ξ jest wystarczająco duży, to przebieg $\varphi_b(t)$ osiąga wartość końcową w sposób aperiodyczny (bez oscylacji o dużych amplitudach). Przy dostatecznie małym stosunku v_ω/ω_n^2 pętla pozostaje wówczas w stanie synchronizacji, lub inaczej, pulsacja generatora VCO staje się również liniową funkcją czasu o szybkości narastania v_ω.

Jeśli konieczne jest, aby pętla śledziła sygnał wejściowy z błędem fazy równym zeru, to należy wprowadzić do pętli dodatkowo układ całkujący. Przyjmijmy przykładowo, że filtr w pętli ma transmitancję o postaci $H_3(s)$, a w kaskadę z nim zostaje włączony idealny układ całkujący o transmitancji $H_4(s)$ (patrz rys. 8/5). Funkcja przenoszenia układu otwartego wyraża się wówczas wzorem

$$G_o(s) = KH_3(s)H_4(s) = K\frac{1+\tau_2 s}{\tau_1^2 s^3} \tag{8/57}$$

a $G_b(s)$ ma postać

$$G_b(s) = \frac{s^3}{s^3+K\dfrac{\tau_2}{\tau_1^2}s+\dfrac{K}{\tau_1^2}} \tag{8/58}$$

Dostajemy zatem

$$\lim_{t\to\infty}\varphi_b(t) = \lim_{s\to 0}\frac{v_\omega s}{s^3+K\dfrac{\tau_2}{\tau_1^2}s+\dfrac{K}{\tau_1^2}} = 0 \tag{8/59}$$

Jest to jednak, jak widać z (8/57), pętla rzędu trzeciego, typu trzeciego i nie będziemy się nią zajmować.

8.1.4 Proces osiągania synchronizacji; zakres chwytania

W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy, że stan początkowy pętli był stanem synchronizacji. Obecnie rozważymy sytuację, gdy do pętli pracującej bez wymuszenia zostaje przyłożony w pewnym momencie sygnał pobudzający i zbadamy, w jakich warunkach osiąga ona stan synchronizacji.

Przyjmijmy, że w chwili $t = 0$ do detektora fazy został przyłożony sygnał

$$u_s(t) = U_s \sin[\omega_s t + \varphi_s(0)] \tag{8/60}$$

natomiast przebieg wytwarzany przez generator VCO ma postać

$$u_g(t) = U_g \cos[\omega_o t + \varphi_g(t)] \tag{8/61}$$

przy czym dla $t = 0$ $\varphi_g(t) = \varphi_g(0)$. Załóżmy, że pulsacje obu sygnałów różnią się od siebie o $\Delta\omega$, tzn.

$$\omega_s - \omega_o = \Delta\omega \tag{8/62}$$

Sygnał $u_s(t)$ można więc zapisać w postaci

$$u_s(t) = U_s \sin[\omega_o t + \varphi_s(t)] \tag{8/63}$$

gdzie

$$\varphi_s(t) = \Delta\omega t + \varphi_s(0) \tag{8/64}$$

Zapis (8/63) jest wówczas identyczny z zapisem (8/1), którym posłużyliśmy się przy wyprowadzaniu równania pętli. Dla $t \geqslant 0$ równanie (8/15) można więc zapisać w sposób następujący:

$$\frac{d\varphi_b(t)}{dt} = \Delta\omega - K\{\sin\varphi_b(t)\} * h(t) \tag{8/65}$$

gdzie

$$\varphi_b(t) = \varphi_s(t) - \varphi_g(t)$$

a

$$\varphi_b(0) = \varphi_s(0) - \varphi_g(0)$$

stanowi początkowy błąd fazy.

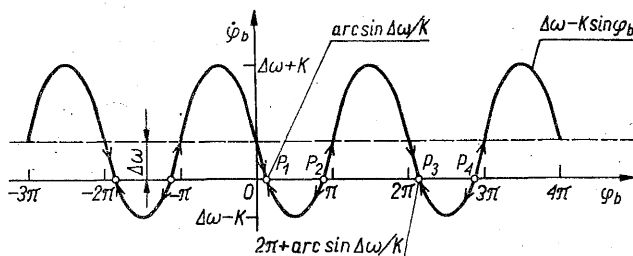
Rozważmy najpierw najprostszy przypadek pętli rzędu pierwszego, typu pierwszego, dla której $H(s) = 1$, co oznacza, że pętla nie zawiera filtru. Z wyrażenia (8/42) na transmitancję $G(s)$ wynika, że 3-decybelowe pasmo przenoszenia pętli wynosi wówczas K. $H(s) = 1$ odpowiada $h(t) = \delta(t)$, wobec czego wyrażenie (8/65) przyjmuje postać

$$\dot{\varphi}_b(t) = \Delta\omega - K \sin\varphi_b(t) \tag{8/66}$$

Dla wygody zapisu pochodną względem czasu oznaczyliśmy kropką.

Istotne informacje o właściwościach pętli opisanej równaniem (8/66) można uzyskać badając jego rozwiązania na płaszczyźnie fazowej. Jak wiadomo, graficzne przedstawienie rozwiązania $\varphi_b(t)$ w układzie współrzędnych $[\dot{\varphi}_b(t), \varphi_b(t)]$ nazywamy *trajektorią fazową*, przy czym zmienna t (czas) jest traktowana jako parametr. Rodzina trajektorii będąca zbiorem rozwiązań przy różnych warunkach początkowych nosi nazwę *portretu fazowego*. Każdy punkt na trajektorii obrazuje zatem stan układu w chwili t.

Równaniu (8/66) odpowiada na płaszczyźnie fazowej bardzo proste odwzorowanie, przedstawione na rys. 8/10. Pokazana trajektoria jest sinusoidą przesuniętą na osi rzędnych o $\Delta\omega$. Punkty, w których trajektoria przecina oś odciętych odwzorowują stan równowagi układu. Punkty P_1, P_3, ..., są punktami równowagi



8/10 Odwzorowanie równania (8/66) na płaszczyźnie fazowej

trwałej, natomiast punktom P_2, $P_4, \ldots$ odpowiada stan równowagi nietrwałej układu.

Dyskusję zachowania się układu przy różnych wartościach początkowego błędu fazy $\varphi_b(0)$ rozpoczniemy od przypomnienia, że zgodnie z warunkiem (8/16) pętla jest w stanie synchronizacji tylko wówczas, gdy $\dot{\varphi}_b(t) = 0$, czyli gdy błąd fazy jest wielkością stałą: $\varphi_b(t) = \varphi_{b0}$. Zauważmy, że z warunku $\dot{\varphi}_b(t) = 0$ wynika, iż wówczas $\sin\varphi_{b0} = \Delta\omega/K$. Ponieważ lewa strona tego wyrażenia nie może przekroczyć jedności, więc stan synchronizacji można osiągnąć tylko wtedy, kiedy

$$\max|\Delta\omega| < K \tag{8/67}$$

Zgodnie z zależnością (8/22) $K = k_d k_g = \Delta\omega_T$, zatem nierówność powyższa oznacza, że stan synchronizacji można uzyskać tylko wówczas, gdy początkowa różnica pulsacji sygnałów $u_s(t)$ i $u_g(t)$ nie przekracza zakresu trzymania pętli. Z rysunku 8/10 widać, że jeśli nierówność (8/67) nie jest spełniona, to trajektoria fazowa nie przecina osi odciętych, a więc brak jest punktów równowagi, w których $\dot{\varphi}_b(t) = 0$.

Przyjmijmy, że stan układu w chwili t jest odwzorowany na trajektorii fazowej przez punkt Q. Istniejącemu w chwili $t = 0$ stanowi początkowemu odpowiada położenie Q określone odciętą $\varphi_b(0)$, czyli początkowym błędem fazy. Jeżeli Q nie znajduje się w punkcie równowagi, to $\dot{\varphi}_b(t) \neq 0$. Istnieją wówczas dwie możliwości: jeśli $\dot{\varphi}_b(t) > 0$, to $\varphi_b(t)$ musi wzrastać, jeżeli natomiast $\dot{\varphi}_b(t) < 0$, to $\varphi_b(t)$ musi maleć. Z prawidłowości tych wynika, że w miarę upływu czasu punkt Q będzie się przemieszczał po trajektorii — zgodnie z kierunkiem zaznaczonym strzałkami — od położenia początkowego do najbliższego punktu równowagi trwałej. Oznacza to, że układ będzie zmierzał od stanu początkowego do stanu synchronizacji. Gdy początkowy błąd fazy zawiera się w przedziale

$$-\pi-\arcsin\frac{\Delta\omega}{K} < \varphi_b(0) < \pi-\arcsin\frac{\Delta\omega}{K} \tag{8/68}$$

to Q zmierza do punktu P_1, którego współrzędna na osi φ_b

$$\varphi_{b0} = \arcsin\frac{\Delta\omega}{K} \tag{8/69}$$

Warto tu zaznaczyć, że przy $\Delta\omega/K \ll 1$ możemy napisać $\varphi_{b0} \approx \Delta\omega/K$. Jest to

wartość φ_{bo} określona wzorem (8/53), którą otrzymaliśmy poprzednio na drodze analizy liniowej, przy założeniu małych odchyłek od stanu równowagi.

Przebieg błędu fazy $\varphi_b(t)$ od wartości początkowej $\varphi_b(0)$ do wartości ustalonej φ_{bo} jest dla pętli pierwszego rzędu aperiodyczny, a jego kształt zależy od wartości $\varphi_b(0)$. Czas potrzebny na to, aby błąd fazy zmienił się od wartości $\varphi_b(0)$ do $\varphi_b(t_\varepsilon)$ można wyliczyć. Rozdzielając zmienne w równaniu (8/66), otrzymamy

$$dt = \frac{d\varphi_b}{\Delta\omega - K\sin\varphi_b} \tag{8/70}$$

a stąd

$$t_\varepsilon = \int_0^{t_\varepsilon} dt = \int_{\varphi_b(0)}^{\varphi_b(t_\varepsilon)} \frac{d\varphi_b}{\Delta\omega - K\sin\varphi_b} \tag{8/71}$$

Ponieważ mianownik funkcji całkowanej zanika w punkcie odpowiadającym stanowi synchronizacji, więc zgodnie z oczekiwaniem stan ten jest osiągany po nieskończenie długim czasie, czyli $\varphi_{bo} = \varphi_b(\infty)$. Jeśli jednak przyjmiemy, że praktycznie stan równowagi zostaje osiągnięty wówczas, gdy $|\varphi_b(t_\varepsilon) - \varphi_b(\infty)| < \varepsilon$, to przybliżoną, skończoną wartość t_ε można wyrazić wzorem

$$t_\varepsilon \approx \int_{\varphi_b(0)}^{\varphi_{bo}\pm\varepsilon} \frac{d\varphi_b}{\Delta\omega - K\sin\varphi_b} \tag{8/72}$$

przy czym stosujemy $-\varepsilon$, gdy $\varphi_b(0) < \varphi_{bo}$ oraz $+\varepsilon$ dla $\varphi_b(0) > \varphi_{bo}$. Analiza szczegółowa wskazuje, że jeśli $\varphi_b(0)$ ma wartość zbliżoną do współrzędnej punktu równowagi nietrwałej, to t_ε może osiągać stosunkowo dużą wartość.

Wielkość t_ε nazywamy *czasem osiągania synchronizacji* lub *czasem chwytania* (ang. *acquisition time*). Analogicznie, maksymalną różnicę pulsacji sygnałów $u_s(t)$ i $u_g(t)$, przy której pętla osiąga stan synchronizacji nazywamy *zakresem chwytania* lub *zakresem wciągania* (ang. *capture range* lub *pull-in range*) i oznaczamy przez $\Delta\omega_C$. Z przeprowadzanej analizy wynika, że dla pętli pierwszego rzędu zakresy chwytania i trzymania są takie same i równe wzmocnieniu pętli K.

Pożyteczne w tym miejscu będzie jeszcze nawiązanie do stosowanego poprzednio modelu liniowego pętli. Z rysunku 8/10 widać, że gdy początkowa różnica pulsacji $\Delta\omega$ jest dużo mniejsza od wzmocnienia K, to punkt P_1 odwzorowujący stan równowagi trwałej układu będzie położony w pobliżu środka liniowego odcinka trajektorii. Jeśli ponadto punkt odwzorowujący stan początkowy pętli znajduje się blisko P_1, czyli jeśli spełnione są nierówności

$$\Delta\omega \ll K \quad \text{oraz} \quad |\varphi_b(0)| \ll \frac{\pi}{2} \tag{8/73}$$

to w modelu z rys. 8/3 można przyjąć dla detektora fazy zależność $\sin\varphi_b(t) \approx \approx \varphi_b(t)$ i otrzymać model liniowy. Z rysunku 8/10 widać także, że badanie stabilności modelu liniowego oznacza tylko badanie zachowania się układu znajdującego się początkowo w stanie równowagi trwałej, przy małych zaburzeniach wyprowadzających układ z tego stanu.

Przejdźmy teraz do omówienia procesu synchronizacji w pętli drugiego rzędu. Przyjmijmy dla przykładu, że filtrem dolnoprzepustowym jest bardzo często stosowany filtr o transmitancji $H_2(s)$. Sygnałem wejściowym filtru jest $U_d(t)$, a sygnałem wyjściowym $U_f(t)$, możemy więc napisać, że

$$\frac{U_f(s)}{U_d(s)} = \frac{1+\tau_2 s}{1+(\tau_1+\tau_2)s} \tag{8/74}$$

Przekształcając tę zależność i dokonując transformacji odwrotnej, otrzymamy następujące równanie, opisujące filtr w dziedzinie czasu:

$$(\tau_1+\tau_2)\dot{u}_f(t)+u_f(t) = \tau_2\dot{u}_d(t)+u_d(t) \tag{8/75}$$

Związek pomiędzy $\varphi_g(t)$ i $u_f(t)$ dla generatora VCO określa równanie (8/10), czyli

$$\dot{\varphi}_g(t) = k_g u_f(t) \tag{8/76}$$

Detektor fazy jest opisany, tak jak poprzednio, zależnością

$$u_d(t) = k_d \sin\varphi_b(t) \tag{8/77}$$

Równania (8/75)...(8/77) stanowią układ równań różniczkowych opisujących pętlę. Jeśli wyeliminujemy zmienne $u_d(t)$ i $u_f(t)$, to otrzymamy jedno równanie drugiego rzędu, o postaci

$$\ddot{\varphi}_b(t)+\frac{1+\tau_2 K\cos\varphi_b(t)}{\tau_1+\tau_2}\dot{\varphi}_b(t)+\frac{K}{\tau_1+\tau_2}\sin\varphi_b(t) =$$

$$=\ddot{\varphi}_s(t)+\frac{1}{\tau_1+\tau_2}\dot{\varphi}_s(t) \tag{8/78}$$

gdzie $K = k_d k_g$, a $\varphi_b(t) = \varphi_s(t)-\varphi_g(t)$. Przyjmując, że warunki pobudzenia są tak jak poprzednio określone zależnościami (8/60)...(8/64), otrzymujemy ostatecznie

$$\ddot{\varphi}_b(t)+\frac{1+\tau_2 K\cos\varphi_b(t)}{\tau_1+\tau_2}\dot{\varphi}_b(t)+\frac{K}{\tau_1+\tau_2}\sin\varphi_b(t) = \frac{\Delta\omega}{\tau_1+\tau_2} \tag{8/79}$$

W wielu zastosowaniach praktycznych można przyjąć, że $\tau_2^{-1} \ll K$. **Wówczas** równanie (8/79) upraszcza się do postaci

$$\ddot{\varphi}_b(t)+2\xi\omega_n\cos\varphi_b(t)\dot{\varphi}_b(t)+\omega_n^2\sin\varphi_b(t) = \frac{\omega_n^2}{K}\Delta\omega \tag{8/80}$$

gdzie ξ i ω_n określone są przez (8/35).

Właściwości rozwiązań równania (8/79) można również badać metodami płaszczyzny fazowej. Ich odwzorowanie na płaszczyźnie o współrzędnych $(\dot{\varphi}_b, \varphi_b)$ jest jednak bardziej skomplikowane, niż dla równania pierwszego rzędu. Portret fazowy zawiera nieskończenie wiele trajektorii, a wybór trajektorii, po której porusza się punkt odwzorowujący stan układu zależy od przyjętych warunków początkowych. Tak, jak w przypadku pętli pierwszego rzędu, występują tutaj punkty równowagi trwałej i nietrwałej, przy czym każdy punkt równowagi odwzorowuje stan synchronizacji w pętli fazowej. Jak widzimy, badanie właści-

wości pętli drugiego rzędu staje się czasochłonne i dużą pomocą są tutaj metody numeryczne. Zakres chwytania pętli, czy czas osiągania synchronizacji określić można na ogół tylko w sposób przybliżony. Dlatego nie będziemy tutaj przeprowadzać szczegółowej analizy pętli drugiego rzędu. Spróbujemy zamiast tego przedstawić proces synchronizacji w sposób bardziej poglądowy i przytoczyć niektóre użyteczne wyniki końcowe na podstawie cytowanej literatury.

Prześledźmy sygnały w różnych przekrojach pętli, jeśli zgodnie z przyjętymi założeniami różnica pulsacji $u_s(t)$ i $u_g(t)$ wynosi w chwili $t = 0$, $\Delta\omega$. Na podstawie zależności (8/60)...(8/64) napięcie na wyjściu detektora fazy

$$u_d(t) = k_d[\sin\Delta\omega t + \sin(2\omega_o + \Delta\omega)t] \tag{8/81}$$

Ponieważ w uproszczonej analizie, którą chcemy przeprowadzić, nie będziemy uwzględniać faz początkowych sygnałów, zostały one w zapisie (8/81) pominięte. Przyjmijmy, że składnik drugi o widmie skupionym wokół $2\omega_o$ zostanie całkowicie odfiltrowany. W związku z tym napięcie na wyjściu filtru wyrazi się wzorem

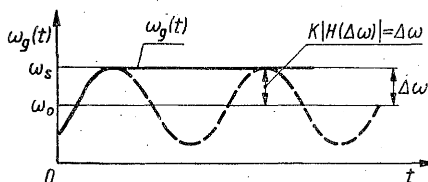
$$u_f(t) \approx k_d|H(\Delta\omega)|\sin\Delta\omega t \tag{8/82}$$

Sygnał $u_f(t)$ moduluje częstotliwość generatora VCO, przy czym — zgodnie z zależnościami (8/9) i (8/82) — maksymalna odchyłka jego pulsacji $\omega_g(t)$ od ω_o wynosi

$$|\omega_g(t) - \omega_o|_{\max} \approx K|H(\Delta\omega)| \tag{8/83}$$

gdzie $K = k_d k_g$ jest wzmocnieniem pętli.

Przyjmijmy najpierw, że odchyłka ta jest równa $\Delta\omega$. Założenie to oznacza, że w ciągu jednego okresu $u_f(t)$, wystąpi moment zrównania się pulsacji $\omega_g(t)$ z pulsacją ω_s i w chwili tej nastąpi synchronizacja przebiegu $u_g(t)$ z sygnałem $u_s(t)$. Sytuacja ta została zilustrowana na rys. 8/11. Oczywiście tak samo będzie



8/11 Osiąganie stanu synchronizacji, gdy dewiacja pulsacji $\omega_g(t)$ jest równa $\Delta\omega = \omega_s - \omega_o$

wówczas, gdy maksymalna odchyłka $\omega_g(t)$ będzie większa od $\Delta\omega$, czyli jeśli zostanie spełniona nierówność

$$K|H(\Delta\omega)| \geqslant \Delta\omega \tag{8/84}$$

Przyjmując, że znakowi równości odpowiada odchyłka $\Delta\omega_L$, otrzymujemy warunek

$$K|H(\Delta\omega_L)| = \Delta\omega_L \tag{8/85}$$

z którego możemy wyznaczyć $\Delta\omega_L$. Wartość $\Delta\omega_L$ będzie oczywiście zależała od przebiegu charakterystyki amplitudowej $|H(\omega)|$, a więc od rodzaju zastosowanego w pętli filtru. Można pokazać, że dla filtru o transmitancji $H_1(s)$ słuszna jest

zależność

$$\Delta\omega_L \approx \omega_n \tag{8/86}$$

natomiast dla filtrów mających funkcje przenoszenia $H_2(s)$ i $H_3(s)$ otrzymuje się

$$\Delta\omega_L \approx 2\xi\omega_n \tag{8/87}$$

Czas osiągania synchronizacji dla każdego z wymienionych filtrów można przybliżyć wyrażeniem

$$t_L \approx \frac{1}{\omega_n} \tag{8/88}$$

Znaczenie ξ i ω_n dla omawianych przypadków określają wyrażenia (8/35) lub (8/36).

Zakres chwytania, w którym następuje synchronizacja w ciągu jednego okresu $u_f(t)$, oznaczony przez $\Delta\omega_L$, nosi w języku angielskim nazwę *lock-in range*.

Załóżmy teraz, że odchyłka $\omega_g(t)$ od ω_o jest mniejsza od początkowej różnicy pulsacji sygnałów $u_g(t)$ i $u_s(t)$, oznaczonej przez $\Delta\omega$. Oznacza to, że początkowo nie wystąpi w żadnym momencie zrównanie się pulsacji $\omega_g(t)$ oraz ω_s tych sygnałów, dające w wyniku — jak widzieliśmy poprzednio — ich synchronizację. Przyjrzyjmy się jednak bliżej procesowi tworzenia się sygnału $u_f(t)$. Składnik wolnozmienny napięcia $u_d(t)$ na wyjściu detektora fazy ma postać

$$u_d(t) = k_d \sin\Delta\omega_r(t)\,t \tag{8/89}$$

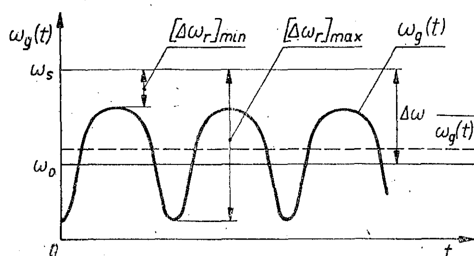
gdzie

$$\Delta\omega_r(t) = \omega_s - \omega_g(t) \tag{8/90}$$

Wielkość $\Delta\omega_r(t)$ nie jest stała i tylko w momencie $t = 0$ ma wartość $\Delta\omega_r(0) = \Delta\omega = \omega_s - \omega_o$. Ponieważ sygnał sterujący pulsacją generatora VCO ma teraz postać

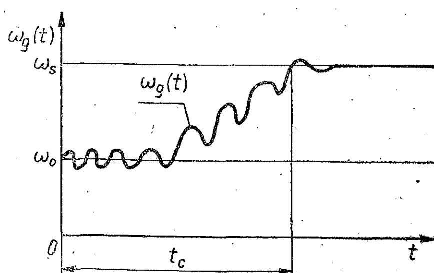
$$u_f(t) \approx k_d|H[\Delta\omega_r(t)]|\sin\Delta\omega_r(t)\,t \tag{8/91}$$

pulsacja $\omega_g(t)$ nie zmienia się w sposób sinusoidalny. Część okresu, kiedy $\omega_g(t)$ zbliża się do ω_s, osiągając odległość $[\Delta\omega_r(t)]_{min}$, jest dłuższa, natomiast część okresu, w której $\omega_g(t)$ oddala się od ω_s, osiągając odległość $[\Delta\omega_r(t)]_{max}$ — krótsza. W rezultacie takiej asymetrii, średnia wartość $\omega_g(t)$ różni się od ω_o. Ponieważ $\overline{\omega_g(t)} > \omega_o$, następuje przesunięcie się średniej pulsacji generatora VCO w kierunku pulsacji sygnału synchronizującego (założyliśmy $\omega_s > \omega_o$). Zjawisko to zostało zilustrowane na rys. 8/12, gdzie pokazano pierwsze dwa okresy przebiegu



8/12 Kształt przebiegu $\omega_g(t)$, gdy dewiacja tej pulsacji jest mniejsza od $(\omega_s - \omega_o)$

$\omega_g(t)$. Przy spełnieniu pewnych warunków, omawiany proces rozwija się w sposób przyspieszony, doprowadzając do osiągnięcia przez pętlę stanu synchronizacji ($\omega_g(t) = \omega_s$), co zilustrowano poglądowo na rys. 8/13. Analiza matematyczna tego procesu wykazuje, że jeśli tylko początkowa różnica pulsacji, $\Delta\omega$, sygnałów $u_s(t)$ i $u_g(t)$ jest mniejsza od pewnej krytycznej wartości $\Delta\omega_C$, to następuje synchronizacja pętli. Wielkość $\Delta\omega_C$ nosi nazwę zakresu chwytania. W języku angielskim, dla odróżnienia od przypadku omówionego poprzednio, stosuje się nazwę *pull-in range*.



8/13 Osiąganie stanu synchronizacji, gdy $\omega_s - \omega_o = \Delta\omega < \Delta\omega_C$

Wspomniana już dokładniejsza analiza procesu „przyciągania" pulsacji generatora VCO do pulsacji sygnału synchronizującego ω_s, pozwala uzyskać wzory określające w sposób przybliżony wartość $\Delta\omega_C$. Dla pętli drugiego rzędu otrzymujemy [1]

$$\Delta\omega_C \approx \frac{8}{\pi}\sqrt{K\xi\omega_n - \omega_n^2} \qquad (8/92)$$

W przypadku, gdy mamy pętlę o dużym wzmocnieniu ($K \gg \omega_n$), wzór (8/92) upraszcza się do postaci

$$\Delta\omega_C \approx \frac{8}{\pi}\sqrt{K\xi\omega_n} \qquad (8/93)$$

Czas trwania procesu synchronizacji jest dany zależnością

$$t_C \approx \frac{(\Delta\omega)^2}{2\xi\omega_n^2} \qquad (8/94)$$

Zauważmy, że jest to zależność nieliniowa. Gdy początkowa różnica pulsacji $\Delta\omega$ rośnie, to t_C rośnie z kwadratem. Jeśli $\Delta\omega$ jest zbliżone do $\Delta\omega_C$, to czas synchronizacji może osiągać duże wartości.

Na podstawie przeprowadzonych rozważań wyciągnąć można dość oczywisty wniosek, który tutaj sformułujemy, że pomiędzy wielkościami $\Delta\omega_L$, $\Delta\omega_C$ i $\Delta\omega_T$ zachodzą relacje

$$\Delta\omega_L < \Delta\omega_C < \Delta\omega_T \qquad (8/95)$$

8.1.5 Właściwości szumowe pętli

W wielu zastosowaniach sygnał synchronizujący podawany na wejście detektora fazy zawiera oprócz składnika deterministycznego także składnik stochastyczny —

szum. Powoduje on na wyjściu detektora fluktuacje błędu fazy $\varphi_b(t)$ wokół wartości średniej $\overline{\varphi_b(t)}$. Po przeniesieniu przez filtr wywołują one z kolei fluktuacje fazy $\varphi_g(t)$ przebiegu wytwarzanego przez generator VCO. Analiza tych zjawisk z uwzględnieniem nieliniowości detektora jest bardzo złożona i nie będziemy się tutaj nią zajmować. Ponieważ jednak właściwości szumowe pętli są bardzo ważną cechą charakterystyczną tego układu, naszkicujemy sposób postępowania dla modelu liniowego układu.

Przyjmijmy, że sygnał wejściowy ma postać

$$u_s(t) = U_s \sin(\omega_o t + \varphi_s) + n(t) \tag{8/96}$$

Niech $n(t)$ będzie wąskopasmowym białym szumem gaussowskim o zerowej wartości średniej i jednostronnej gęstości widmowej $\psi(f)$ [V^2/Hz], określonej przez zależność

$$\psi(f) = \begin{cases} N_o & f_o - \frac{B}{2} \leqslant f \leqslant f_o + \frac{B}{2} \\ 0 & \text{poza tym przedziałem} \end{cases} \tag{8/97}$$

Szum tego rodzaju można zapisać w postaci

$$n(t) = n_I(t)\cos\omega_o t - n_Q(t)\sin\omega_o t \tag{8/98}$$

gdzie $n_I(t)$ i $n_Q(t)$ są dwoma niezależnymi procesami gaussowskimi o zerowej wartości średniej i jednakowej wariancji $\overline{n^2(t)} = \overline{n_I^2(t)} = \overline{n_Q^2(t)}$. Ich widma gęstości mocy mają postać

$$\psi_I(f) = \begin{cases} \psi_Q(f) = 2N_o & f \leqslant \frac{B}{2} \\ 0 & f > \frac{B}{2} \end{cases} \tag{8/99}$$

a więc są widmami dolnopasmowymi. Przyjmijmy dalej, że sygnał z generatora VCO podawany na detektor fazy wyraża się wzorem

$$u_g(t) = U_g \cos(\omega_o t + \varphi_g) \tag{8/100}$$

Dla uproszczenia przyjęliśmy w tym momencie, że φ_g nie zależy od $n(t)$. Na wyjściu detektora fazy otrzymamy

$$u_d(t) = k_m U_s U_g \sin(\omega_o t + \varphi_s)\cos(\omega_o t + \varphi_g) + n_I(t) k_m U_g \cos\omega_o t \cos(\omega_o t + \varphi_g) - n_Q(t) k_m U_g \sin\omega_o t \cos(\omega_o t + \varphi_g) \tag{8/101}$$

Po prostych przekształceniach i odrzuceniu wyrazów o widmach skupionych wokół pulsacji $2\omega_o$, które zostaną odfiltrowane, dostajemy

$$u_d(t) = \frac{1}{2} k_m U_s U_g \sin(\varphi_s - \varphi_g) + \frac{1}{2} k_m U_g n_I(t) \cos\varphi_g - \frac{1}{2} k_m U_g n_Q(t) \sin\varphi_g \tag{8/102}$$

W zakresie pracy liniowej detektora możemy napisać

$$u_d(t) \approx k_d(\varphi_s - \varphi_g) + \frac{k_d n_I(t)}{U_s}\cos\varphi_g - \frac{k_d n_Q(t)}{U_s}\sin\varphi_g \tag{8/103}$$

Przedstawmy to wyrażenie w postaci

$$\bar{u}_d(t) = k_d[\varphi_s(t) - \varphi_g] \tag{8/104}$$

gdzie

$$\varphi_s(t) = \varphi_s + \frac{n_I(t)}{U_s}\cos\varphi_g - \frac{n_Q(t)}{U_s}\sin\varphi_g = \varphi_s + \varphi_{sn} \tag{8/105}$$

Ponieważ spełnione są równości

$$\overline{\varphi_{sn}(t)} = \frac{\cos\varphi_g}{U_s}\overline{n_I(t)} - \frac{\sin\varphi_g}{U_s}\overline{n_Q(t)} = 0 \tag{8/106}$$

oraz

$$\overline{\varphi_{sn}^2(t)} = \frac{\cos^2\varphi_g}{U_s^2}\overline{n_I^2(t)} + \frac{\sin^2\varphi_g}{U_s^2}\overline{n_Q^2(t)} = \frac{N_o B}{U_s^2} \tag{8/106a}$$

$\varphi_{sn}(t)$ jest procesem gaussowskim o zerowej wartości średniej i jednostronnej gęstości widmowej mocy szumu fazy $\psi_s(f) = 2N_o/U_s^2$ [rad²/Hz]. Na wyjściu generatora VCO sygnał $\varphi_{sn}(t)$ wywoła pojawienie się składnika stochastycznego w fazie $\varphi_g(t)$, który oznaczymy przez $\varphi_{gn}(t)$. Jednostronna gęstość widmowa mocy $\psi_g(f)$ tego procesu zależy od charakterystyki amplitudowej $|G(\omega)|$ transmitancji pętli, określonej przez (8/29), w następujący sposób:

$$\psi_g(f) = |G(2\pi f)|^2\psi_s(f) \tag{8/107}$$

Otrzymamy stąd, że

$$\overline{\varphi_{gn}^2(t)} = \int_0^\infty |G(2\pi f)|^2\psi_s(f)\,\mathrm{d}f = \psi_s(f)B_n \tag{8/108}$$

gdzie

$$B_n = \int_0^\infty |G(2\pi f)|^2\mathrm{d}f \tag{8/109}$$

oznacza równoważne *pasmo szumowe pętli.* Podstawiając wartość $\psi_s(f)$, dostajemy

$$\overline{\varphi_{gn}^2(t)} = \frac{2N_o}{U_s^2}B_n \tag{8/110}$$

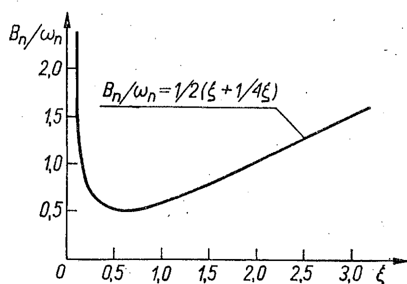
Dla pętli drugiego rzędu o dużym wzmocnieniu transmitancja $G(s)$ określona jest wzorem (8/38). Można pokazać, że wówczas [1, 4]

$$B_n = \frac{\omega_n}{2}\left(\xi + \frac{1}{4\xi}\right) \tag{8/111}$$

Na rysunku 8/14 przedstawiono wykres B_n/ω_n w zależności od współczynnika tłumienia ξ. Najmniejsza wartość tego stosunku występuje dla $\xi = 0{,}5$ i wynosi

$$[B_n]_{\min} = \frac{\omega_n}{2} \tag{8/112}$$

Właściwości szumowe pętli charakteryzuje się pasmem szumowym B_n, lub też



8/14 Wykres unormowanego pasma szumowego pętli drugiego rzędu w zależności od ξ

stosunkiem średniej mocy sygnału do mocy szumu na wejściu układu i na wyjściu generatora VCO. Ponieważ moc średnia sygnału wynosi $P_s = U_s^2/2$, natomiast moce szumu na wejściu układu i wyjściu generatora VCO określają zależności $P_{sn} = N_0 B$ oraz $P_{gn} = 2N_0 B_n$, otrzymujemy

$$\varrho_s = \frac{P_s}{P_{sn}} = \frac{U_s^2/2}{N_0 B} \tag{8/113}$$

$$\varrho_g = \frac{P_s}{P_{gn}} = \frac{U_s^2/2}{2N_0 B_n} \tag{8/114}$$

a stąd

$$\varrho_g = \varrho_s \frac{B}{2B_n} \tag{8/115}$$

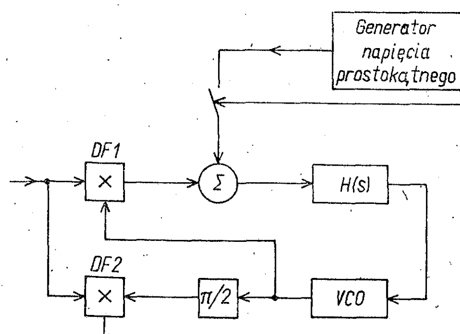
Z uwagi na uproszczenia, jakie poczyniliśmy przy wyznaczaniu $\overline{\varphi_{gn}^2(t)}$, powyższa zależność jest słuszna dla $\varrho_g > 10$.

Zauważmy, że pętla polepsza wejściowy stosunek sygnał/szum $B/2B_n$-krotnie, a więc z tego punktu widzenia pasmo B_n powinno być jak najmniejsze.

8.1.6 Poszerzanie zakresu chwytania

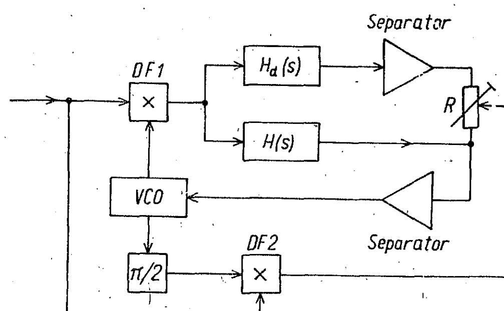
Jak widzieliśmy, dla uzyskania dobrych właściwości szumowych pętli jest konieczne ograniczenie pasma B_n. W pętli drugiego rzędu można przy ustalonym wzmocnieniu (od którego zależy m.in. φ_{b0}) uzyskać dowolnie wąskie pasmo przenoszenia. Zawężanie pasma powoduje jednak zmniejszanie się zakresu chwytania i wzrost czasu potrzebnego na osiągnięcie synchronizacji. Aby uczynić zadość obu tym przeciwstawnym wymaganiom stosuje się różne rozwiązania układowe, z których omówimy dwa, wykorzystujące różne zasady działania.

Na rysunku 8/15 jest pokazany układ, który pozwala na zwiększenie zakresu chwytania bez poszerzania pasma pętli. Napięcie dostarczane przez dodatkowy generator fali prostokątnej, po scałkowaniu w filtrze dolnoprzepustowym, przestraja generator VCO w granicach trzymania pętli. Gdy zostaje osiągnięty stan synchronizacji generator ten musi oczywiście zostać odłączony. W tym celu pętla zawiera dwa detektory fazy: główny — DF_1 i kwadraturowy — DF_2. Zauważmy, że sygnał doprowadzany do detektora kwadraturowego z generatora VCO jest przesunięty w fazie o $\pi/2$. Wskutek tego, po osiągnięciu stanu syn-



8/15 Poszerzanie zakresu chwytania pętli przez zastosowanie dodatkowego generatora

chronizacji sygnał na wyjściu DF_1 przyjmuje wartość minimalną, a sygnał wyjściowy z DF_2 — wartość maksymalną. Przy braku synchronizacji relacja taka między obu sygnałami nie występuje. Napięcie wyjściowe z detektora kwadraturowego jest zatem wskaźnikiem stanu pętli i może zostać wykorzystane do sterowania kluczem wyłączającym bądź włączającym generator dodatkowy.



8/16 Poszerzanie zakresu chwytania pętli przez zmianę jej pasma przenoszenia

Inne rozwiązanie przedstawiono na rys. 8/16. Pętla zawiera dwa filtry: wąskopasmowy o transmitancji $H(s)$ i dodatkowy, szerokopasmowy o transmitancji $H_d(s)$. Przy braku synchronizacji pracuje filtr szerokopasmowy, dzięki czemu zakres chwytania jest dostatecznie duży, a czas osiągania synchronizacji krótki. Po uzyskaniu synchronizacji filtr szerokopasmowy zostaje odłączony. Odłączanie tego filtru musi być stopniowe, aby nie wywołało utraty synchronizacji. Zapewnia to zastosowane rozwiązanie, w którym sygnał z detektora kwadraturowego (DF_2) zmienia odpowiednio rezystancję sterowaną napięciem. Przy braku synchronizacji rezystancja ta jest mała i filtr $H_d(s)$ jest włączony do układu. Gdy osiągany jest stan synchronizacji, rezystancja R ulega zwiększeniu do takiej wartości, przy której filtr szerokopasmowy nie ma wpływu na pracę pętli.

8.2 WYBRANE ZASTOSOWANIA PĘTLI FAZOWYCH

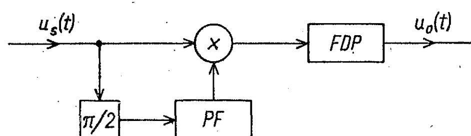
Jak już wspominaliśmy na wstępie, zastosowania pętli fazowych są bardzo liczne i różnorodne. Z tego względu ograniczymy się tutaj do omówienia tylko tych

przypadków, które wiążą się z materiałem wyłożonym w poprzednich rozdziałach. Wiele szczegółowych informacji o innych zastosowaniach można znaleźć w cytowanej na końcu rozdziału literaturze.

8.2.1 Demodulacja amplitudy

W rozdziale 4 omawialiśmy detekcję synchroniczną różnych rodzajów sygnałów zmodulowanych amplitudowo, do przeprowadzenia której jest potrzebny sygnał synchroniczny i synfazowy z nośną. Układ pętli fazowej nadaje się doskonale do wyfiltrowania nośnej z sygnału *AM*, czy też odtworzenia nośnej, jeśli istnieje tylko sygnał pilotujący na małym poziomie mocy, gdyż może on posłużyć do synchronizacji generatora VCO. Demodulację sygnałów *AM-SC* i *QAM* można przeprowadzić, jak to pokazaliśmy, za pomocą układu Costasa. Przedstawiona tutaj analiza działania pętli fazowej powinna dokładniej wyjaśnić sposób jego funkcjonowania.

Z wykorzystaniem pętli fazowej do demodulacji synchronicznej wiąże się jeszcze następujący problem. Jeśli w pętli jako detektor fazy został zastosowany układ mnożący, to jak pokazaliśmy poprzednio, pomiędzy sygnałem wejściowym i sygnałem wytwarzanym w generatorze VCO istnieje w stanie synchronizacji przesunięcie fazowe o wartości $\pi/2$. Ponieważ w detektorze synchronicznym sygnał odniesienia powinien być synfazowy z nośną sygnału demodulowanego, więc należy wprowadzić dodatkowy przesuwnik fazowy, jak to pokazano na rys. 8/17.



8/17 Układ funkcjonalny demodulatora AM z pętlą fazową

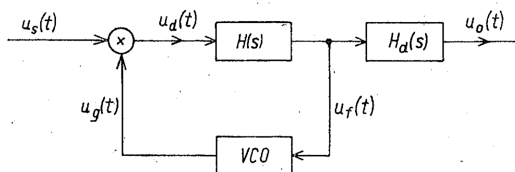
Zauważmy ponadto, że detektor synchroniczny z pętlą fazową wymaga bardzo małego poziomu sygnału wejściowego (orientacyjnie rzędu mV, podczas gdy dla detektora obwiedni, jak widzieliśmy, musi on być rzędu V), dzięki czemu w odbiorniku *AM* przestaje być potrzebny wzmacniacz pośredniej częstotliwości.

8.2.2 Demodulacja częstotliwości

Jak już wiemy z p. 8.1.2, w stanie synchronizacji pętla śledzi zmiany częstotliwości sygnału wejściowego. Gdy sygnałem tym jest sygnał *FM*, napięcie na wejściu generatora VCO jest przebiegiem odwzorowującym zmiany częstotliwości sygnału wejściowego, czyli mamy tu do czynienia z demodulacją *FM*. Schemat funkcjonalny demodulatora pokazano na rys. 8/18. Występujący na wyjściu układu filtr o transmitancji $H_d(s)$ jest filtrem podetekcyjnym.

Przyjmijmy tu dla wygody stosowaną dotychczas postać (8/1) sygnału wejściowego pętli fazowej

$$u_s(t) = U_s \sin[\omega_o t + \varphi_s(t)]$$



8/18 Układ funkcjonalny demodulatora *FM* z pętlą fazową

Aby pozostać w zgodzie z tym zapisem przyjmijmy, że sygnał *FM* wyraża się także funkcją sinusoidalną, tzn.

$$u_{FM}(t) = U\sin\left[\omega_o t+\Delta\omega\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]$$

gdzie $f(t)$ oznacza unormowany sygnał modulujący, spełniający warunki: $\overline{f(t)} = 0$ oraz $|f(t)|_{\max} = 1$. Z porównania obu zależności wynika, że jeśli $u_s(t) = u_{FM}(t)$, to

$$\varphi_s(t) = \Delta\omega\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{8/116}$$

lub inaczej

$$\tilde{\omega}(t) = \frac{\mathrm{d}\varphi_s(t)}{\mathrm{d}t} = \Delta\omega f(t) \tag{8/117}$$

przy czym $\tilde{\omega}(t)$ oznacza składową zmienną pulsacji chwilowej sygnału *FM*.

Przejdźmy do analizy podanego układu. Założymy, że znajduje się on w stanie synchronizacji i wykorzystywany jest liniowy odcinek charakterystyki detektora fazy. W związku z tym sygnał wyjściowy $u_f(t)$, który steruje zarazem generatorem VCO, można wyznaczyć w następujący sposób. Napięcie $u_f(t)$ jest związane z sygnałem wejściowym $\varphi_s(t)$ równaniem

$$U_f(s) = H(s)\,U_d(s) = H(s)k_d\phi_b(s) = k_d H(s)\,G_b(s)\phi_s(s) \tag{8/118}$$

Podstawiając za $G_b(s)$ zależność (8/30), otrzymamy

$$U_f(s) = k_d\frac{sH(s)}{s+KH(s)}\phi_s(s) \tag{8/119}$$

Z porównania zależności (8/119) z (8/29) widać, że $U_f(s)$ można również zapisać w taki sposób

$$U_f(s) = \frac{1}{k_g}G(s)s\phi_s(s) \tag{8/120}$$

ponieważ $K = k_d k_g$. Zauważmy, że $s\phi_s(s) = \mathscr{L}[\dot{\varphi}_s(t)]$. Jeśli wprowadzimy oznaczenie $\tilde{\Omega}(s) = \mathscr{L}[\tilde{\omega}(t)]$, to zgodnie z równaniem (8/117) możemy napisać

$$s\phi_s(s) = \tilde{\Omega}(s) = \mathscr{L}[\tilde{\omega}(t)] = \Delta\omega F(s) \tag{8/121}$$

gdzie $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$. Podstawiając równanie (8/121) do (8/120), otrzymamy zależność pomiędzy sygnałem wyjściowym $u_f(t)$ i sygnałem modulującym $f(t)$

$$U_f(s) = \frac{\Delta\omega}{k_g}G(s)F(s) = G_f(s)F(s) \tag{8/122}$$

Przyjmijmy najpierw, że mamy pętlę pierwszego rzędu, której transmitancja określona jest wzorem (8/42). Wówczas

$$U_f(s) = \frac{\Delta\omega}{k_g}\frac{K}{s+K}F(s) \qquad (8/123)$$

Zakładając $s = j\omega$, otrzymamy związek pomiędzy widmami obu sygnałów

$$U_f(\omega) = \frac{\Delta\omega}{k_g}\frac{K}{j\omega+K}F(\omega) \qquad (8/124)$$

Jak widać, $G_f(\omega)$ jest charakterystyką częstotliwościową typu dolnoprzepustowego o pasmie (3 dB) równym wzmocnieniu pętli K. Jeśli przyjmiemy, że w zakresie tym można charakterystykę amplitudową $|G_f(\omega)|$ przybliżyć stałą, równą

$$|G_f(\omega)| \approx G_f(0) = \frac{\Delta\omega}{k_g}; \quad \omega < K \qquad (8/125)$$

(porównaj z asymptotą Bodego podaną na rys. 8/5 dla $H_1(\omega)$) oraz założymy, iż w tym przedziale $\arg G_f(\omega) = 0$, to przy spełnieniu nierówności

$$\omega_M < K \qquad (8/126)$$

gdzie ω_M jest maksymalną pulsacją w widmie sygnału modulującego $f(t)$, (8/124) sprowadzi się do postaci

$$U_f(\omega) = \frac{\Delta\omega}{k_g}F(\omega) \qquad (8/127)$$

lub

$$u_f(t) = \frac{\Delta\omega}{k_g}f(t) \qquad (8/128)$$

Napięcie $u_f(t)$ jest więc wówczas dokładną repliką (wyjąwszy mnożnik $\Delta\omega/k_g$) sygnału modulującego $f(t)$; a zatem wejściowy sygnał *FM* został zdemodulowany bez zniekształceń.

Demodulację otrzymujemy tylko wówczas, gdy pętla jest w stanie synchronizacji. Na podstawie analizy nieliniowej pętli pierwszego rzędu stwierdziliśmy (patrz rys. 8/10), że stan synchronizacji otrzymuje się, jeśli maksymalna różnica pomiędzy pulsacją sygnału wejściowego i pulsacją generatora VCO nie przekracza wzmocnienia pętli. Ponieważ w omawianym przypadku maksymalna wartość tej różnicy może wynosić $\Delta\omega$, musi być spełniony warunek

$$\Delta\omega < K \qquad (8/129)$$

W przypadku pętli drugiego rzędu (o dużym wzmocnieniu), $G(s)$ wyraża się wzorem (8/38), czyli na podstawie (8/122) możemy napisać

$$G_f(\omega) = \frac{\Delta\omega}{k_g}\frac{2\xi\omega_n(j\omega)+\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\xi\omega_n(j\omega)+\omega_n^2} \qquad (8/130)$$

Z wykresów $|G(\omega)|$ zamieszczonych na rys. 8/7 widać ($G_f(\omega)$ i $G(\omega)$ różnią się tylko stałym mnożnikiem), że pasmo $G_f(\omega)$ jest w przybliżeniu równe ω_n. Warunek

(8/126) należy więc zastąpić teraz nierównością

$$\omega_M < \omega_n \tag{8/131}$$

Dopuszczalną wartość $\Delta\omega$ można oszacować wykorzystując zależności asymptotyczne dla $\varphi_b(t)$, badane w p. 8.1.3. Otrzymaliśmy tam, że przy liniowej zmianie pulsacji chwilowej sygnału wejściowego z szybkością v_ω (patrz rys. 8/9c), asymptotyczna wartość błędu fazy w pętli z przyjętym tutaj rodzajem filtru wyraża się wzorem (8/56). Ponieważ przyjęliśmy, że sygnał modulujący $f(t)$ ma widmo ograniczone do pulsacji ω_M, więc maksymalną szybkość zmian pulsacji chwilowej sygnału $u_s(t)$ można w przybliżeniu wyznaczyć zakładając $f(t) = \sin\omega_M t$. Otrzymujemy wówczas

$$[v_\omega]_{max} = |\Delta\omega\omega_M \cos\omega_M t|_{max} = \Delta\omega\omega_M \tag{8/132}$$

Jeśli teraz przyjmiemy, że przybliżenie liniowe charakterystyki detektora fazy jest uzasadnione, gdy $\varphi_{b0} < 1$ rad, to na podstawie (8/132) i (8/56) otrzymujemy nierówność

$$\Delta\omega < \frac{\omega_n^2}{\omega_M} \tag{8/133}$$

Równocześnie należy jednak pamiętać, że $\Delta\omega$ musi być zawsze mniejsze od wzmocnienia pętli.

Zaletą demodulatora częstotliwości z pętlą fazową w porównaniu do większości demodulatorów omówionych w rozdz. 6 jest to, że może on być układem bezindukcyjnym.

Zauważmy, że dla poprawnego działania demodulatora konieczna jest praca na liniowej części charakterystyki detektora fazy, gdyż inaczej wystąpią zniekształcenia. Pokażemy, że liniowy odcinek charakterystyki detektora fazy z układem mnożącym staje się znacznie szerszy, jeśli sygnały $u_s(t)$ i $u_g(t)$ mają kształt prostokątny. Przyjmijmy zatem, że generator VCO wytwarza przebieg prostokątny, a sygnał $u_s(t)$ przed doprowadzeniem do pętli zostaje ograniczony. Posługując się zależnościami (8/1), sygnały takie można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} u_s'(t) &= U_s \operatorname{sgn}\{\sin[\omega_o t + \varphi_s(t)]\} \\ u_g'(t) &= U_g \operatorname{sgn}\{\cos[\omega_o t + \varphi_g(t)]\} \end{aligned} \tag{8/134}$$

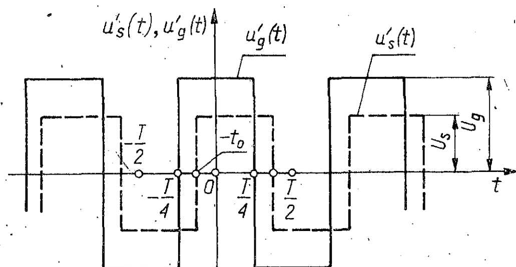
Na wyjściu detektora fazy otrzymujemy więc

$$\begin{aligned} u_d(t) = u_s'(t)u_g'(t) = U_s U_g \operatorname{sgn}\{\sin[\omega_o t + \varphi_s(t)]\} \times \\ \times \operatorname{sgn}\{\cos[\omega_o t + \varphi_g(t)]\} \end{aligned} \tag{8/135}$$

Dla otrzymania wartości średniej, która nas najbardziej interesuje, rozważmy sytuację przedstawioną na rys. 8/19. Narysowano tam przebiegi okresowe, zdefiniowane równaniami (8/134) przy założeniu, że $\varphi_s(t) = \varphi_s = \text{const}$ oraz $\varphi_g(t) = 0$.

Przebieg $u_s'(t)$ jest przesunięty na osi czasu o t_o, czemu w skali kątowej odpowiada przesunięcie $\varphi_s = \omega_o t_o$. Jeśli t_o będzie przyjmować wartości z przedziału $(-T/4, T/4)$, to odpowiadać im będą przesunięcia kątowe $(-\pi/2, \pi/2)$.

Różnicę faz składowych podstawowych obu przebiegów można, zgodnie z przyjętymi założeniami, zapisać następująco: $\varphi_b = \varphi_s - \varphi_g = \varphi_s$. Wprowadźmy oznaczenie $A = U_s U_g$ i wyznaczmy wartość średnią iloczynu $u'_s(t)$ i $u'_g(t)$ za okres.



8/19 Przebiegi prostokątne podawane na układ mnożący, pełniący rolę detektora fazy

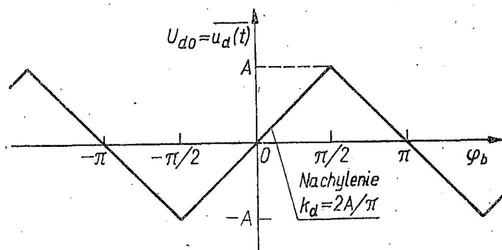
Z rysunku 8/19 widać, że

$$\overline{u_d(t)} = U_{d0} = \frac{A}{T}\left[\int_{-T/2}^{-T/4} dt - \int_{T/4}^{-t_0} dt + \int_{-t_0}^{0} dt + \int_{0}^{T/4} dt - \int_{T/4}^{T/2-t_0} dt + \int_{T/2-t_0}^{T/2} dt\right] = \frac{A}{T} 4t_0 \tag{8/136}$$

Podstawiając $t_0 = \varphi_s/\omega_0$ oraz $\varphi_s = \varphi_b$, otrzymujemy

$$U_{d0} = \overline{u_d(t)} = \frac{2A}{\pi}\varphi_b, \ \varphi_b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \tag{8/137}$$

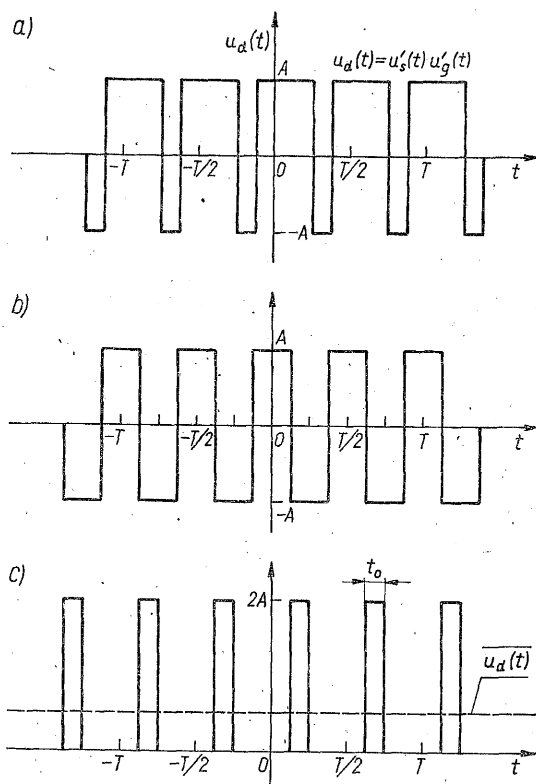
Charakterystyka w przedziale $(-\pi/2, \pi/2)$ jest więc odcinkiem linii prostej o dodatnim nachyleniu, równym $k_d = 2A/\pi$. W analogiczny sposób można określić przebieg charakterystyki detektora dla kolejnych przedziałów o długości π. W rezultacie otrzymujemy charakterystykę okresową, pokazaną na rys. 8/20.



8/20 Charakterystyka detektora fazy z układem mnożącym dla przebiegów z rys. 8/19

Zauważmy, że amplitudy przebiegów prostokątnych są stałe, zatem stałe jest także nachylenie charakterystyki k_d. W praktyce przebiegi nie są idealnie prostokątne, co powoduje, że charakterystyka zaokrągla się w przedziałach otaczających punkty $\pm n\pi/2$. Mimo to, jej zakres liniowy jest znacznie szerszy, niż charakterystyki pokazanej na rys. 8/2. Z uwagi na szerokie widmo sygnałów $u'_s(t)$ i $u'_g(t)$ do ich mnożenia wykorzystuje się zwykle układy podwójnie zrównoważone, co ogranicza występowanie na wyjściu składowych niepożądanych.

Omówiony przypadek wykorzystania układu mnożącego jako detektora fazy w sytuacji, gdy na jego wejścia są podawane sygnały prostokątne, wymaga dodatkowego komentarza. Iloczyn sygnałów $u_s'(t)$ i $u_g'(t)$ przedstawionych na rys. 8/19 ma postać $u_d(t)$ podaną na rys. 8/21a. Zauważmy, że $u_d(t)$ można rozłożyć na sumę dwu składników: przebiegu okresowego o zerowej wartości średniej, pokazanego na rys. 8/21b oraz okresowego ciągu impulsów prostokątnych o szerokości zależnej od różnicy faz (czyli przesunięcia t_o) sygnałów $u_s'(t)$ i $u_g'(t)$,



8/21 Przebieg na wyjściu detektora fazy dla sygnałów wejściowych z rys. 8/19 (a) oraz jego rozkład na składową o zerowej wartości średniej (b) i ciąg impulsów o wartości średniej $\overline{u_d(t)}$, odpowiadającej przesunięciu sygnałów wejściowych o t_o (c)

przedstawionego na rys. 8/21c. Pulsacja podstawowa obu przebiegów wynosi $2\omega_o$. Zauważmy dalej, że przy wyznaczaniu charakterystyki detektora fazy z rys. 8/20 posługiwaliśmy się — tak, jak w p. 8.1.1 — wartością średnią $u_d(t)$, która jest równa wartości średniej przebiegu z rys. 8/21c. Wynika stąd, że uśrednioną charakterystyką detektora można się posługiwać tylko wówczas, gdy filtr wyeliminuje składowe o pulsacjach $2\omega_o$, ..., a jego odpowiedź będzie proporcjonalna do wartości średniej sygnału z rys. 8/21a (lub inaczej — wartości średniej składowej z rys. 8/21c). Sytuacja staje się jeszcze bardziej złożona, gdy sygnał $u_i(t)$ jest

zmodulowany częstotliwościowo[1]. Oznacza to, że zarówno okres powtarzania impulsów z rys. 8/21c, jak i ich szerokość będą ulegały zmianie. Posługiwanie się wówczas uśrednioną charakterystyką detektora fazy i wyprowadzonym poprzednio ciągłym modelem pętli wymaga daleko posuniętej ostrożności.

Z tej krótkiej dyskusji wynika, że modele pętli i ich równania wyprowadzone w p. 8.1.1 i 8.1.2 przestają dobrze opisywać zjawiska zachodzące w układzie z sygnałami prostokątnymi. Istotnie można pokazać [5, 6, 10], że wprowadzając do opisu pętli sygnały z czasem dyskretnym dostaje się inny model, lepiej przystający do układu rzeczywistego. Można również określić w przybliżeniu, kiedy model dyskretny wolno zastąpić analizowanym poprzednio modelem ciągłym, bez ryzyka popełnienia większego błędu. Niestety, z braku miejsca zagadnień tych nie będziemy w książce omawiać. Podamy tylko orientacyjnie, że model ciągły, w którym wykorzystuje się uśrednioną charakterystykę detektora fazy zadowalająco odzwierciedla rzeczywistość, gdy zmiany okresu sygnałów $u_s'(t)$ i $u_g'(t)$ wokół wartości średniej $T_0 = 2\pi/\omega_0$ są małe, zmiany $\varphi_s(t)$ i $\varphi_g(t)$ dostatecznie wolne w porównaniu z T_0, a filtr usuwa skutecznie składowe o pulsacjach $2\omega_0, 4\omega_0, \ldots$

8.2.3 Powielanie i dzielenie częstotliwości

Rozkład przebiegu prostokątnego w szereg Fouriera wskazuje, że zawiera on tylko nieparzyste harmoniczne pulsacji podstawowej ω_0, a amplitudy ich maleją jak $1/(2n+1)$, gdzie n jest rzędem harmonicznej. Zauważmy, że jeśli przebieg $u_g(t)$ ma kształt określony zależnością (8/134), a $u_s(t)$ postać sinusoidalną, to na wyjściu detektora fazy pojawi się składowa stała nie tylko wówczas, gdy $u_s(t)$ ma pulsację ω_0, ale również wtedy, gdy pulsacja tego przebiegu wynosi $(2n+1)\omega_0$. Oznacza to, że pętlę fazową można synchronizować sygnałami o pulsacjach będących wielokrotnościami pulsacji spoczynkowej ω_0 generatora VCO. Układ dokonuje w takim przypadku dzielenia częstotliwości.

Jeśli z kolei $u_g(t)$ będzie sinusoidalny, a $u_s(t)$ ma postać prostokątną, to generator VCO można synchronizować harmonicznymi sygnału wejściowego o pulsacji podstawowej ω_0. Mamy wówczas zjawisko powielania częstotliwości. Łatwo sprawdzić, że im wyższy jest rząd wykorzystywanej harmonicznej, tym mniejszą wartość ma nachylenie charakterystyki detektora fazy.

Jest sprawą istotną, że wszystkie dyskutowane tu przypadki można otrzymać za pomocą detektora fazy wykorzystującego ten sam układ mnożący. Układ taki został przeanalizowany w rozdz. 1, a jego schemat przedstawiono na rys. 1/18. Jeśli przyjmiemy, że w przetworniku PY jest wyeliminowane sprzężenie zwrotne, tzn. $R_Y = 0$, a wydajność prądowa równoważnego generatora wynosi $2I_Y$, to prąd różnicowy i_R można wyrazić wzorem (1/71), czyli

---

[1] Jak pokazaliśmy w dodatku D8 sygnały takie (patrz (8/134)) można przedstawić szeregiem o postaci (D8/7), w którym każdy wyraz jest sygnałem pasmowym o widmie skupionym wokół pulsacji $n\omega_0$.

$$i_R = 2I_Y \operatorname{tgh} \frac{u_X(t)}{2U_T} \operatorname{tgh} \frac{u_Y(t)}{2U_T} \tag{8/138}$$

Zakładając, że interesuje nas napięcie wyjściowe z układu, do którego dołączono zaznaczone na rysunku rezystory R_C i oznaczając je przez u_d, otrzymamy

$$u_d = R_C i_R = 2R_C I_Y \operatorname{tgh} \frac{u_X(t)}{2U_T} \operatorname{tgh} \frac{u_Y(t)}{2U_T} \tag{8/139}$$

Rozważmy następujące przypadki:

1.

$$|u_X(t)| \ll 2U_T \quad \text{oraz} \quad |u_Y(t)| \ll 2U_T$$

Wówczas (8/139) można przybliżyć wyrażeniem

$$u_d(t) = R_C \frac{I_Y}{2U_T^2} u_X(t) u_Y(t) \tag{8/140}$$

Jeśli $u_X(t)$ i $u_Y(t)$ mają postać (8/3), to

$$\overline{u_d(t)} = R_C \frac{I_X}{4U_T^2} U_s U_g \sin\varphi_b \tag{8/141}$$

a więc otrzymujemy charakterystykę sinusoidalną, pokazaną na rys. 8/2;

2.

$$|u_X(t)| \gg 2U_T \quad \text{oraz} \quad |u_Y(t)| \gg 2U_T$$

W tym przypadku zależność (8/139) przekształca się do postaci

$$u_d(t) = 2R_C I_Y \operatorname{sgn}\left[\frac{u_X(t)}{2U_T}\right] \operatorname{sgn}\left[\frac{u_Y(t)}{2U_T}\right] \tag{8/142}$$

Wykorzystując wyprowadzenie wzoru (8/137) możemy napisać

$$\overline{u_d(t)} = \frac{4R_C I_Y}{\pi} \varphi_b, \quad \varphi_b \in (-\pi/2, \pi/2) \tag{8/143}$$

Otrzymaliśmy więc charakterystykę o kształcie trójkątnym, pokazaną na rys. 8/20, przy czym $A = 2R_C I_Y$;

3.

$$|u_X(t)| \ll 2U_T \quad \text{oraz} \quad |u_Y(t)| \gg 2U_T$$

Teraz równanie (8/139) można przybliżyć w sposób następujący:

$$u_d(t) = \frac{R_C I_Y}{U_T} u_X(t) \operatorname{sgn}\left[\frac{u_Y(t)}{2U_T}\right] \tag{8/144}$$

W zależności od tego, czy $u_X(t) = u_s(t)$ a $u_Y(t) = u_g(t)$, czy też odwrotnie $u_X(t) = u_g(t)$ a $u_Y(t) = u_s(t)$, otrzymujemy przypadki umożliwiające dzielenie, bądź też powielanie częstotliwości. Jak łatwo sprawdzić, charakterystyka fazowa ma w obu przypadkach kształt sinusoidalny, a jej nachylenie w początku układu zależy od tego, która z harmonicznych przebiegu prostokątnego jest wykorzystywana.

Literatura

1. Best R. E.: *Phase-Locked Loops; Theory, Design and Applications*. McGraw Hill, New York 1984.
2. Blanchard A.: *Phase-Locked Loop; Application to Coherent Receiver Design*. John Wiley & Sons, New York 1976.
3. Gardner F. M.: *Phaselock Techniques*. John Wiley & Sons, New York 1966.
4. Gardner F. M.: Charge-Pump Phase-Lock Loops. *IEEE Trans.*, Vol. Com-28, No. 11, pp. 1849—1858. 1980.
5. Hauke W., Saalfrank W.: Exact Description of PLLs with Edge-Triggered Phase Detectors. *AEÜ*, Band 41, Heft 5, 273—280, 1987.
6. Jeżewski M., Szkudliński W.: *Generatory synchronizowane i ich zastosowania*. WNT, Warszawa 1981.
7. Klapper J., Frankle J. T.: *Phase-Locked and Frequency-Feedback Systems*. Academic Press. New York 1972.
8. Rohde U. L.: *Digital PLL Frequency Synthesizers. Theory and Design*. Prentice-Hall, New York 1983.
9. Sklorz A.: Pętle fazowe PLL z sygnałami prostokątnymi. *Archiwum Elektrotechniki*, Z. 2 1986.

DODATEK **1**

WPŁYW REZYSTANCJI SZEREGOWEJ NA PRACĘ ZŁĄCZA *p-n*

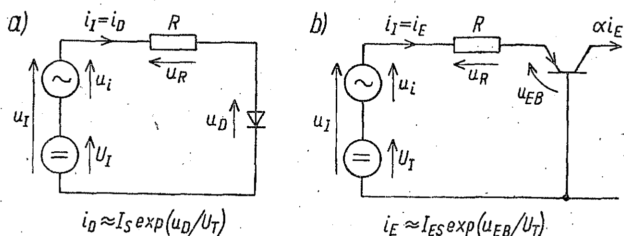
W układach elektronicznych spotyka się często sytuację, w której złącze *p-n*, traktowane jako bezinercyjny element nieliniowy, współpracuje z szeregowym rezystorem liniowym. Łączna charakterystyka takiego układu ma — przy odpowiednio dobranej wartości rezystancji szeregowej — kształt bardziej pożądany w wielu zastosowaniach, niż charakterystyka samego złącza. W szczególności można otrzymać w ten sposób charakterystykę, która jest w przybliżeniu przedziałami prostoliniowa, co wykorzystuje się na przykład w konstrukcji niektórych rodzajów modulatorów amplitudy i detektorów obwiedni.

Wpływ rezystancji szeregowej na pracę złącza *p-n* przeanalizujemy na przykładzie układu podanego na rys. D1/1a, zawierającego diodę. Należy jednak zauważyć, że zarówno sama analiza, jak i rezultaty, które uzyskamy będą słuszne także dla układu pokazanego na rys. D1/1b, gdzie rezystor szeregowy współpracuje ze złączem emiter-baza tranzystora bipolarnego.

Ze względu na zastosowania rozpatrzymy oddzielnie dwa przypadki różniące się tylko założeniami dotyczącymi napięcia wymuszającego $u_I(t)$.

Przypadek pierwszy. Przyjmijmy, że napięcie $u_I(t)$ ma postać

$$u_I(t) = U_I + u_i(t) \qquad \text{(D1/1)}$$



D1/1 Połączenie szeregowe rezystora liniowego i złącza *p-n*: a) układ z diodą; b) układ z tranzystorem bipolarnym

gdzie U_I oznacza składową stałą, a $u_i(t)$ składową zmienną. Jak zobaczymy później, interesować nas będzie przypadek, gdy $|u_i(t)|_{max}$ jest znacznie mniejsze od U_I, ale stosowne ograniczenie wprowadzimy dopiero wówczas, kiedy będzie można mu nadać jednoznaczny sens.

Charakterystykę diody przybliżymy wyrażeniem

$$i_I = I_S[\exp(u_D/U_T)-1] \approx I_S\exp(u_D/U_T) \tag{D1/2}$$

ponieważ interesować nas będzie taki zakres pracy układu, w którym $\exp(u_D/U_T) \gg 1$. Wykorzystując (D1/2), równanie układu możemy zapisać w postaci

$$u_I = u_R+u_D = Ri_I+U_T\ln\frac{i_I}{I_S} \tag{D1/3}$$

Dla $u_i = 0$ równanie to przybiera formę

$$U_I = RI_I+U_T\ln\frac{I_I}{I_S} \tag{D1/4}$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$u_D|_{u_I=U_I} = U_T\ln\frac{I_I}{I_S} = U_D \tag{D1/5}$$

Przy braku sygnału zmiennego współrzędne (U_D, I_I) wyznaczają spoczynkowy punkt pracy Q na charakterystyce diody.

Po wykorzystaniu zależności (D1/5) równanie (D1/3) można zapisać następująco:

$$u_I = Ri_I+U_T\ln\frac{i_I}{I_I}+U_D \tag{D1/6}$$

Wyznaczmy teraz wejściową rezystancję różniczkową układu

$$r_{we} = \left.\frac{\partial u_I}{\partial i_I}\right|_{i_I=I_I} = R+r_d \tag{D1/7}$$

gdzie

$$r_d = \left.\frac{\partial u_D}{\partial i_I}\right|_{i_I=I_I} = \frac{U_T}{I_I} \tag{D1/8}$$

stanowi rezystancję różniczkową diody w spoczynkowym punkcie pracy Q.

Przepiszmy zależność (D1/6) w sposób następujący:

$$u_I-U_D = Ri_I+U_T\ln\frac{i_I}{I_I} \tag{D1/9}$$

i wprowadźmy napięcie normujące

$$U_{TN} = (R+r_d)I_I = (1+g_dR)U_T \tag{D1/10}$$

gdzie

$$g_d = \frac{1}{r_d} = \frac{I_I}{U_T} \tag{D1/11}$$

Dzieląc równanie (D1/9) przez (D1/10), otrzymamy ostatecznie

$$\frac{u_I - U_D}{U_{TN}} = \frac{g_d R}{1+g_d R} \frac{i_I}{I_I} + \frac{1}{1+g_d R} \ln \frac{i_I}{I_I} \tag{D1/12}$$

Wykres zależności (D1/12) dla różnych wartości iloczynu $g_d R$ jest podany na rys. D1/2. Jak łatwo zauważyć, gdy $g_d R = 0$, to $U_{TN} = U_T$ i zależność (D1/12) sprowadza się do postaci

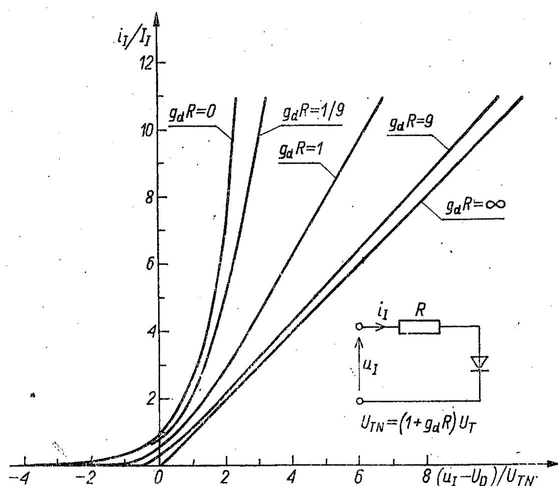
$$u_I = U_T \ln \frac{i_I}{I_I} + U_D = U_T \ln \frac{i_I}{I_S} \tag{D1/13}$$

opisującej samą diodę, bez rezystancji szeregowej. Gdy $g_d R \to \infty$, to (D1/12) przekształca się w granicy w zależność liniową

$$\frac{u_I - U_D}{U_T} = g_d R \frac{i_I}{I_I} \tag{D1/14}$$

którą po wykorzystaniu związku (D1/11), można zapisać następująco:

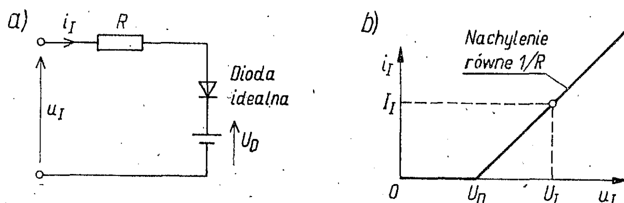
$$u_I - U_D = R i_I \tag{D1/15}$$



D1/2 Unormowane charakterystyki układu z rys. D1/1a, przy $g_d R$ jako parametrze

Pomiędzy tymi granicznymi postaciami charakterystyki łącznej układu z rys. D1/1a mieszczą się krzywe odpowiadające wszystkim pozostałym wartościom iloczynu $g_d R$. Z uwagi na złożoną postać zależności (D1/12) jej użyteczność jest ograniczona. Dlatego dla $g_d R \ll 1$ charakterystykę układu przybliża się zwykle charakterystyką samej diody, opisaną wzorem (D1/13). Gdy $g_d R \gg 1$, to (D1/12) można przybliżyć równaniem (D1/15). Jak widać, otrzymujemy wówczas, że

$$i_I = \begin{cases} \dfrac{u_I - U_D}{R} & \text{dla } u_I > U_D \\ 0 & \text{dla } u_I \leqslant U_D \end{cases} \tag{D1/16}$$

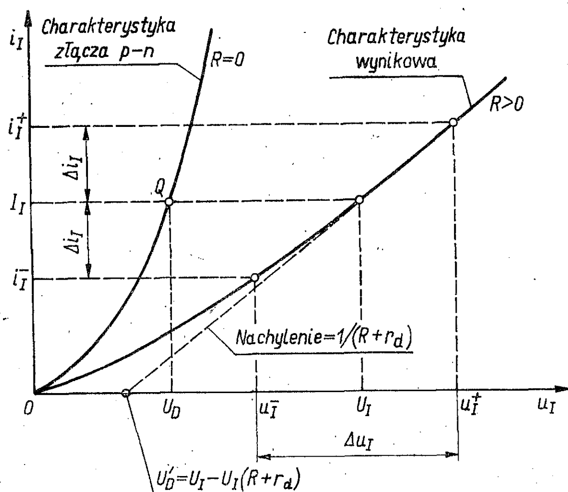


D1/3 Model rozpatrywanego układu w przypadku, gdy $g_dR \to \infty$: a) schemat zastępczy; b) charakterystyka

a więc układ z rys. D1/1a można zastąpić układem podanym na rys. D1/3a, o charakterystyce łamanej, przedstawionej na rys. D1/3b.

Zbadajmy teraz, jak analizowany układ można opisać z punktu widzenia sygnału zmiennego $u_i(t)$. Przyjmijmy, że napięciu $u_I^+ > U_I$ odpowiada prąd $i_I^+ = I_I + \Delta i_I$, a napięciu $u_I^- < U_I$ prąd $i_I^- = I_I - \Delta i_I$. Na podstawie równania (D1/9) możemy napisać

$$\frac{u_I^+ - u_I^-}{U_T} = \frac{\Delta u_I}{U_T} = g_d R\left(1 + \frac{\Delta i_I}{I_I}\right) + \ln\left(1 + \frac{\Delta i_I}{I_I}\right) +$$
$$- g_d R\left(1 - \frac{\Delta i_I}{I_I}\right) - \ln\left(1 - \frac{\Delta i_I}{I_I}\right) =$$
$$= 2 g_d R \frac{\Delta i_I}{I_I} + \ln\left(\frac{1 + \Delta i_I / I_I}{1 - \Delta i_I / I_I}\right) \qquad \text{(D1/17)}$$



D1/4 Ilustracja wpływu rezystancji R na przebieg charakterystyki wynikowej $i_I = f(u_I)$

Rozważana sytuacja jest zilustrowana na rys. D1/4. Zbadajmy, kiedy zależność (D1/17) jest w przybliżeniu liniowa. W tym celu rozwiniemy drugi wyraz prawej strony w szereg potęgowy

$$\ln\left(\frac{1 + \Delta i_I / I_I}{1 - \Delta i_I / I_I}\right) = 2\left[\frac{\Delta i_I}{I_I} + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta i_I}{I_I}\right)^3 + \ldots\right] \qquad \text{(D1/18)}$$

Po podstawieniu zależności (D1/18) do (D1/17) i uporządkowaniu wyrazów, otrzymamy

$$\frac{\Delta u_I}{U_T} = 2(1+g_d R)\frac{\Delta i_I}{I_I}\left[1+\frac{1}{3(1+g_d R)}\left(\frac{\Delta i_I}{I_I}\right)^2+\ldots\right] \tag{D1/19}$$

Z wyrażenia (D1/19) widać, że jeśli spełniona zostanie nierówność

$$\frac{1}{3(1+g_d R)}\left(\frac{\Delta i_I}{I_I}\right)^2 \leqslant 1 \tag{D1/20}$$

to możemy napisać, iż

$$\Delta u_I \approx 2U_T(1+g_d R)\frac{\Delta i_I}{I_I} = (R+r_d)\Delta i_I \tag{D1/21}$$

Wprowadzając oznaczenia

$$u_i = \frac{\Delta u_I}{2}; \quad i_i = \Delta i_I$$

otrzymamy postać

$$u_i \approx \frac{U_T}{I_I}(1+g_d R)i_i = (R+r_d)i_i \tag{D1/22}$$

opisującą rozważany układ dla składowych zmiennych napięcia u_I i prądu i_I. Jak widać, dla składowych zmiennych u_i oraz i_i układ z rys. D1/1a można zastąpić układem liniowym, składającym się z szeregowego połączenia rezystancji R i r_d.

Zbadajmy bliżej warunek (D1/20), przy którym zastosowane przybliżenie liniowe jest uzasadnione. Jeśli przyjmiemy na przykład, że wartość maksymalna wyrazu kwadratowego w wyrażeniu (D1/19) ma być mniejsza, niż x [%] wartości wyrazu liniowego, to nierówność (D1/20) przyjmie postać

$$\frac{1}{3(1+g_d R)}\left(\frac{i_{i\max}}{I_I}\right)^2 < 0{,}01x \tag{D1/23}$$

Wyznaczając z równania (D1/22) stosunek $i_{i\max}/I_I$ i podstawiając jego wartość do (D1/23), otrzymamy nierówność określającą maksymalną wartość napięcia zmiennego $u_i(t)$, przy której jest słuszna uproszczona zależność (D1/22). Po prostych przekształceniach otrzymujemy

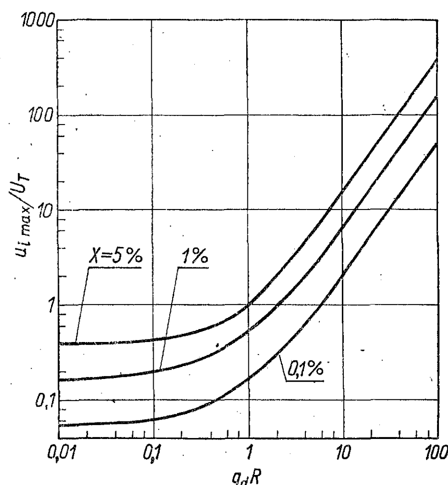
$$|u_i(t)|_{\max} < u_{i\max} \tag{D1/24}$$

przy czym

$$\frac{u_{i\max}}{U_T} = \sqrt{0{,}03x[\%](1+g_d R)^3} \tag{D1/25}$$

Wykres funkcji (D1/25) pokazano na rys. D1/5. Jak widać, za pomocą odpowiedniego doboru wartości iloczynu $g_d R$ możemy linearyzować charakterystykę łączną układu w otoczeniu punktu spoczynkowego o współrzędnych (U_I, I_I). Przykładowo, przy ustalonym punkcie pracy Q diody (g_d = const) i przyjęciu $x = 1\%$ oraz $U_T = 26$ mV, dla $g_d R = 1$ mamy $u_{i\max} = 4{,}5$ mV,

natomiast dobierając $g_dR = 5$ otrzymujemy już $u_{i\max} = 66{,}2$ mV, co oznacza prawie piętnastokrotne rozszerzenie liniowego zakresu charakterystyki łącznej układu.



D1/5 Unormowane maksymalne wartości napięcia wejściowego $u_{i\max}$ w zależności od iloczynu g_dR, przy różnych wartościach x

Przypadek drugi. Obecnie zbadamy zachowanie się układu z rys. D1/1a przy założeniu, że przyłożone napięcie nie zawiera składowej stałej, to znaczy

$$u_I(t) = u_i(t); \quad \overline{u_i(t)} = 0 \tag{D1/26}$$

Wykorzystując zależność (D1/2), dostajemy dla układu równanie napięciowe o postaci (D1/3), tj.

$$u_i = u_R + u_D = Ri_I + U_T \ln \frac{i_I}{I_S}$$

Przepiszmy to równanie w sposób następujący:

$$\frac{u_i}{U_T} = R\frac{i_I}{U_T} + \ln\frac{Ri_I}{U_T} - \ln\frac{RI_S}{U_T} \tag{D1/27}$$

lub też w równoważnej formie

$$\frac{u_i}{U_T} = \frac{u_R}{U_T} + \ln\left(\frac{u_R}{U_T}\right) - U_{DS} \tag{D1/28}$$

gdzie

$$u_R = Ri_I \quad \text{oraz} \quad U_{DS} = \ln\left(\frac{RI_S}{U_T}\right) \tag{D1/29}$$

Jak można zauważyć z zależności (D1/28), gdy stosunek u_R/U_T zmienia się od 20 do 200, to $\ln(u_R/U_T)$ zmienia swą wartość od 3 do 5,3, a więc wpływ drugiego składnika na zależność u_i od u_R jest niewielki. Jeśli na przykład przyjmiemy, że $\ln(u_R/U_T) = 5$, to wyrażenie (D1/29) przybliżyć można zależnością liniową

o postaci

$$\frac{u_i}{U_T} = \frac{u_R}{U_T} + 5 - U_{DS} \tag{D1/30}$$

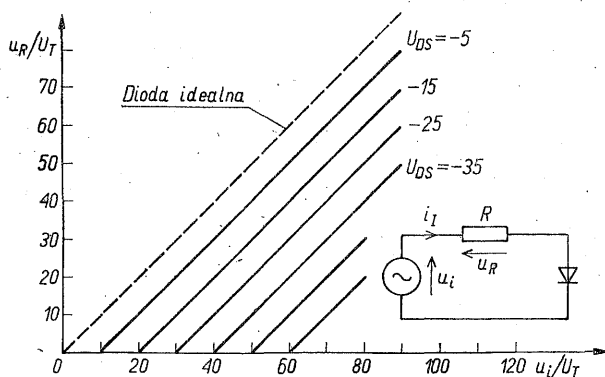
Wartość U_{DS} zależy od wartości rezystancji szeregowej R oraz prądu nasycenia I_S (czyli od rodzaju zastosowanej diody). Jeśli potraktujemy U_{DS} jako parametr, to równanie (D1/30) określa nam rodzinę prostych, pokazanych na rys. D1/6.

Wynika stąd, że interesująca nas charakterystyka $u_R = f(u_i)$ układu została przybliżona zależnością

$$u_R = i_I R = \begin{cases} u_i - U_P & \text{dla } u_i > U_P \\ 0 & \text{dla } u_i \leqslant U_P \end{cases} \tag{D1/31}$$

gdzie

$$U_P = U_T(5 - U_{DS}) = U_T\left(5 - \ln \frac{RI_S}{U_T}\right) \tag{D1/32}$$



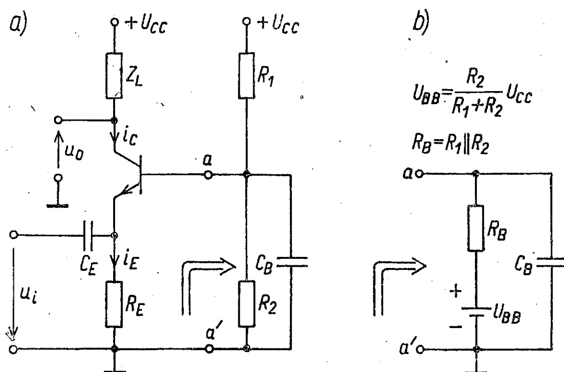
D1/6 Rodzina charakterystyk $u_R = f(u_i, U_{DS})$

Wielkość U_P stanowi wartość progową napięcia wejściowego, po przekroczeniu której w układzie zaczyna płynąć prąd. Układ zachowuje się więc, jak idealny prostownik z progiem napięciowym U_P. Zauważmy, że im większa jest wartość R oraz I_S, tym mniejszą wartość przyjmuje U_P. Jeśli przyjmiemy przykładowo, że $R = 1$ kΩ to dla diody germanowej, dla której $I_S = 2 \cdot 10^{-7}$ A dostajemy $U_P = 256$ mV, natomiast dla diody krzemowej przy $I_S = 2 \cdot 10^{-12}$ A otrzymamy $U_P = 556$ mV.

DODATEK 2

NIELINIOWE CHARAKTERYSTYKI PROSTYCH UKŁADÓW Z TRANZYSTOREM BIPOLARNYM

W zastosowaniach nieliniowych proste układy z pojedynczym tranzystorem bipolarnym mogą spełniać różne funkcje (np. generacja drgań sinusoidalnych, przemiana częstotliwości, modulacja amplitudowa). W dodatku tym omówimy nieliniowe właściwości takich układów, pobudzanych przebiegiem jedno- i dwuharmonicznym. Rozpatrzymy najpierw najogólniejszy przypadek polaryzacji tranzystora, w układzie o wspólnej bazie, z zasilaniem jednobateryjnym (rys. D2/1). Uzyskane wyniki będzie można zaadaptować do innych przypadków (np. układy z rys. D2/4).



D2/1 Schemat analizowanego układu (a) i zastępczy obwód zasilania bazy (b)

Analizę układu z rys. D2/1a przeprowadzimy zakładając, że tranzystor pracuje w normalnym obszarze aktywnym, a prąd emitera może być przybliżony zależnością

$$i_E = \frac{i_C}{\alpha} = I_{ES} \exp \frac{u_{BE}}{U_T} \tag{D2/1}$$

w której poszczególne symbole oznaczają:

α — stałoprądowy współczynnik wzmocnienia tranzystora w układzie WB (przyjmowany dalej jako niezależny od prądu);

I_{ES} — prąd nasycenia złącza emiterowego;

U_T — potencjał termiczny

$$U_T = kT/q \tag{D2/2}$$

o wartości ok. 26 mV dla $T = 300$ K.

Przy tych założeniach i uwzględnieniu oznaczeń wprowadzonych dla schematu zastępczego Thévenina (rys. D2/1b), napięcie spoczynkowe baza-emiter U_{BEQ} i spoczynkowy prąd emitera I_{EQ} (wielkości u_{BE} i i_E przy braku pobudzenia sygnałem zmiennym $u_i(t)$) są związane równaniami:

$$U_{BEQ} = U_T \ln \frac{I_{EQ}}{I_{ES}} \tag{D2/3}$$

$$I_{EQ} = \frac{U_{BB} - U_{BEQ}}{R_E + (1-\alpha)R_B} \tag{D2/4}$$

Rozwiązanie powyższego układu równań jest trudne, jednakże jeśli przyjmie się typowe wartości prądu I_{ES}:

$I_{ES} \approx 2 \cdot 10^{-16}$ A — dla tranzystorów krzemowych w scalonych układach monolitycznych;

$I_{ES} \approx 2 \cdot 10^{-14}$ A — dla tranzystorów krzemowych, wykonywanych jako elementy dyskretne;

$I_{ES} \approx 2 \cdot 10^{-7}$ A — dla tranzystorów germanowych,

to w zakresie $I_{EQ} = (0{,}1...10)$ mA napięcie U_{BEQ}, z wystarczającą dla praktycznych celów dokładnością, może być przybliżone wartością stałą wynoszącą odpowiednio: 760 mV, 650 mV i 220 mV.

Warto przy okazji zauważyć, że jeśli ma zachodzić skuteczna stabilizacja spoczynkowego punktu pracy tranzystora, w sensie niezależności od zmian temperatury oraz rozrzutu produkcyjnego parametrów, to prąd I_{EQ} musi być mało wrażliwy na te zmiany. Z równania (D2/4) wynika, że dla utrzymania stałości I_{EQ} muszą być spełnione następujące warunki:

$$U_{BB} \gg U_{BEQ}; \qquad R_E \gg (1-\alpha)R_B$$

Dla większości praktycznych zastosowań dobór: $U_{BB} \approx 10U_{BEQ}$, $R_E \approx R_B$ zapewnia już bardzo dobrą stabilizację spoczynkowego punktu pracy tranzystora.

Pobudzenie jednoharmoniczne

Przyjmując pobudzenie napięciowe

$$u_i(t) = U\cos\omega_o t \tag{D2/5}$$

oraz zakładając, że pojemności C_E i C_B stanowią w przybliżeniu zwarcie dla sygnału sterującego w zakresie rozpatrywanych pulsacji ω_o, otrzymamy równanie

na chwilową wartość prądu emitera w postaci

$$i_E(t) = I_{ES}\exp\left(\frac{U_{BE}}{U_T}\right)\exp\left(\frac{U}{U_T}\cos\omega_o t\right) \tag{D2/6}$$

przy czym

$$U_{BE} = U_{BEQ} - \Delta U \tag{D2/7}$$

ΔU — przyrost wartości średniej napięcia baza-emiter. Dla uproszczenia zapisu unormujemy napięcia względem potencjału termicznego U_T:

$$X_{BE} = \frac{U_{BE}}{U_T} = \frac{U_{BEQ}-\Delta U}{U_T} = X_{BEQ} - \Delta X \tag{D2/8}$$

$$x = \frac{U}{U_T} \tag{D2/9}$$

Przy takich oznaczeniach równanie (D2/6) przyjmuje postać

$$I_E(t) = I_{ES}\exp(X_{BE})\exp(x\cos\omega_o t) \tag{D2/10a}$$

lub

$$i_E(t) = I_{EQ}\exp(-\Delta X)\left[I_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} I_k(x)\cos k\omega_o t\right] \tag{D2/10b}$$

gdzie

$$I_{EQ} = I_{ES}\exp(X_{BEQ})$$

$I_k(x)$ — zmodyfikowana funkcja Bessela pierwszego rodzaju, rzędu k ($k = 0, 1, 2, \ldots$);

$$I_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x\cos\theta}\cos k\theta \, d\theta \tag{D2/11}$$

Wartość średnia prądu emitera I_{E0} jest określona wzorem

$$I_{E0} = I_{EQ}\exp(-\Delta x) I_0(x) \tag{D2/12a}$$

Prąd ten jest określony obwodem polaryzacji, musi zatem zachodzić

$$I_{E0} = \frac{U_{BB}-U_{BE}}{R_E+(1-\alpha)R_B} = I_{EQ} + \frac{\Delta U}{R_E+(1-\alpha)R_B} =$$

$$= I_{EQ}\left(1+\frac{\Delta U}{U_R}\right) = I_{EQ}\left(1+\frac{\Delta X}{X_R}\right) \tag{D2/12b}$$

przy czym

$$U_R = X_R U_T = I_{EQ}[R_E + (1-\alpha)R_B] = U_{BB} - U_{BEQ}$$

jest sumą spoczynkowych napięć występujących na rezystancjach R_E i R_B ($R_B = R_1 || R_2$ — rys. D2/1b).

Z przyrównania zależności (D2/12a) i (D2/12b) wynika, że

$$\left(1+\frac{\Delta X}{X_R}\right)\exp(\Delta X) = I_0(x) \tag{D2/13}$$

i z tego równania można wyznaczyć przyrost Δx unormowanego napięcia baza-emiter. Rozwiązanie równania (D2/13) jest trudne i niemożliwe do uzyskania w zamkniętej postaci. Jednakże dla $X_R \geqslant 20$ (tzn. $U_R = X_R U_T \geqslant 520$ mV; $T = 300$ K), co jest zawsze prawdziwe przy odpowiednio zaprojektowanym układzie polaryzacji, wartość ΔX może być obliczona z zależności przybliżonej

$$\exp(\Delta X) \approx I_0(x) \tag{D2/14}$$

przy czym błąd przybliżenia nie przekracza 5% i jest tym mniejszy, im większa jest wartość X_R. Na tej podstawie będziemy przyjmować dalej, że ΔX jest określona jako

$$\Delta X = \ln I_0(x) \tag{D2/15}$$

Podstawiając zależność (D2/15) do (D2/13) otrzymujemy

$$\exp(-\Delta X) = \left(1+\frac{\Delta X}{X_R}\right)\frac{1}{I_0(x)} = \left(1+\frac{\ln I_0(x)}{X_R}\right)\frac{1}{I_0(x)}$$

Po uwzględnieniu tej zależności we wzorze (D2/10b), średni prąd emitera można zapisać wzorem

$$I_{E0} = I_{EQ}\left[1+\frac{\ln I_0(x)}{X_R}\right] \tag{D2/16}$$

i wobec tego odpowiedź prądowa dana będzie ostatecznie w postaci

$$i_E(t) = I_{E0}\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{I_k(x)}{I_0(x)}\cos k\omega_0 t\right] \tag{D2/17}$$

Na rysunku D2/2a pokazano wykres funkcji (D2/16) ilustrujący zmiany wartości średniej I_{E0} wywołane zmianą poziomu wysterowania.

Z teorii funkcji Bessela wiadomo, że dla dostatecznie małych oraz dostatecznie dużych wartości argumentu x są stosowane przybliżenia

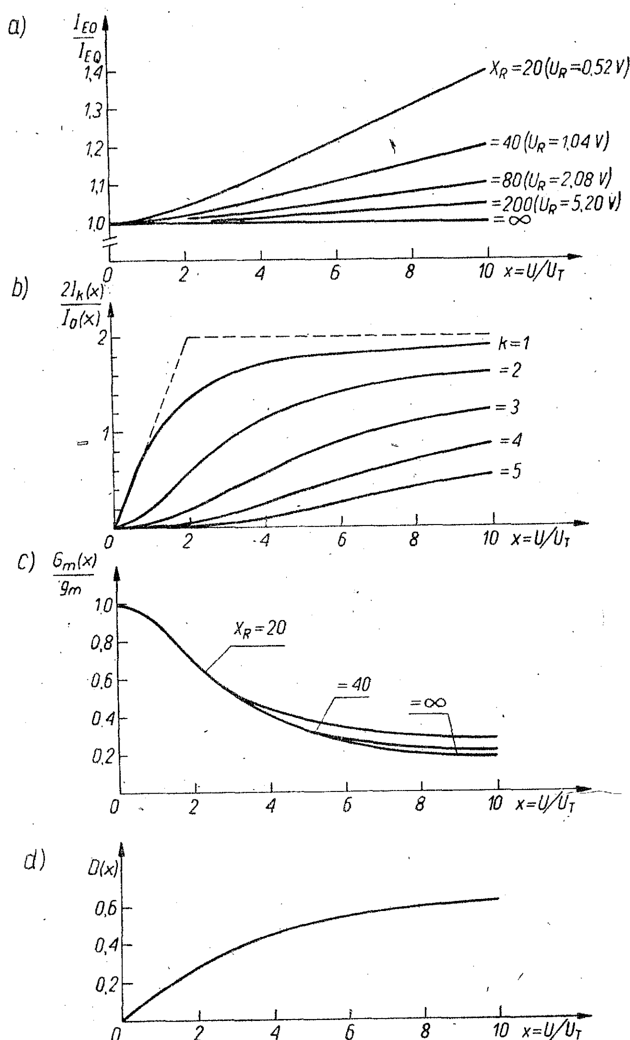
$$I_k(x) \underset{x\ll 1}{\approx} \frac{(x/2)^k}{k!} \tag{D2/18a}$$

$$I_k(x) \underset{x\gg 1}{\approx} \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\, e^{-k^2/2x} \tag{D2/18b}$$

Na tej podstawie dla małych x otrzymujemy $I_0(x) \approx 1$ i $I_{E0} \approx I_{EQ}$. Natomiast dla dużych x mamy $I_0(x) \approx \exp(x)/\sqrt{2\pi x}$[1]; a zatem funkcja (D2/16) może być

---

[1] Przykładowo, błąd tego przybliżenia nie przekracza 3% dla $x \geqslant 5$ i 1% dla $x \geqslant 10$.



D2/2 Ilustracja uzależnienia wielkosygnałowych parametrów układu od amplitudy jednoharmonicznego pobudzenia: a) zmiany wartości średniej I_{E0}; b) wykresy funkcji $2I_k(x)/I_0(x)$ dla $k = 1, 2, \ldots, 5$; c) przebiegi unormowanej transkonduktancji $G_m(x)/g_m$, przy X_R jako parametrze; d) wykres funkcji pomocniczej $D(x)$

przybliżona zależnością liniową

$$\frac{I_{E0}}{I_{EQ}} = 1+\frac{\ln I_0(x)}{X_R} \approx 1+\frac{x-0{,}919-\frac{1}{2}\ln x}{X_R} \approx 1+\frac{x}{X_R}$$

Na rysunku D2/2b pokazano wykres funkcji $2I_k(x)/I_0(x)$, umożliwiający (przy znajomości wartości średniej I_{E0}) wyznaczenie amplitud kilku kolejnych harmonicznych odpowiedzi (D2/17). Na wykresie naniesiono linią przerywaną

asymptoty przebiegu $2I_1(x)/I_0(x)$, wyznaczone na podstawie (D2/18)

$$2I_1(x)/I_0(x) \underset{x\to 0}{\to} x; \quad 2I_1(x)/I_0(x) \underset{x\to\infty}{\to} 2$$

Zauważmy, że układ pracuje w zakresie liniowym jedynie przy ograniczeniu poziomu wysterowania do wartości $x < 1$.

Miarą zniekształceń nieliniowych układu jest zawartość k-tej harmonicznej prądu wyjściowego

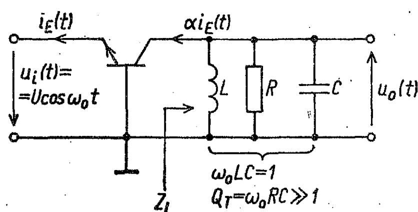
$$h_k = I_k(x)/I_1(x) \underset{x\ll 1}{\approx} \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k-1}$$

Przykładowo dla $x = 0{,}1$ (tzn. $U = xU_T = 2{,}6$ mV) występują już dość znaczne zniekształcenia, spowodowane głównie zawartością drugiej harmonicznej

$$h_2 = I_2(x)/I_1(x) \approx x/4 = 0{,}025$$

gdyż $h_2 \gg h_k$, $k = 3, 4, \ldots$

W przypadku zastosowania tranzystora bipolarnego w generatorze LC (lub w jednostopniowym wąskopasmowym wzmacniaczu rezonansowym, a także niektórych innych zastosowaniach), obciążeniem układu (liniowy dwójnik Z_L) jest pojedynczy równoległy obwód rezonansowy. Sytuację taką przedstawiono na rys. D2/3. Przyjęto, iż obwód rezonansowy jest dostrojony do pulsacji ω_0 i charakteryzuje się dużą dobrocią.



D2/3 Zmiennoprądowy schemat zastępczy układu z rys. D2/1, przy obciążeniu obwodem rezonansowym

W analizie układów obciążonych selektywnym obwodem rezonansowym jest dogodnie operować *jednoharmoniczną funkcją opisującą* (oznaczaną skrótowo: JFO), zdefiniowaną jako

$$G_m(x) = \frac{I_{c1}(x)}{U} = \frac{\alpha I_{e1}(x)}{U} \tag{D2/19}$$

gdzie: I_{c1}, I_{e1} — są to amplitudy składowych podstawowych prądu odpowiednio kolektora i emitera. Na podstawie zależności (D2/17), (D2/19) i (D2/9) wielkość $G_m(x)$, nazywaną dalej *wielkosygnałową* (inaczej: *linearyzowaną harmonicznie*) *transkonduktancją tranzystora,* możemy przedstawić jako

$$G_m(x) = g_m\left[1+\frac{\ln I_0(x)}{X_R}\right]\frac{2I_1(x)}{xI_0(x)} \tag{D2/20}$$

przy czym g_m jest *małosygnałową (linearyzowaną w zwykłym sensie) transkonduktancją tranzystora*, wyznaczoną dla spoczynkowego punktu pracy, tzn.

$$g_m = \left.\frac{di_C}{du_{BE}}\right|_{u_{BE}=U_{BEQ}} = \frac{\alpha I_{EQ}}{U_T} \qquad \text{(D2/21)}$$

D2/1 Zestawienie niektórych wartości liczbowych, umożliwiających sporządzenie uniwersalnych krzywych $G_m(x, X_R)$ oraz $D(x)$

x	$\frac{2I_1(x)}{xI_0(x)}$	$\ln I_0(x)$	$D(x)$
0	1,000	0	0
1	0,895	0,236	0,167
2	0,698	0,824	0,294
3	0,543	1,585	0,385
4	0,432	2,425	0,458
5	0,357	3,305	0,508
6	0,304	4,208	0,546
8	0,234	6,058	0,600
10	0,190	7,943	0,642
20	0,098	17,590	0,727

Wykres funkcji $G_m(x, X_R)$ pokazano na rys. D2/2c. W tablicy D2/1 zestawiono niektóre dane liczbowe, pomocne przy rozwiązywaniu zadań numerycznych.

Innym parametrem charakteryzującym nieliniowe właściwości układu z rys. D2/3 jest *napięciowy współczynnik zawartości harmonicznych*, definiowany jako

$$h = \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} \left|\frac{U_{ok}}{U_{o1}}\right|^2} \qquad \text{(D2/22)}$$

W definicji tej U_{ok} jest amplitudą k-tej harmonicznej napięcia wyjściowego $u_O(t)$. Zatem

$$U_{ok} = \alpha I_{E0} \frac{2I_k(x)}{I_0(x)} |Z_L(k\omega_o)|$$

Przy dostatecznie dużej dobroci Q_T obwodu rezonansowego, iloraz modułów impedancji Z_L dla k-tej harmonicznej i składowej podstawowej można przedstawić zależnością przybliżoną

$$\left|\frac{Z_L(k\omega_o)}{Z_L(\omega_o)}\right| \underset{\substack{k\geqslant 2\\ Q_T\gg 1}}{\approx} \frac{1}{Q_T}\,\frac{k}{k^2-1} \qquad \text{(D2/23)}$$

Uwzględniając tę zależność ostatecznie otrzymamy

$$h \approx \frac{1}{Q_T} D(x) \qquad \text{(D2/24)}$$

gdzie

$$D(x) = \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2-1}\right)^2\left[\frac{I_k(x)}{I_1(x)}\right]^2} \qquad \text{(D2/25)}$$

Wykres funkcji pomocniczej $D(x)$ przedstawiono na rys. D2/2d. W tablicy D2/1 przytoczono niektóre dane numeryczne.

Pobudzenie dwuharmoniczne

Jeśli do układu z rys. D2/1a, zamiast pobudzenia o postaci (D2/5), doprowadzimy napięcie

$$u_i(t) = U_1\cos\omega_1 t + U_2\cos\omega_2 t \qquad \text{(D2/26)}$$

to postępując podobnie, jak przy wyprowadzaniu równania (D2/17) otrzymamy

$$i_E(t) = I_{E0}\left[1+2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{I_p(x_1)}{I_0(x_1)}\cos p\omega_1 t\right]\left[1+2\sum_{q=1}^{\infty}\frac{I_q(x_2)}{I_0(x_2)}\cos q\omega_2 t\right] \qquad \text{(D2/27)}$$

przy czym I_{E0} oznacza wartość średnią prądu emitera, określoną teraz jako

$$I_{E0} = I_{EQ}\left\{1+\frac{\ln[I_0(x_1)I_0(x_2)]}{X_R}\right\} \qquad \text{(D2/28)}$$

zaś x_1 i x_2 są to unormowane amplitudy sygnału pobudzającego

$$x_1 = \frac{U_1}{U_T}; \qquad x_2 = \frac{U_2}{U_T} \qquad \text{(D2/29)}$$

Pozostałe wielkości były definiowane poprzednio.

Z tożsamości trygonometrycznej: $\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$ wynika, że przebieg $i_E(t)$ zawiera składowe o pulsacji ω_{mn}, będącej kombinacją pulsacji ω_1 i ω_2:

$$\omega_{mn} = |m\omega_1 + n\omega_2| \qquad \text{(D2/30)}$$

gdzie m, n — liczby całkowite. Amplitudę tych składowych można przedstawić za pomocą zależności o ogólnej postaci

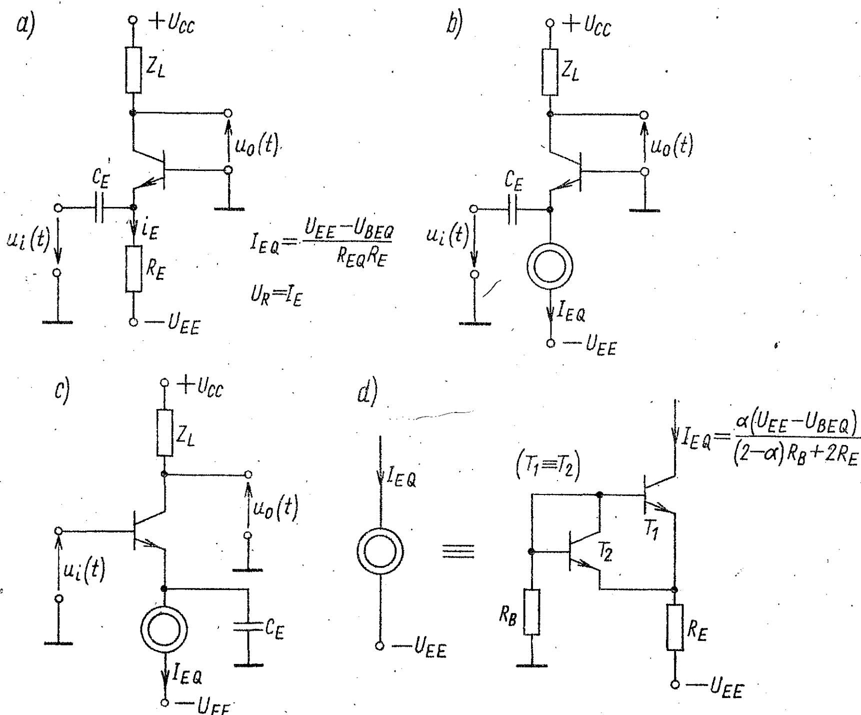
$$I_{mn} = I_{E0}\frac{2I_m(x_1)I_n(x_2)}{I_0(x_1)I_0(x_2)} \qquad \text{(D2/31)}$$

gdyż dla zmodyfikowanych funkcji Bessela rzędu całkowitego zachodzi związek: $I_k(x) = I_{-k}(x)$.

Uwagi końcowe

Uzyskane wyniki analizy przy pobudzeniu jedno- i dwuharmonicznym mogą być bezpośrednio wykorzystane także do scharakteryzowania nieliniowych właściwości układów z inaczej rozwiązanym obwodem zasilania tranzystora lub pracujących w innej konfiguracji. Na przykład, przy podtrzymaniu poczynionych

wstępnie założeń, dotyczących opisu charakterystyki tranzystora oraz zerowych reaktancji pojemności C_E i C_B dla sygnału sterującego $u_i(t)$, chwilowa wartość prądu emitera $i_E(t)$ układów z rys. D2/4 będzie określona zależnością (D2/17) lub (D2/27), zależnie od rodzaju zastosowanego pobudzenia. Wartość wystę-



D2/4 Przykłady wzmacniaczy stosowanych w generatorach *LC*: a) układ WC z zasilaniem dwubateryjnym; b) układ WB ze źródłem stałoprądowym; c) układ WE ze źródłem stałoprądowym; d) typowa realizacja źródła

pującego pośrednio w tych zależnościach spoczynkowego prądu emitera I_{EQ}, jest oczywiście ustalona parametrami konkretnego obwodu zasilania. W układach z polaryzującym źródłem stałoprądowym (rys. D2/4b i c) wartość średnia prądu emitera jest wymuszona tym źródłem i nie ulega zmianie podczas sterowania sygnałem zmiennym (zmianom podlega wartość średnia napięcia baza-emiter). Stan taki należy uwzględnić w odpowiednich wzorach, kładąc $I_{E0} = I_{EQ}$.

DODATEK **3**

NIELINIOWE CHARAKTERYSTYKI UKŁADU RÓŻNICOWEGO

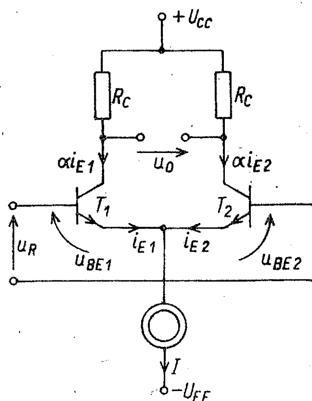
Układ różnicowy z symetrycznymi tranzystorami bipolarnymi charakteryzuje się wieloma interesującymi właściwościami, znanymi Czytelnikowi z kursu analogowych układów liniowych. Układ ów znajduje również szerokie zastosowanie przy nieliniowym przetwarzaniu sygnałów i z tego względu zasługuje na odrębne omówienie.

D3.1 UKŁAD PODSTAWOWY

Charakterystyki przejściowe

Schemat podstawowego układu różnicowego pokazano na rys. D3/1. Niech emiterowe prądy tranzystorów T_1 i T_2 będą dane jako

$$i_{Ej} = I_{ESj} \exp\left(\frac{u_{BEj}}{U_T}\right); \qquad (j = 1, 2) \tag{D3/1}$$



D3/1 Schemat ideowy podstawowego układu różnicowego

gdzie U_T jest potencjałem termicznym, zdefiniowanym wzorem (D2/2). Przyjmijmy, że dodatkowo zachodzi: $I_{ES1} = I_{ES2}$ (słuszne np. w przypadku, gdy tranzystory są scalone na tej samej płytce i są identyczne co do rozmiarów i konstrukcji). Wówczas możemy zapisać, iż

$$\frac{i_{E1}}{i_{E2}} = \exp\left(\frac{u_{BE1}-u_{BE2}}{U_T}\right) \tag{D3/2}$$

Unormujmy wejściowe napięcie różnicowe następująco:

$$z = \frac{u_R}{U_T} \tag{D3/3}$$

Uwzględniając, że dla rozpatrywanego układu

$$u_R = u_{BE1} - u_{BE2}$$

oraz zachodzi

$$i_{E1} + i_{E2} = I$$

na podstawie (D3/2) otrzymamy

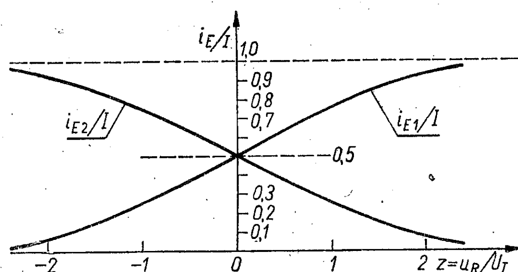
$$i_{E1} = I\frac{e^z}{1+e^z} \tag{D3/4}$$

$$i_{E2} = I\frac{1}{1+e^z} \tag{D3/5}$$

Unormowane charakterystyki I_{E1}/I oraz i_{E2}/I w funkcji z pokazano na rys. D3/2. Zauważmy, że prądy i_{E1} i i_{E2} wykazują nieparzystą symetrię wokół wartości $I/2$. Inaczej mówiąc funkcje:

$$i_{E1}(z) - \frac{I}{2} = \frac{I}{2}\,\frac{e^z-1}{e^z+1} = \frac{I}{2}\operatorname{tgh}\frac{z}{2} = i(z) \tag{D3/6}$$

$$i_{E2}(z) - \frac{I}{2} = \frac{I}{2}\,\frac{1-e^z}{1+e^z} = -\frac{I}{2}\operatorname{tgh}\frac{z}{2} = -i(z) \tag{D3/7}$$



D3/2 Unormowane charakterystyki układu różnicowego

są nieparzystymi funkcjami zmiennej z. Jeśli więc sterowanie układu odbywa się sygnałem o zerowej wartości średniej, co występuje w wielu zastosowaniach praktycznych, wówczas wartości średnie prądów emiterowych są równe $I/2$. Jeśli dodatkowo sygnał sterujący jest sygnałem okresowym, to prądy te są pozbawione parzystych harmonicznych.

W przypadku, gdy jako przebieg wyjściowy interesować nas będzie różnicowy prąd kolektorowy

$$i_R = i_{C1} - i_{C2} = \alpha(i_{E1} - i_{E2}) \tag{D3/8}$$

lub różnicowe napięcie $u_O = i_R R_C$ (rys. D3/1), to możemy posługiwać się wzorem

$$i_R = 2\alpha i = \alpha I \mathrm{tgh}\left(\frac{z}{2}\right) \tag{D3/9}$$

wynikającym wprost z zależności (D3/6) i (D3/7).

Parametry przy pobudzeniu jednoharmonicznym

Przyjmijmy pobudzenie o postaci

$$u_R(t) = U\cos\omega_o t \tag{D3/10}$$

lub równoważnie

$$z(t) = \frac{u_R(t)}{U_T} = \frac{U}{U_T}\cos\omega_o t = x\cos\omega_o t$$

gdzie x oznacza — podobnie, jak poprzednio (dodatek D2) — unormowaną amplitudę pobudzenia.

Poszukując odpowiedzi na to pobudzenie, na podstawie równań (D3/6) i (D3/7) możemy napisać

$$i_{E1}(t) = \frac{I}{2} + i(t) \tag{D3/11}$$

$$i_{E2}(t) = \frac{I}{2} - i(t) \tag{D3/12}$$

gdzie

$$i(t) = \frac{I}{2}\mathrm{tgh}\left(\frac{x}{2}\cos\omega_o t\right) \tag{D3/13}$$

Przebieg $i(t)$ zawiera jedynie nieparzyste harmoniczne i może być przedstawiony szeregiem Fouriera o postaci

$$i(t) = I_{r1}\cos\omega_o t + I_{r3}\cos 3\omega_o t + I_{r5}\cos 5\omega_o t + \ldots =$$

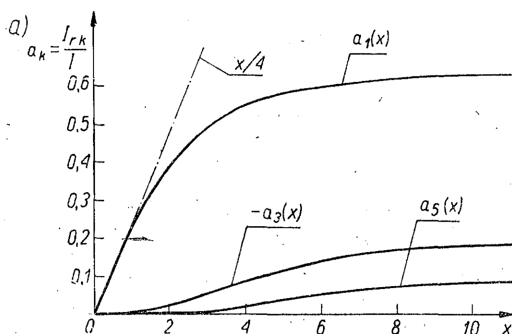
$$= I \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} a_k(x)\cos k\omega_o t \tag{D3/14}$$

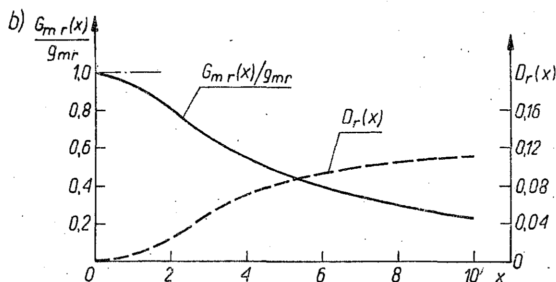
przy czym

$$a_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{1}{2}\left[\mathrm{tgh}\left(\frac{x}{2}\cos\omega_o t\right)\right]\cos k\omega_o t\right\}\mathrm{d}(\omega_o t) = \frac{I_{rk}}{I} \tag{D3/15}$$

Wykresy współczynnika $a_k(x)$, dla $k = 1, 3, 5$, pokazano na rys. D3/3a (niektóre wartości a_k zestawiono w tabl. D3/1). Z wykresu i z przytoczonych wartości liczbowych wynika, że dla $x < 1$ ($U = xU_T < 26$ mV) para różnicowa zachowuje w przybliżeniu cechy układu liniowego. Mamy bowiem: $a_1(x) \approx x/4$

oraz pomijalnie małe harmoniczne prądów kolektorowych, gdyż $|a_3(x)|/a_1(x) \approx \approx 0{,}021 \gg |a_k(x)|/a_1(x)$ dla $k = 5, 7, \ldots$ Ze wzrostem x amplitudy harmonicznych ulegają szybkiemu nasyceniu. Przykładowo, dla $x \gtrsim 7$ amplituda składowej podstawowej wynosi: $I_{r1}(x) = a_1(x)I \approx 0{,}62I$. Właśnie ta cecha układu różnicowego stwarza możliwość stosowania go jako pasmowo przepustowego ogranicznika amplitudy, o poziomie ograniczania regulowanym za pomocą wydajności I źródła stałoprądowego.





D3/3 Wykresy ilustrujące zależność wielkosygnałowych parametrów układu różnicowego do amplitudy jednoharmonicznego wysterowania

D3/1 Wielkosygnałowe parametry pary różnicowej przy pobudzeniu jednoharmonicznym

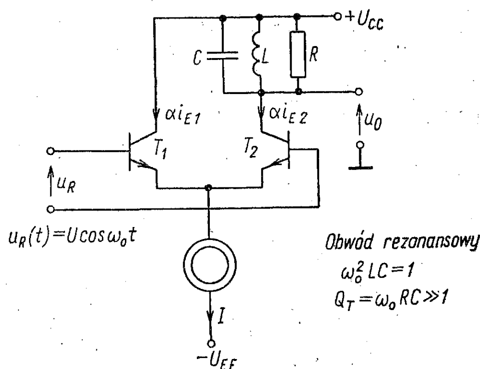
x	$a_1(x) = \frac{I_{r1}}{I}$	$a_3(x) = \frac{I_{r3}}{I}$	$a_5(x) = \frac{I_{r5}}{I}$	$\frac{G_{mr}(x)}{g_{mr}}$	$D_r(x)$
0	0	0	0	1,000	0
0,5	0,123	—	—	0,985	—
1,0	0,236	−0,005	—	0,942	0,007
2,0	0,406	−0,027	—	0,812	0,025
3,0	0,505	−0,061	0,010	0,674	0,046
5,0	0,588	−0,121	0,036	0,470	0,079
7,0	0,611	−0,157	0,056	0,349	0,098
10,0	0,626	−0,183	0,083	0,250	0,113
∞	0,637	−0,212	0,127	0	0,135

Przy bardzo dużych poziomach wysterowania (teoretycznie: $x \to \infty$) przebieg $i(t)$ zbliża się do symetrycznej fali prostokątnej $i_s(t)$ o międzyszczytowej wartości I, tzn.

$$i(t) \approx i_s(t) = \frac{I}{2}\,\mathrm{sgn}(\cos\omega_o t) =$$

$$= \frac{2I}{\pi}\left(\cos\omega_o t - \frac{1}{3}\cos 3\omega_o t + \frac{1}{5}\cos 5\omega_o t + \ldots\right)$$

Układy różnicowe pracują także z obciążeniem w postaci obwodu rezonansowego. W najprostszym przypadku jest to pojedynczy obwód równoległy, umieszczany w obwodzie kolektora tranzystora T_2 (rys. D3/4) lub T_1. Dla



D3/4 Wzmacniacz różnicowy z pojedynczym obwodem rezonansowym

scharakteryzowania właściwości takich układów wprowadźmy, podobnie jak w dodatku D2, *wielkosygnałową transkonduktancję* G_{mr} oraz napięciowy współczynnik zawartości harmonicznych h. Wielkości te zdefiniujmy jako

$$G_{mr} = \frac{\alpha I_{r1}}{U} \tag{D3/16}$$

$$h = \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty}\left|\frac{U_{ok}}{U_{o1}}\right|^2} \tag{D3/17}$$

gdzie U_{ok} — amplituda k-tej harmonicznej napięcia wyjściowego $u_O(t)$.

Korzystając z zależności (D3/15), na podstawie definicji (D3/16) możemy napisać

$$G_{mr}(x) = \frac{\alpha I}{U_T}\,\frac{I_{r1}(x)}{xI} = g_{mr}\frac{4a_1(x)}{x} \tag{D3/18}$$

gdzie g_{mr} oznacza *małosygnałową transkonduktancję pary różnicowej*, określoną jako

$$g_{mr} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u_R}(\alpha i_{E1})|_{u_R=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u_R}(-\alpha i_{E2})|_{u_R=0} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}u_R}\bigg|_{u_R=0} = \frac{\alpha I}{4U_T} \tag{D3/19}$$

Wykres funkcji (D3/18) przedstawiono na rys. D3/3b, a niektóre jej wartości w tabl. D3/1.

Współczynnik zawartości harmonicznych możemy oszacować postępując podobnie, jak przy wyprowadzeniu zależności (D2/24). Przy podtrzymaniu poczynionych tam założeń, dotyczących obwodu rezonansowego i stosowanych oznaczeń, dla układu z rys. D3/4 otrzymamy

$$h \approx \frac{1}{Q_T} D_r(x) \tag{D3/20}$$

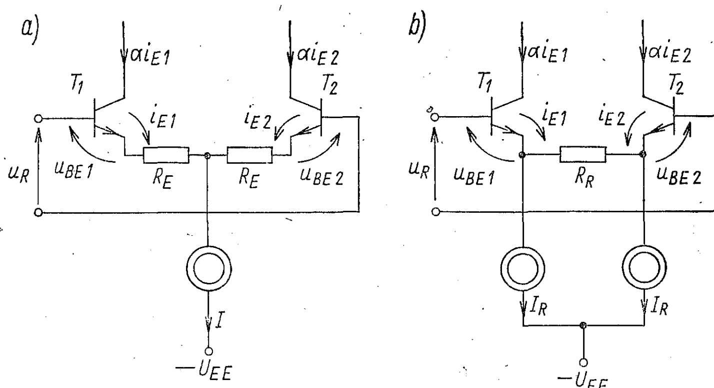
przy czym funkcja pomocnicza $D_r(x)$ jest teraz określona jako

$$D_r(x) = \sqrt{\sum_{k=3,5,7,\ldots}^{\infty} \left(\frac{k}{k^2-1}\right)^2 \left[\frac{a_k(x)}{a_1(x)}\right]^2} \tag{D3/21}$$

Wykres tej funkcji naszkicowano na rys. D3/3b.

D3.2 UKŁADY Z PRĄDOWYM SPRZĘŻENIEM ZWROTNYM

Odmianą układu różnicowego, która m.in. umożliwia linearyzację charakterystyk przejściowych: $i_{E1}(u_R)$, $i_{E2}(u_R)$ oraz $i_R(u_R)$ w większym zakresie napięć wejściowych, jest układ z prądowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym, wprowadzonym w obwodzie emiterów. Dwie typowe konfiguracje układu różnicowego z tego rodzaju sprzężeniem przedstawiono na rys. D3/5. W przypadku gdy $R_R = 2R_E$ oraz $I_R = I/2$, obie konfiguracje są równoważne pod względem charakterystyk przejściowych.



D3/5 Schematy ideowe układu różnicowego z emiterowym sprzężeniem zwrotnym. (Układy a) i b) są równoważne, jeśli $R_R = 2R_E$ i $I_R = I/2$)

Zmierzając do wyznaczenia charakterystyk zajmijmy się układem z rys. D3/5a. W układzie tym obowiązują zależności:

$$u_R = u_{BE1} - u_{BE2} + (i_{E1} - i_{E2})R_E \tag{D3/22}$$

$$i_{E1} + i_{E2} = I \tag{D3/23}$$

Uwzględniając wzory (D3/1) i (D3/3), po wprowadzeniu oznaczeń skrótowych

$$X_E = \frac{IR_E}{U_T} \tag{D3/24}$$

oraz

$$v = \frac{i_{E1}-i_{E2}}{I} = \frac{i_R}{I} \tag{D3/25}$$

otrzymamy zależności opisujące następujące charakterystyki przejściowe układu:

$$z = g_1(i_{E1}) = -\ln\left(\frac{I}{i_{E1}}-1\right)+X_E\left(2\frac{i_{E1}}{I}-1\right) \tag{D3/26}$$

$$z = g_2(i_{E2}) = \ln\left(\frac{I}{i_{E2}}-1\right)-X_E\left(2\frac{i_{E2}}{I}-1\right) \tag{D3/27}$$

$$z = g_3(v) = \ln\frac{1+v}{1-v}+X_E v \tag{D3/28}$$

Ostatnią zależność można również zapisać w postaci

$$z = 2\mathrm{arctgh}\,v+X_E v$$

wskazującej, iż przy braku sprzężenia zwrotnego ($X_E = 0$) dochodzimy wprost do wzoru (D3/9).

Bardziej nas interesujące funkcje odwrotne: $i_{E1} = f_1(z)$, $i_{E2} = f_2(z)$ oraz $v = f_3(z)$, nie dają się zapisać w postaci jawnej.

Wpływ sprzężenia zwrotnego na charakterystyki przejściowe układu ilustrują wykresy pokazane na rys. D3/6.

W nieliniowych układach analogowych można wyróżnić dwa podstawowe zastosowania pary różnicowej ze sprzężeniem zwrotnym:

1. Realizacja nieliniowego przetwornika typu trójkąt-sinus generującego funkcję

$$v = V_m \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{z}{Z_m}\right) \tag{D3/29}$$

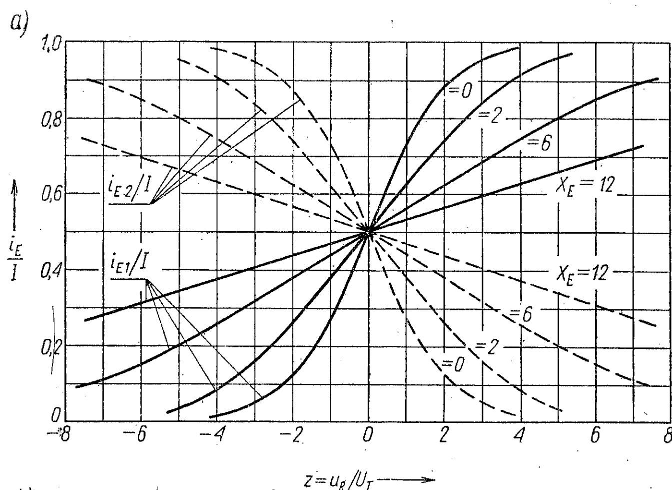
co pozwala przekształcić symetryczny przebieg trójkątny $z(t)$ o zerowej wartości średniej i o amplitudzie Z_m, na przebieg sinusoidalny.

2. Realizacja liniowego przetwornika typu napięcie-prąd o dużym zakresie dynamicznym (zwykle $|u_R| \leqslant 10$ V), stanowiącego jeden z podstawowych podzespołów typowego układu mnożącego.

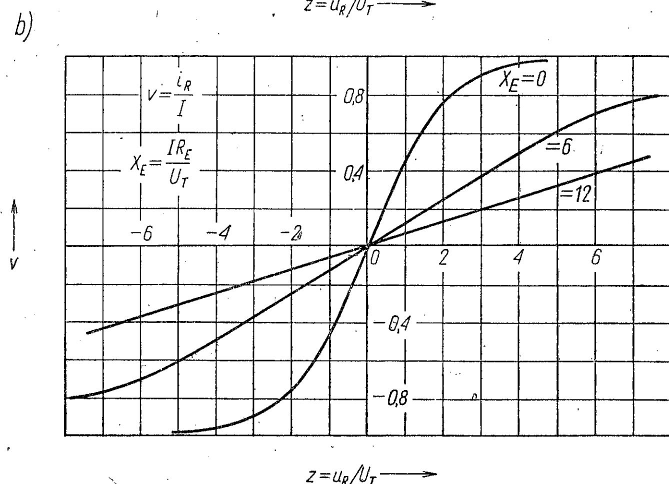
Sposób wykorzystania pary różnicowej jako nieliniowego przetwornika omówiono oddzielnie, w rozdz. 1, wraz z innymi metodami generacji funkcji (D3/29).

Jeśli chodzi o zastosowanie drugiego rodzaju, to rozszerzenie zakresu liniowej pracy przetwornika uzyskuje się w wyniku wprowadzenia odpowiednio silnego

a)



b)



D3/6 Unormowane charakterystyki przejściowe układu różnicowego ze sprzężeniem zwrotnym: a) prądy emiterowe, b) prąd różnicowy

ujemnego sprzężenia zwrotnego. Jest oczywiste, że linearyzujące oddziaływanie sprzężenia na charakterystyki przejściowe układu odbywa się kosztem pogorszenia jego właściwości wzmacniających. Sprzężenie to modyfikuje małosygnałową transkonduktancję układu

$$g_{mf} = \frac{1}{2}\frac{di_R}{du_R}\bigg|_{u_R=0} = \frac{\alpha I}{2U_T}\frac{dv}{dz}\bigg|_{z=0}$$

do wartości

$$g_{mf} = \frac{\alpha I}{2U_T}\frac{1}{2+X_E} = \frac{g_{mr}}{1+(2g_{mr}R_E)/\alpha} \tag{D3/30}$$

Przy dostatecznie silnym sprzężeniu, co można orientacyjnie wyrazić za pomocą warunku

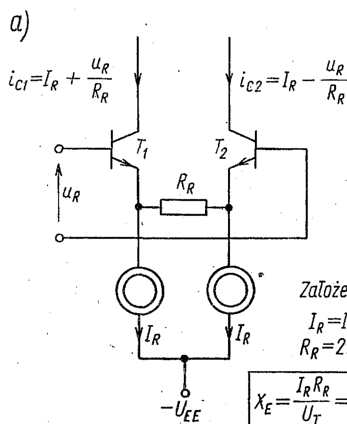
$$X_E = \frac{IR_E}{U_T} \geqslant 2 \tag{D3/31}$$

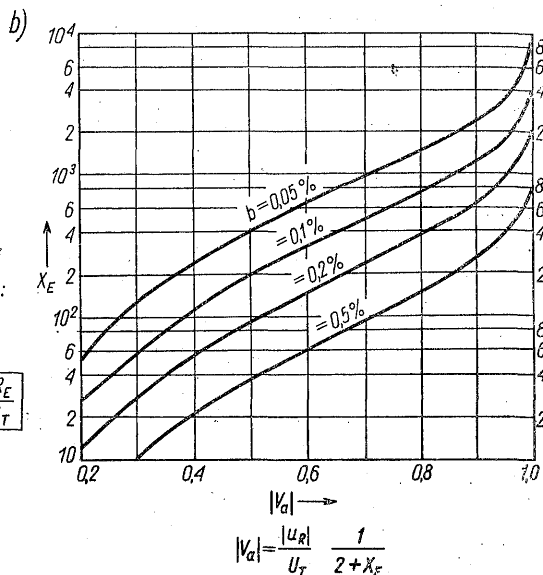
transkonduktancja g_{mf} nie zależy od wydajności I stałoprądowego źródła i wynosi

$$g_{mf} \approx \frac{\alpha}{2R_E} = \frac{\alpha}{R_R} \approx \frac{1}{R_R} \tag{D3/32}$$

Schemat ideowy wzmacniacza pracującego w takich warunkach pokazano na rys. D3/7a. Dla wyeliminowania stanu odcięcia tranzystorów ($i_{C1}, i_{C2} > 0$) musi oczywiście zachodzić: $|u_R| < IR_E$, bądź równoważnie

$$|z| < X_E \tag{D3/33}$$





D3/7 Przykład liniowego przetwornika napięcie/prąd: a) schemat ideowy i podstawowe zależności; b) wykres błędu nieliniowości charakterystyki przejściowej

Oszacowanie zakresu liniowej pracy wzmacniacza przeprowadzimy następująco. Wzmacniacz pracuje w zakresie liniowym, jeśli jego charakterystyka przejściowa $v = f_3(z)$ niewiele różni się od przebiegu liniowego. Obliczmy zatem błąd, jaki wystąpi przy aproksymacji funkcji $v = f_3(z) = g_3^{-1}(z)$ funkcją liniową o postaci

$$v_a = \left(\frac{dv}{dz}\bigg|_{z=0}\right) z = \frac{1}{2+X_E} z \tag{D3/34}$$

Definiując względny błąd przybliżenia jako

$$b = \frac{v_a - v}{v_a} \tag{D3/35}$$

mamy

$$v = v_a(1-b)$$

Podstawiając równanie (D3/36) do (D3/28), dostajemy

$$z = \ln \frac{1+v_a(1-b)}{1-v_a(1-b)} + X_E v_a(1-b)$$

a po uwzględnieniu (D3/34), ostatecznie otrzymamy zależność

$$X_E = \frac{1}{bv_a}\left[\ln \frac{1+v_a(1-b)}{1-v_a(1-b)} - 2v_a\right] \qquad \text{(D3/37)}$$

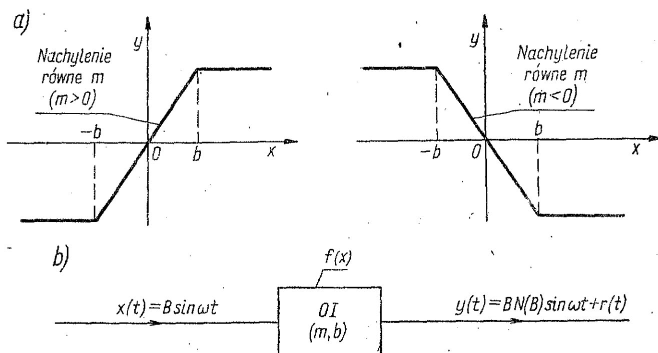
z której można obliczyć wartość X_E (charakteryzującą głębokość sprzężenia zwrotnego) przy narzuconym poziomie wysterowania (wyznacza go pośrednio zmienna v_a) oraz zadanym dopuszczalnym błędzie aproksymacji (b). Wykres funkcji (D3/37) przedstawiono na rys. D3/7b.

DODATEK 4

OGRANICZNIK IDEALNY I JEGO ZASTOSOWANIA DO MODELOWANIA UKŁADÓW NIELINIOWYCH

Na rysunku D4/1 pokazano charakterystyki przejściowe $y = f(x)$ idealnego ogranicznika z przejściem liniowym ($b > 0$). Obydwie te charakterystyki są opisywane funkcją

$$y = \begin{cases} mx & \text{dla } |x| \leqslant b \\ mb\,\mathrm{sgn}(x) & \text{dla } |x| > b \end{cases} \tag{D4/1}$$



D4/1 Idealny ogranicznik symetryczny z przejściem liniowym: a) charakterystyki; b) oznaczenie blokowe

przy czym m może przyjmować wartości dodatnie lub ujemne. Funkcją tą, bądź też liniową kombinacją zbioru funkcji o postaci (D4/1), możemy aproksymować charakterystyki przejściowe wielu układów rzeczywistych. Dla przykładu, mogą to być charakterystyki: wzmacniaczy operacyjnych, ograniczników z diodami włączonymi przeciwsobnie, symetrycznych ograniczników zrealizowanych przy użyciu diod i wzmacniacza operacyjnego, itp.

Zajmiemy się najpierw wyznaczeniem jednoharmonicznej funkcji opisującej idealnego ogranicznika, a następnie pokażemy, że za pomocą tego typu nieliniowości dogodnie jest modelować wiele innych układów nieliniowych.

Przypomnijmy, że jeśli do układu o charakterystyce przejściowej

$$y = f(x) \tag{D4/2}$$

jest doprowadzone harmoniczne pobudzenie

$$x(t) = B\sin\omega t = B\sin\phi \tag{D4/3}$$

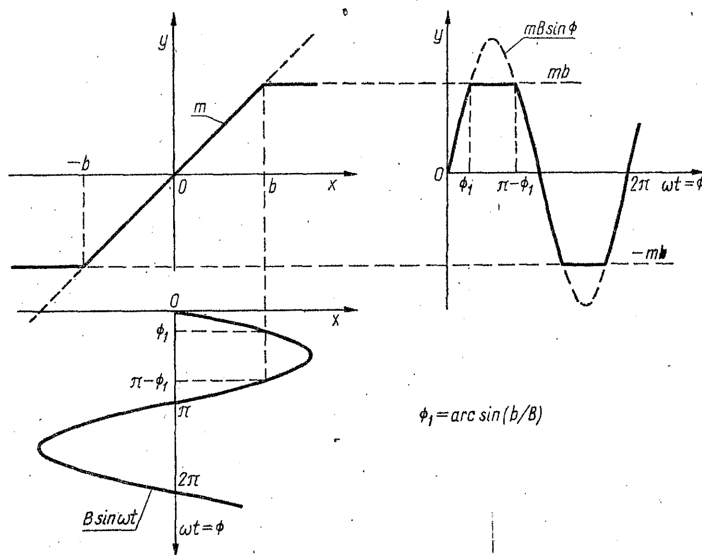
to jednoharmoniczną funkcję opisującą $N(B)$ definiujemy jako

$$N(B) = \frac{Y_m}{B} \tag{D4/4}$$

gdzie Y_m jest zespoloną amplitudą pierwszej harmonicznej odpowiedzi.

Ponieważ w naszym przypadku funkcja (D4/1) jest nieparzysta i jednowartościowa, zatem funkcja opisująca nie będzie miała składowej urojonej. Funkcję $N(B)$ wyznaczymy ze wzoru

$$N(B) = \frac{1}{\pi B}\int_0^{2\pi} f(B\sin\phi)\sin\phi\,d\phi \tag{D4/5}$$



D4/2 Przebiegi czasowe w ograniczniku

Przy $B \leqslant b$ ogranicznik pracuje w zakresie liniowym (rys. D4/2) i wobec tego $N(B) = m$. Pozostaje więc obliczyć całkę (D4/5), przy warunku $B > b$

$$N(B) = \frac{4}{\pi B}\left[\int_0^{\phi_1} mB\sin^2\phi\,d\phi + \int_{\phi_1}^{\pi/2} mb\sin\phi\,d\phi\right.$$

gdzie $\phi_1 = \arcsin(b/B)$.

Po scałkowaniu otrzymamy

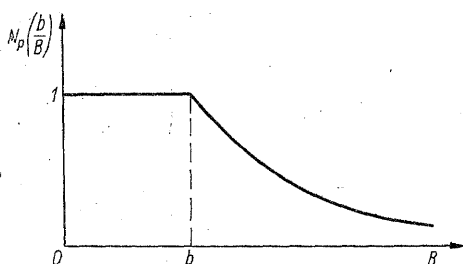
$$N(B) = mN_p\left(\frac{b}{B}\right) \tag{D4/6a}$$

gdzie

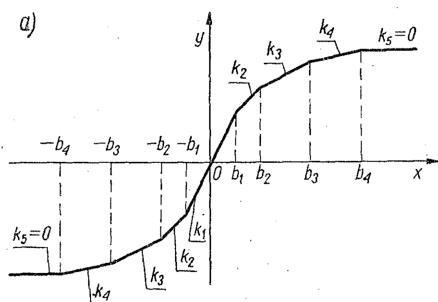
$$N_p\left(\frac{b}{B}\right) = \begin{cases} 1 & \text{dla } B \leqslant b \\ \dfrac{2}{\pi}\left[\arcsin\dfrac{b}{B} + \dfrac{b}{B}\sqrt{1-\left(\dfrac{b}{B}\right)^2}\right] & \text{dla } B > b \end{cases} \tag{D4/6b}$$

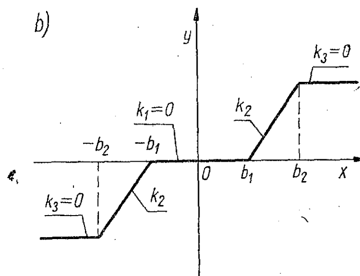
Na rysunku D4/3 przedstawiono wykres ilustrujący zależność funkcji pomocniczej $N_p(b/B)$ od amplitudy pobudzenia B.

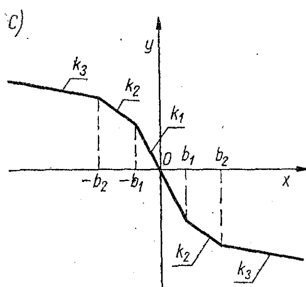
Przy obliczaniu funkcji $N(B)$ posługiwaliśmy się ilustracją graficzną (rys. D4/2), przyjmując $m > 0$. Jest oczywiste, że wzór (D4/6) obowiązuje także dla $m \leqslant 0$.

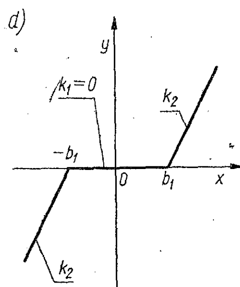


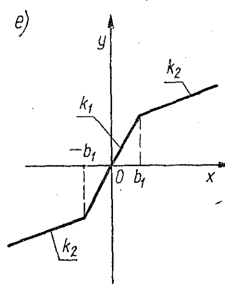
D4/3 Wykres funkcji $N_p(b/B)$











D4/4 Przykłady charakterystyk przejściowych

Idealny ogranicznik (*IO*) będziemy oznaczać symbolem graficznym, pokazanym na rys. D4/1b. Składnik $r(t)$, oznaczający wyższe harmoniczne przebiegu wyjściowego nie interesował nas dotychczas i nadal będziemy go pomijać.

Procedurę wyznaczania jednoharmonicznej funkcji opisującej w przypadku wielu układów nieliniowych można znacznie uprościć na podstawie spostrzeżenia, że ich charakterystyka przejściowa jest określona funkcją, którą można wyrazić liniową kombinacją zbioru funkcji o postaci (D4/1). Dotyczy to nie tylko układów z występującym stanem nasycenia (np. rys. D4/4a i b), lecz także układów o innym typie nieliniowości (np. rys. D4/4c...e). Najogólniej mówiąc, uproszczony sposób wyznaczania jednoharmonicznej funkcji opisującej można zastosować do tych układów, których charakterystyka przejściowa $y = g(x)$ jest funkcją nieparzystą, przedziałami prostoliniową.

Omówimy bliżej to zagadnienie. Niech układ nieliniowy ma charakterystykę przejściową o postaci

$$y = g(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) \tag{D4/7a}$$

gdzie

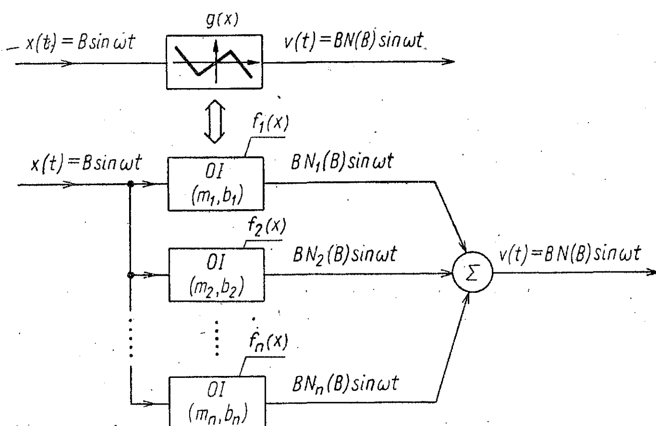
$$y_j = f_j(x) = \begin{cases} m_j x, & |x| \leqslant b_j \\ m_j b_j \operatorname{sgn}(x), & |x| > b_j \end{cases} \tag{D4/7b}$$

przy czym

$$0 < b_1 < b_2 < b_3 < \ldots < b_n \tag{D4/7c}$$

Zauważmy, że funkcja (D4/7b) opisuje charakterystykę idealnego ogranicznika o nachyleniu m_j w strefie liniowej i o wartości progowej b_j, po przekroczeniu której ogranicznik przechodzi gwałtownie w stan nasycenia. Przyjęliśmy zatem, że układ nieliniowy można zestawić z ograniczników idealnych.

Schemat blokowy układu modelującego równanie (D4/7) pokazano na rys.



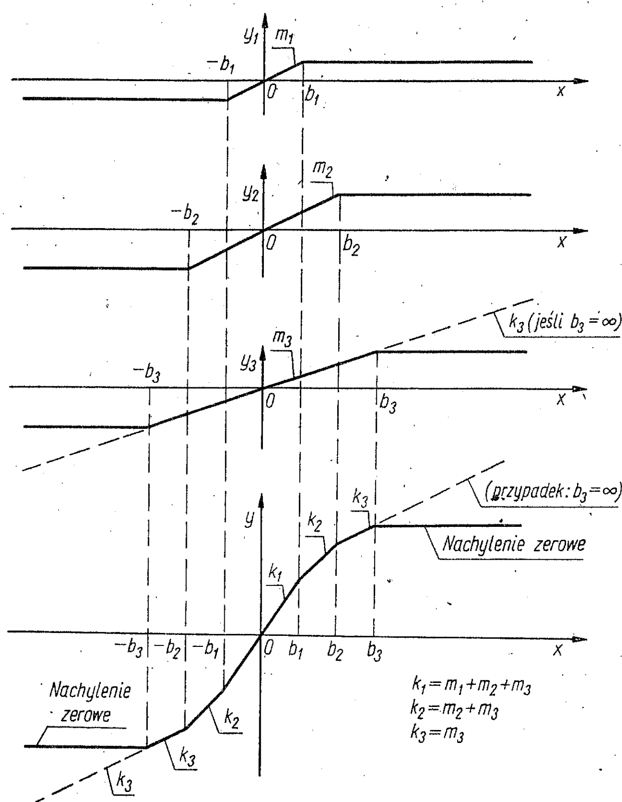
D4/5 Modelowanie układu nieliniowego za pomocą członów podstawowych *OI* (w opisie rysunku uwzględniono jedynie składową podstawową odpowiedzi)

D4/5. Rozpatrywany układ możemy więc uważać za równoległe połączenie n członów podstawowych (człony *OI*).

Funkcja $f_j(x)$ jest nieparzysta, przedziałami prostoliniowa, a zatem funkcja $g(x)$, będąca liniową kombinacją funkcji $f_j(x)$, jest także nieparzysta i przedziałami prostoliniowa.

Wykresem funkcji $y = g(x)$ są charakterystyki symetryczne o postaci linii łamanej. Przykłady takich charakterystyk przedstawiono na rys. D4/4.

Na rysunku D4/6 pokazano sposób konstruowania charakterystyki łącznej $y = g(x)$ z charakterystyk podstawowych $y_j = f(x)$. Przyjęto $n = 3$ i $m_j > 0$.



D4/6 Ilustracja składania charakterystyki $y = g(x)$ z charakterystyk podstawowych $y_j = f_j(x)$

Znając nachylenie m_j liniowego odcinka charakterystyki podstawowej, nachylenia k_j poszczególnych odcinków charakterystyki łącznej znajdziemy z zależności ogólnej

$$k_1 = \sum_{j=1}^{n} m_j$$

$$k_j = k_{j-1} - m_{j-1}, \quad j = 2, 3, \ldots, n \qquad \text{(D4/8)}$$

obowiązującej dla dowolnego m_j i n.

Zauważmy, że próg charakterystyki członu podstawowego można usunąć, kładąc $b_j = \infty$. Człon taki będzie więc członem liniowym, realizującym funkcję $y_j = m_j x$ (p. wzór (D4/7b), a także rys. D4/6, gdzie charakterystykę liniową $y_3 = m_3 x$, narysowano linią przerywaną). Takie podejście pozwoli nam modelować również układy, w których nie występuje stan nasycenia, np. układy o charakterystykach pokazanych na rys. D4/4c...e.

Przystąpmy teraz do znalezienia funkcji opisującej układu o charakterystyce $y = g(x)$. Funkcję opisującą członu podstawowego wyznaczyliśmy już poprzednio. Jest ona określona wzorem (D4/6), w którym należy obecnie w miejsce wielkości b i m wprowadzić odpowiednio b_j i m_j. Wobec tego, na podstawie zależności (D5/7) lub modelu z rys. D4/5, funkcję opisującą rozważanego układu możemy wyrazić wzorem

$$N(B) = \sum_{j=1}^{n} N_j(b) = \sum_{j=1}^{n} m_j N_p\left(\frac{b_j}{B}\right) \qquad \text{(D4/9a)}$$

gdzie

$$N_p\left(\frac{b_j}{B}\right) = \begin{cases} 1 & \text{dla } B \leqslant b_j \\ \frac{2}{\pi}\left[\arcsin\left(\frac{b_j}{B}\right) + \frac{b_j}{B}\sqrt{1-\left(\frac{b_j}{B}\right)^2}\,\right] & \text{dla } B > b_j \end{cases} \qquad \text{(D4/9b)}$$

W wielu przypadkach jest poszukiwana funkcja opisująca układu, którego charakterystyka $y = g(x)$, symetryczna i przedziałami prostoliniowa, jest dana w postaci graficznej. Aby rozwiązać tak postawione zadanie należy wpierw wyznaczyć parametry m_j, b_j i n, występujące we wzorze (D4/9). Parametry te znajdziemy, dokonując podziału charakterystyki $y = g(x)$ na charakterystyki podstawowe $y_j = f_j(x)$. Wówczas po uwzględnieniu związku (D4/8), na podstawie (D4/9a) możemy napisać, iż

$$N(B) = \sum_{j=1}^{n} (k_j - k_{j+1}) N_p\left(\frac{b_j}{B}\right) \qquad \text{(D4/10)}$$

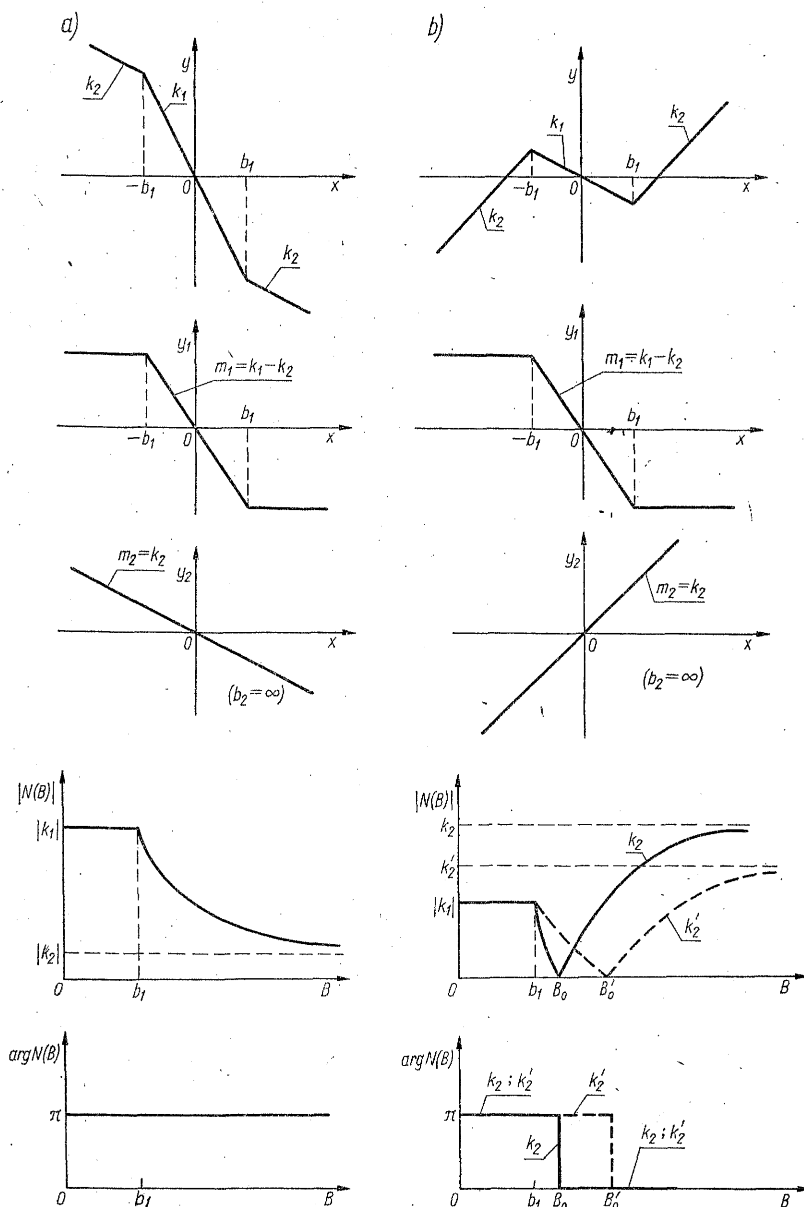
Na rysunku D4/7 przedstawiono dwa przykłady ilustrujące sposób dokonywania podziału charakterystyki układu nieliniowego na charakterystyki podstawowe. W obydwu przypadkach funkcja opisująca (D4/10) jest określona jako

$$N(B) = \begin{cases} k_1 & B \leqslant b_1 \\ k_2 + \frac{2(k_1-k_2)}{\pi}\left[\arcsin\left(\frac{b_1}{B}\right) + \frac{b_1}{B}\sqrt{1-\left(\frac{b_1}{B}\right)^2}\,\right] & B > b_1 \end{cases} \qquad \text{(D4/11)}$$

Na rysunku tym przytoczono również wykresy modułu i argumentu funkcji opisującej.

Charakterystyka $y = g(x)$, pokazana na rys. D4/7a, jest charakterystyką typowych ograniczników, realizowanych przy użyciu diod i wzmacniacza operacyjnego (zachodzi tam: $|k_1| \gg |k_2|$).

Układ nieliniowy o charakterystyce przejściowej pokazanej na rys. D4/7b, cechuje się progową zmianą znaku funkcji opisującej. Znajduje on m.in. zastosowanie w generatorach *RC*, spełniając rolę elementu stabilizującego amplitudę wytwarzanego przebiegu.



D4/7 Ilustracja podziału charakterystyki $y = g(x)$ na charakterystyki podstawowe $y_j = f_j(x)$ oraz wykresy modułu i fazy funkcji opisującej $N(B)$

DODATEK **5**

NIEKTÓRE RODZAJE SYGNAŁÓW ZMODULOWANYCH I ICH WŁAŚCIWOŚCI

Przesyłanie informacji przez kanały transmisyjne wymaga dopasowania cech sygnału, zwłaszcza widmowych, do właściwości kanału. Sygnały pierwotne, reprezentujące informację w postaci naturalnej, są z reguły dolnopasmowe, podczas gdy kanały są zawsze środkowoprzepustowe, umieszczone w zakresach częstotliwości przekraczających wielokrotnie górną częstotliwość widma sygnału informacyjnego.

Ogólną i szeroko stosowaną metodą przetwarzania sygnału dolnopasmowego na środkowopasmowy jest modulacja. Ograniczymy się tutaj do omówienia *modulacji analogowej*, którą można zdefiniować, jako ciągłe i odwracalne odwzorowanie sygnału modulującego (informacyjnego) na sygnał zmodulowany, stanowiący określoną funkcję sygnału modulującego i nośnej. Przy modulacji analogowej, jako nośną, stosuje się powszechnie przebieg harmoniczny. W takt sygnału modulującego zmieniać można wówczas amplitudę, częstotliwość, lub fazę takiego przebiegu, uzyskując różne rodzaje modulacji.

W celu uzyskania jednolitego opisu matematycznego wszystkich przypadków analogowego uzmiennienia wybranych parametrów przebiegu nośnego sygnałem deterministycznym lub losowym, wykorzystuje się pojęcia sygnału analitycznego oraz iloczynowego operatora modulacji. Metoda ta pozwala na całkowitą separację przebiegu nośnego, zmian amplitudy i zmian fazy, dzięki czemu uzyskujemy wygodniejszy sposób badania właściwości sygnałów zmodulowanych. Zastosowanie analitycznej formy sygnałów pozwala w szczególności na opis filtracji sygnałów środkowopasmowych za pomocą ich reprezentacji dolnopasmowych, o czym będzie mowa w dodatku D6, oraz ułatwia ich analizę numeryczną.

Z uwagi na potrzeby podręcznika oraz dopuszczalne rozmiary dodatku ograniczymy się tutaj do omówienia tylko przypadku deterministycznego, należy jednak podkreślić, że wszystkie zalety prezentowanej metody analizy ujawniają się dopiero w opisie sygnałów stochastycznych.

D5.1 SYGNAŁ ANALITYCZNY. ILOCZYNOWY OPERATOR MODULACJI

Niech $u(t)$ oznacza deterministyczny sygnał rzeczywisty o ograniczonej energii lub też ograniczonej mocy średniej, bez składowej stałej. Sygnałem analitycznym przyporządkowanym $u(t)$ nazywamy sygnał zespolony $z(t)$ o postaci

$$z(t) = u(t)+\mathrm{j}\hat{u}(t) \tag{D5/1}$$

gdzie $u(t)$ oraz $\hat{u}(t)$ stanowią parę transformat Hilberta, tj.

$$\hat{u}(t) = \mathscr{H}[u(t)] = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\tau)}{t-\tau}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\pi t} * u(t) \tag{D5/2}$$

$$u(t) = \mathscr{H}^{-1}[\hat{u}(t)] = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{u}(\tau)}{t-\tau}\,\mathrm{d}\tau = \left(-\frac{1}{\pi t}\right) * \hat{u}(t) \tag{D5/3}$$

Załóżmy, że $u(t)$ i $\hat{u}(t)$ posiadają $\mathscr{F}$-transformaty (w sensie zwykłym lub dystrybucyjnym) $U(\omega)$ oraz $\hat{U}(\omega)$. Przekształcając (D5/2) i (D5/3), otrzymujemy

$$\hat{U}(\omega) = [-\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}\,\omega]\,U(\omega) \tag{D5/4}$$

$$U(\omega) = [\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}\,\omega]\,\hat{U}(\omega) \tag{D5/5}$$

gdyż

$$\mathscr{F}\left[\frac{1}{\pi t}\right] = -\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}\,\omega$$

Wprowadźmy teraz następujące oznaczenia:

$$h(t) = \frac{1}{\pi t} \tag{D5/6}$$

$$H(\omega) = \mathscr{F}[h(t)] = -\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}\,\omega = e^{\mathrm{j}\left[\frac{\pi}{2}-\pi\mathbb{1}(\omega)\right]} \tag{D5/7}$$

Widać stąd, że związkom (D5/2) i (D5/4) można nadać prostą interpretację obwodową, a mianowicie $\hat{u}(t)$ jest odpowiedzią układu o charakterystyce częstotliwościowej (D5/7) na pobudzenie sygnałem $u(t)$ — rys. D5/1. Układ o takiej charakterystyce nie jest jednak fizycznie realizowalny ($h(t) \neq 0$ dla $t < 0$) i nosi nazwę *filtru kwadraturowego*, lub *filtru Hilberta.*

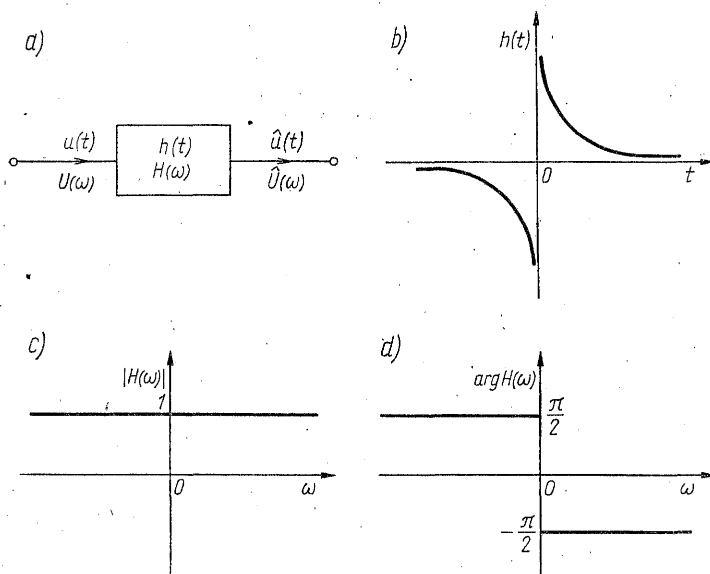
Wyznaczmy teraz $\mathscr{F}$-transformatę sygnału analitycznego $z(t)$. Wykorzystując zależność (D5/4) możemy napisać, że

$$Z(\omega) = U(\omega)+\mathrm{j}\hat{U}(\omega) = U(\omega)+\mathrm{j}(-\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}\,\omega)\,U(\omega) = $$
$$= [1+\mathrm{sgn}\,\omega]\,U(\omega) = 2U(\omega)\mathbb{1}(\omega) \tag{D5/8}$$

$U(\omega)$ i $\hat{U}(\omega)$ są transformatami sygnałów rzeczywistych, a więc zachodzą równości

$$U(\omega) = U^*(-\omega) \quad \text{oraz} \quad \hat{U}(\omega) = \hat{U}^*(-\omega) \tag{D5/9}$$

Otrzymujemy stąd, że $U(\omega)$ można wyrazić za pomocą $Z(\omega)$ w następujący

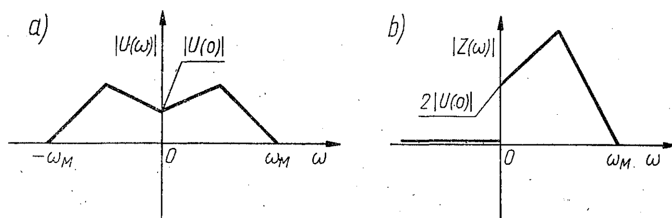


D5/1 Filtr Hilberta (a), jego odpowiedź impulsowa (b), charakterystyka amplitudowa (c) oraz charakterystyka fazowa (d)

sposób:

$$U(\omega) = \frac{1}{2}[Z(\omega)+Z^*(-\omega)] \tag{D5/10}$$

Jak widać z równości (D5/8) istotną cechą sygnału analitycznego jest to, że jego widmo przyjmuje dla pulsacji ujemnych wartości zerowe, jest zatem widmem prawostronnym, co zilustrowano na rys. D5/2, na przykładzie sygnału o ograniczonej energii.



D5/2 Widmo sygnału dolnopasmowego (a) i widmo jego sygnału analitycznego (b)

Można pokazać, że analogiczne zależności są słuszne dla widm gęstości energii oraz widm gęstości mocy sygnału rzeczywistego i przyporządkowanego mu sygnału analitycznego. Niech na przykład $\psi_u(\omega)$ oznacza widmo gęstości mocy sygnału $u(t)$, a $\psi_z(\omega)$ takie samo widmo jego sygnału analitycznego $z(t)$. Wówczas

$$\psi_z(\omega) = 4\psi_u(\omega)\mathbf{1}(\omega) \tag{D5/11}$$

oraz

$$\psi_u(\omega) = \frac{1}{4}[\psi_z(\omega)+\psi_z(-\omega)] \tag{D5/12}$$

Zatem widmo gęstości mocy sygnału analitycznego jest prawostronne, podobnie jak $Z(\omega)$, a gęstość mocy czterokrotnie większa, niż gęstość mocy sygnału rzeczywistego $u(t)$.

Zapiszmy sygnał analityczny w formie wykładniczej

$$z(t) = |z(t)|^{j\phi(t)} \tag{D5/13}$$

gdzie $|z(t)|$ oraz $\phi(t) = \arg z(t)$ są rzeczywistymi funkcjami czasu. Wykorzystując tę postać możemy rozszerzyć na sygnały nieharmoniczne znane pojęcia amplitudy, pulsacji i fazy sygnału harmonicznego.

Amplitudą chwilową lub obwiednią sygnału rzeczywistego $u(t)$ nazywamy moduł przyporządkowanego mu sygnału analitycznego, czyli

$$|z(t)| = \sqrt{u^2(t)+\hat{u}^2(t)} \tag{D5/14}$$

Pulsację chwilową $\omega_i(t)$ definiujemy jako pochodną argumentu sygnału analitycznego, czyli $\phi'(t)$. Po uwzględnieniu związku między (D5/13) oraz (D5/1) możemy napisać

$$\omega_i(t) = \phi'(t) = \mathrm{Im}[\ln z(t)]' = \mathrm{Im}\frac{z'(t)}{z(t)} =$$

$$= \frac{1}{|z(t)|^2}[u(t)\hat{u}'(t)-u'(t)\hat{u}(t)] \tag{D5/15}$$

Definicja *fazy chwilowej* $\varphi(t)$ zawiera pewną niejednoznaczność, ponieważ przyjmuje się, że

$$\varphi(t) = \phi(t)-\omega_o t \tag{D5/16}$$

przy czym ω_o jest stałą, której można nadać dowolną wartość[1].

Po wprowadzeniu powyższej zależności do (D5/13), sygnał analityczny można zapisać w następujących równoważnych formach:

$$z(t) = |z(t)|e^{j\phi(t)} = a(t)e^{j\varphi(t)}e^{j\omega_o t} = v(t)e^{j\omega_o t} =$$

$$= [v_I(t)+jv_Q(t)]e^{j\omega_o t} \tag{D5/17}$$

Jak widać, wielkość $v(t)$ wyraża się wzorem

$$v(t) = v_I(t)+jv_Q(t) = a(t)e^{j\varphi(t)} \tag{D5/18}$$

i nosi nazwę *chwilowej amplitudy zespolonej*, lub *obwiedni zespolonej* sygnału $u(t)$, natomiast wielkości $v_I(t) = a(t)\cos\varphi(t)$ i $v_Q(t) = a(t)\sin\varphi(t)$ są nazywane odpowiednio jej *składową synfazową* oraz *składową kwadraturową*.

Wykorzystując (D5/17), wyrażenia (D5/14) i (D5/15) można zapisać również

[1] Dla ustalonej wartości ω_o faza chwilowa jest oczywiście zdefiniowana jednoznacznie, ale dla różnych wartości ω_o fazy chwilowe określone względem tych wartości są różne.

w następujący sposób:

$$|z(t)| = a(t) = |v(t)| = \sqrt{v_I^2(t)+v_Q^2(t)} \quad \text{(D5/19)}$$

oraz

$$\omega_i(t) = \omega_o+\mathrm{Im}\left[\frac{v'(t)}{v(t)}\right] = \omega_o+\frac{1}{|v(t)|^2}[v_I(t)v_Q'(t)-v_I'(t)v_Q(t)] \quad \text{(D5/20)}$$

Pierwotny sygnał rzeczywisty i jego transformata Hilberta przyjmują odpowiednio postacie:

$$u(t) = \mathrm{Re}\,z(t) = a(t)\cos[\omega_o t+\varphi(t)] \quad \text{(D5/21)}$$

$$\hat{u}(t) = \mathrm{Im}\,z(t) = a(t)\sin[\omega_o t+\varphi(t)] \quad \text{(D5/22)}$$

Przedstawienie sygnału $u(t)$ w postaci (D5/21) nazywamy *reprezentacją* tego *sygnału za pomocą drgania uogólnionego*, wyznaczoną względem pulsacji ω_o.

Po prostych przekształceniach wzory (D5/21) i (D5/22) można sprowadzić do tzw. zapisu Rice'a:

$$u(t) = v_I(t)\cos\omega_o t-v_Q(t)\sin\omega_o t \quad \text{(D5/23)}$$

$$\hat{u}(t) = v_I(t)\sin\omega_o t+v_Q(t)\cos\omega_o t \quad \text{(D5/24)}$$

Sygnały $v_I(t)\cos\omega_o t$ oraz $v_Q(t)\sin\omega_o t$ są nazywane odpowiednio składową synfazową i składową kwadraturową sygnału $u(t)$.

Przyjmijmy teraz w wyrażeniu (D5/17) następujące założenia:

$$a(t) = U_o = \text{const} \quad \text{oraz} \quad \varphi(t) = \varphi_o = \text{const}$$

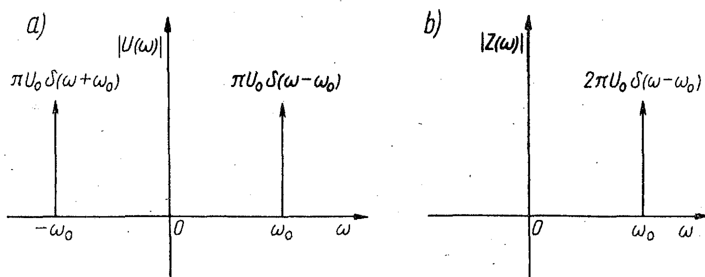
Wówczas

$$z(t) = U_o e^{j[\omega_o t+\varphi_o]} \quad \text{(D5/25)}$$

oraz

$$u(t) = \mathrm{Re}[z(t)] = U_o\cos[\omega_o t+\varphi_o] \quad \text{(D5/26)}$$

otrzymujemy zatem zespoloną i rzeczywistą postać sygnału harmonicznego. Można łatwo pokazać, że część rzeczywista i część urojona wskazu wirującego (D5/25) stanowią parę transformat Hilberta, a więc $z(t)$ jest sygnałem analitycznym, przyporządkowanym przebiegowi harmonicznemu $u(t)$. Widma obu sygnałów przedstawiono na rys. D5/3.



D5/3 Widmo amplitudowe sygnału $U_o\cos(\omega_o t+\varphi_o)$ (a) oraz widmo odpowiadającego mu sygnału analitycznego $U_o\exp[j(\omega_o t+\varphi_o)]$ (b)

Powyższy przykład wyjaśnia, dlaczego amplitudę chwilową $a(t)$, fazę chwilową $\varphi(t)$ oraz pulsację chwilową $\omega_i(t)$ traktować można jako uogólnienie pojęć znanych z rachunku wskazowego.

Reprezentacja sygnału w postaci drgania uogólnionego, aczkolwiek dotyczy dowolnego sygnału, jest szczególnie wygodna w przypadku sygnału wąskopasmowego, to znaczy takiego, którego widmo jest skoncentrowane wokół pewnej pulsacji ω_o. Pulsacja ta jest nazywana *pulsacją nośną*, a $v_I(t)$ i $v_Q(t)$ oraz $a(t)$ i $\varphi(t)$ są wówczas sygnałami wolnozmiennymi w porównaniu z okresem nośnej $2\pi/\omega_o$. Przypadek ten obejmuje sygnały zmodulowane, którym jest poświęcony niniejszy dodatek.

Z uwagi na szczególną przydatność w analizie sygnałów zmodulowanych pojęcia obwiedni zespolonej zbadajmy, jaki związek zachodzi pomiędzy widmem $v(t)$ a widmem sygnału $z(t)$. Z właściwości przekształcenia Fouriera otrzymujemy natychmiast, że jeśli

$$V(\omega) = \mathscr{F}[v(t)]$$

to

$$Z(\omega) = \mathscr{F}[v(t)e^{j\omega_o t}] = V(\omega-\omega_o) \tag{D5/27}$$

a więc prawostronne widmo sygnału analitycznego $z(t)$ jest przesuniętym o ω_o widmem jego obwiedni zespolonej $v(t)$.

W podobny sposób można pokazać, że $\mathscr{F}$-transformaty składowej synfazowej $v_I(t)$ oraz składowej kwadraturowej $v_Q(t)$ obwiedni zespolonej $v(t)$ stanowią odpowiednio część symetryczną sprzężoną i część antysymetryczną sprzężoną jej widma $V(\omega)$, tj.

$$V_I(\omega) = \mathscr{F}[v_I(t)] = \frac{1}{2}[V(\omega)+V^*(-\omega)] \tag{D5/28}$$

oraz

$$V_Q(\omega) = \mathscr{F}[v_Q(t)] = \frac{1}{2}j[V(\omega)-V^*(-\omega)] \tag{D5/29}$$

Analityczne przedstawienie sygnałów (D5/17) w postaci separowalnych czynników, tzn.

$$z(t) = a(t)e^{j\varphi(t)}e^{j\omega_o t}$$

ułatwia zapis operacji modulacyjnych, gdyż daje możliwość wydzielenia przebiegu nośnego (którego pulsacja ω_o jest zresztą znana a priori), modulacji amplitudowej i modulacji fazowej. Dlatego w rozważaniach nad modulacją harmonicznego przebiegu nośnego (przypadek, do omówienia którego się tutaj ograniczymy) wykorzystywać będziemy wprowadzone poprzednio pojęcie sygnału analitycznego.

Sygnałem analitycznym reprezentującym sygnał zmodulowany $u(t)$ nazywamy sygnał $z(t)$ o postaci

$$z(t) = \mathscr{M}[t; s(t)]e^{j\omega_o t} \tag{D5/30}$$

gdzie $\mathscr{M}[t; s(t)]$ jest pewnym zespolonym operatorem iloczynowym, $\exp(j\omega_o t)$

reprezentuje harmoniczną nośną, a $s(t)$ jest sygnałem modulującym (informacyjnym). Wówczas

$$u(t) = \text{Re}\, z(t) = \text{Re}\{\mathscr{M}[t; s(t)]e^{j\omega_o t}\} \tag{D5/31}$$

W ogólnym przypadku $\mathscr{M}[t; s(t)]$ może być operatorem nieliniowym, zależnym zarówno od czasu, jak i sygnału modulującego $s(t)$.

W dalszym ciągu interesować nas będą tylko dwa przypadki. Pierwszy z nich występuje, gdy $\mathscr{M}[\cdot]$ ma postać $\mathscr{M}[s(t)]$ i spełnia warunek liniowości, tzn.

$$\mathscr{M}[\alpha s_1(t)+\beta s_2(t)] = \alpha\mathscr{M}[s_1(t)]+\beta\mathscr{M}[s_2(t)] \tag{D5/32}$$

gdzie α i β są liczbami rzeczywistymi. Operacja modulacji jest wtedy liniowa. Przypadek ten obejmuje systemy modulacji amplitudowej.

W drugim przypadku operator $\mathscr{M}[\cdot]$ ma postać

$$\mathscr{M}[s(t)] = e^{j\mathscr{L}[s(t)]} \tag{D5/33}$$

gdzie $\mathscr{L}[\cdot]$ jest operatorem liniowym. Jak łatwo zauważyć, operator $\mathscr{M}[\cdot]$ jest nieliniowy i spełnia zależność

$$\mathscr{M}[\alpha s_1(t)+\beta s_2(t)] = \mathscr{M}[\alpha s_1(t)]\mathscr{M}[\beta s_2(t)] \tag{D5/34}$$

gdzie α i β są liczbami rzeczywistymi. Przypadek ten obejmuje systemy modulacji kątowej.

D5.2 SYGNAŁY ZMODULOWANE AMPLITUDOWO

Dla sygnałów zmodulowanych amplitudowo iloczynowy operator modulacji można opisać wspólnym wyrażeniem

$$\mathscr{M}[s(t)] = a+bs(t)+jc\hat{s}(t) \tag{D5/35}$$

gdzie $a \in \{0, 1\}$, a b i c są liczbami rzeczywistymi.

Przyjmujemy, że procesowi modulacji jest poddawany przebieg harmoniczny $U_o\exp(j\omega_o t)$[1)]. O sygnale modulującym $s(t)$ założymy, że jest to sygnał dolnopasmowy, o widmie ograniczonym do ω_M, przy czym $\omega_M < \omega_o$. Przyjmiemy ponadto pewien unormowany sposób zapisu tego sygnału, a mianowicie

$$s(t) = mf(t) \tag{D5/36}$$

gdzie

$$0 \leqslant m \leqslant 1; \quad |f(t)|_{\max} = 1; \quad \overline{f(t)} = 0 \tag{D5/37}$$

Kreska nad $f(t)$ oznacza wartość średnią.

Przy założonej postaci nośnej oraz przyjętej formie (D5/35) operatora $\mathscr{M}[\cdot]$, wyrażenie (D5/30) możemy zapisać następująco:

$$z(t) = [a+bs(t)+jc\hat{s}(t)]U_o e^{j\omega_o t} \tag{D5/38}$$

[1)] Ponieważ wartość fazy początkowej przebiegu harmonicznego nie ma wpływu na ogólność uzyskiwanych rezultatów przyjmujemy, że $\varphi_o = 0$.

Nadając teraz szczegółowe wartości współczynnikom *a*, *b* i *c* otrzymamy podstawowe rodzaje sygnałów zmodulowanych amplitudowo.

Sygnał dwuwstęgowy z nośną — AM (ang.: *Amplitude Modulation*)

Załóżmy $a = b = 1$ oraz $c = 0$. Podstawiając (D5/36) do (D5/38) dostaniemy

$$z_{AM}(t) = U_o[1+mf(t)]e^{j\omega_o t} = a(t)e^{j\omega_o t} \qquad \text{(D5/39)}$$

Odpowiadający $z_{AM}(t)$ sygnał rzeczywisty ma postać

$$u_{AM}(t) = \mathrm{Re}\, z_{AM}(t) = U_o[1+mf(t)]\cos\omega_o t = a(t)\cos\omega_o t \qquad \text{(D5/40)}$$

gdzie

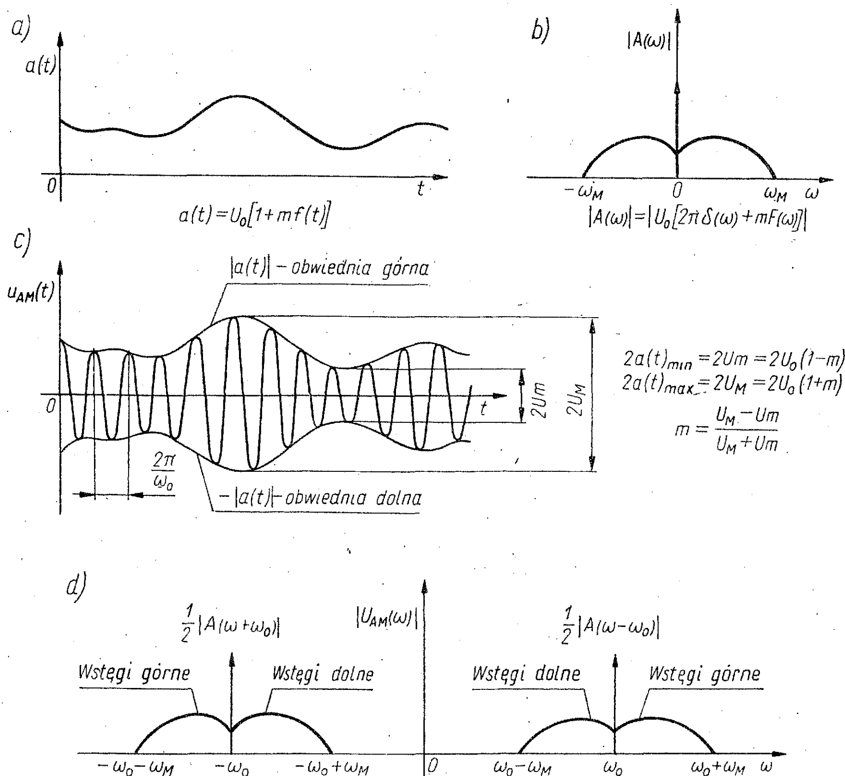
$$a(t) = U_o[1+mf(t)] \qquad \text{(D5/41)}$$

i na podstawie założeń (D8/35) spełnia warunek

$$a(t) \geqslant 0 \qquad \text{(D5/42)}$$

Rozkład widmowy $z_{AM}(t)$ otrzymamy, wyznaczając $\mathscr{F}$-transformatę wyrażenia (D5/39)

$$Z_{AM}(\omega) = \mathscr{F}[z_{AM}(t)] = A(\omega-\omega_o) \qquad \text{(D5/43)}$$



D5/4 Sygnał modulujący (a) i jego widmo (b) oraz sygnał zmodulowany *AM* (c) i jego widmo (d)

gdzie

$$A(\omega) = \mathscr{F}[a(t)] = U_o[2\pi\delta(\omega)+mF(\omega)] \tag{D5/44}$$

oraz

$$F(\omega) = \mathscr{F}[f(t)] \tag{D5/45}$$

Na podstawie (D5/10) otrzymujemy natychmiast widmo $u_{AM}(t)$

$$U_{AM}(\omega) = \frac{1}{2}[A(\omega+\omega_o)+A(\omega-\omega_o)] \tag{D5/46}$$

Przykład przebiegu czasowego sygnału $u_{AM}(t)$ oraz jego rozkład widmowy przedstawiono na rys. D5/4. Podano również interpretację współczynnika m, nazywanego *współczynnikiem głębokości modulacji*. Warto też zwrócić uwagę na fakt, że spełnienie warunku $m \leqslant 1$ gwarantuje, iż obwiednia górna i obwiednia dolna sygnału AM nie zmieniają znaku (tzn. znajdują się zawsze odpowiednio nad i pod osią poziomą).

Sygnał dwuwstęgowy bez nośnej — AM-SC (ang.: *Amplitude Modulation with Suppressed Carrier*)

Załóżmy $a = c = 0$ oraz $b = 1$. Wówczas

$$z_{AM\text{-}SC}(t) = mU_of(t)e^{j\omega_o t} = a(t)e^{j\omega_o t} \tag{D5/47}$$

oraz

$$u_{AM\text{-}SC}(t) = \mathrm{Re}\, z_{AM\text{-}SC}(t) = a(t)\cos\omega_o t \tag{D5/48}$$

gdzie

$$a(t) = mU_of(t) \tag{D5/49}$$

i jak widać z (D5/35) spełnia warunek

$$\overline{a(t)} = 0 \tag{D5/50}$$

Widma $Z_{AM\text{-}SC}(\omega)$ i $U_{AM\text{-}SC}(\omega)$ mają odpowiednio postać

$$Z_{AM\text{-}SC}(\omega) = A(\omega-\omega_o) = mU_oF(\omega-\omega_o) \tag{D5/51}$$

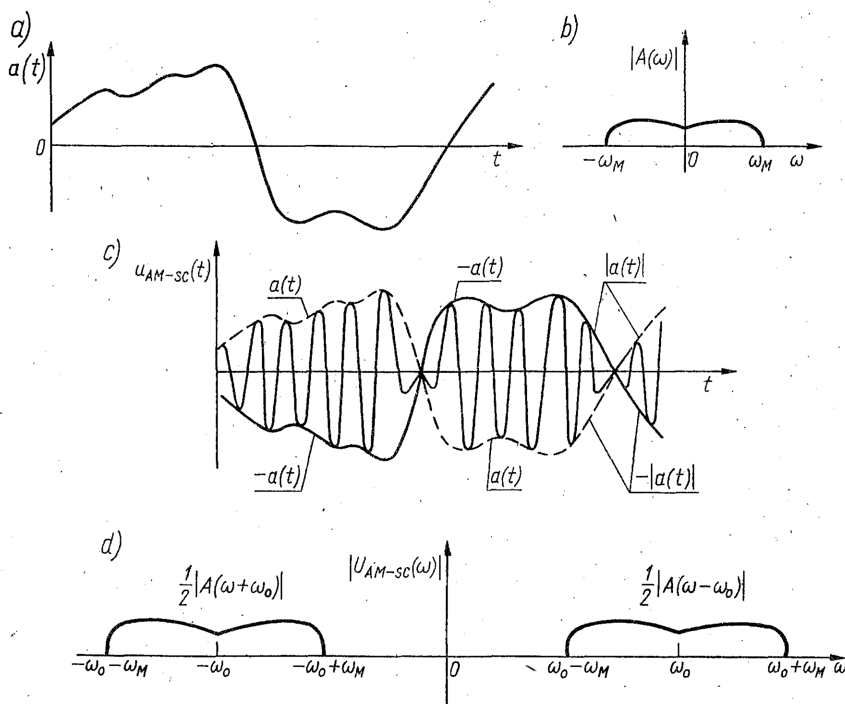
$$U_{AM\text{-}SC}(\omega) = \frac{1}{2}[A(\omega+\omega_o)+A(\omega-\omega_o)] =$$

$$= \frac{mU_o}{2}[F(\omega+\omega_o)+F(\omega-\omega_o)] \tag{D5/52}$$

i jak łatwo zauważyć nie zawierają składnika dystrybucyjnego $\delta(\omega)$ reprezentującego nośną. Przebieg czasowy $u_{AM\text{-}SC}(t)$ oraz jego widmo pokazano na rys. D5/5. Cechą charakterystyczną sygnału *AM-SC* w porównaniu z sygnałem *AM* jest to, że nie zawiera on nośnej, a obwiednia górna i dolna zmieniają znak. Należy również zauważyć, że w punkcie, w którym obwiednie zmieniają znak następuje skokowa zmiana fazy przebiegu nośnego.

Sygnał jednowstęgowy bez nośnej — SSB-SC (ang.: *Single Sideband with Suppressed Carrier*)

Przyjmijmy $a = 0$ oraz $b = c = 1$. Otrzymamy wówczas



D5/5 Sygnał modulujący (a) i jego widmo (b) oraz sygnał zmodulowany *AM-SC* (c) i jego widmo (d)

$$z_{SSB\text{-}SC}(t) = U_o[mf(t)+\mathrm{j}m\hat{f}(t)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_o t} = [a(t)+\mathrm{j}\hat{a}(t)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_o t} \tag{D5/53}$$

oraz

$$u_{SSB\text{-}SC}(t) = a(t)\cos\omega_o t - \hat{a}(t)\sin\omega_o t \tag{D5/54}$$

Jak widać z ostatniego wzoru sygnał *SSB-SC* jest sumą dwóch sygnałów *AM-SC*, których nośne są względem siebie ortogonalne a obwiednie stanowią parę transformat Hilberta.

Wyznaczmy widmo sygnału *SSB-SC*. Transformując (D5/53) i wykorzystując (D5/4) otrzymamy

$$\begin{aligned} Z_{SSB\text{-}SC}(\omega) &= A(\omega-\omega_o)+\mathrm{j}\hat{A}(\omega-\omega_o) = \\ &= [1+\mathrm{sgn}(\omega-\omega_o)]A(\omega-\omega_o) = \\ &= \begin{cases} 0 & ;\ \omega < \omega_o \\ 2A(\omega-\omega_o); & \omega > \omega_o \end{cases} \end{aligned} \tag{D5/55}$$

Na podstawie zależności (D5/10) możemy również napisać, po prostych przekształceniach, że

$$\begin{aligned} U_{SSB\text{-}SC}(\omega) &= \frac{1}{2}\{[1-\mathrm{sgn}(\omega+\omega_o)]A(\omega+\omega_o)+ \\ &+[1+\mathrm{sgn}(\omega-\omega_o)]A(\omega-\omega_o)\} = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} A(\omega+\omega_o); & \omega < -\omega_o \\ 0 & ; \ -\omega_o < \omega < \omega_o \\ A(\omega-\omega_o); & \omega > \omega_o \end{cases} \quad \text{(D5/56)}$$

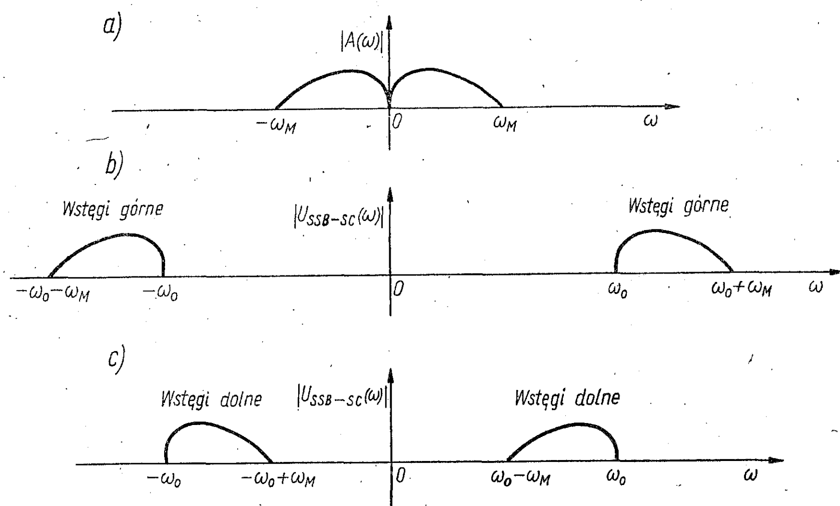
Jak widać, widmo rozważanego sygnału zawiera tylko górne wstęgi boczne. Widmo $a(t)$ oraz widmo $u_{SSB\text{-}SC}(t)$ zostały pokazane na rys. D5/6a i b.

Jeśli we wzorze (D5/38) założymy $a = 0$, ale $b = -c = 1$, to

$$z_{SSB\text{-}SC}(t) = [a(t)-\mathrm{j}\hat{a}(t)]e^{\mathrm{j}\omega_o t} \quad \text{(D5/57)}$$

oraz

$$u_{SSB\text{-}SC}(t) = a(t)\cos\omega_o t+\hat{a}(t)\sin\omega_o t \quad \text{(D5/58)}$$



D5/6 Widmo sygnału modulującego (a) oraz widmo sygnału *SSB-SC* zawierającego górne wstęgi boczne (b) i dolne wstęgi boczne (c)

Łatwo sprawdzić, że widmo $u_{SSB\text{-}SC}(t)$ zawierać będzie teraz tylko dolne wstęgi boczne. Istotnie, z zależności (D5/57) i (D5/4) otrzymujemy, że

$$Z_{SSB\text{-}SC}(\omega) = [1-\mathrm{sgn}(\omega-\omega_o)]A(\omega-\omega_o) = $$
$$= \begin{cases} 2A(\omega-\omega_o); & \omega < \omega_o \\ 0 & ; \ \omega > \omega_o \end{cases} \quad \text{(D5/59)}$$

Wykorzystując zależność (D5/10) można również pokazać, iż

$$U_{SSB\text{-}SC}(\omega) = \frac{1}{2}\{[1+\mathrm{sgn}(\omega+\omega_o)]A(\omega+\omega_o)+$$
$$+[1-\mathrm{sgn}(\omega-\omega_o)]A(\omega-\omega_o)\} =$$
$$= \begin{cases} A(\omega+\omega_o); & \omega > -\omega_o \\ 0 & ; \ \omega < -\omega_o \text{ oraz } \omega > \omega_o \\ A(\omega-\omega_o); & \omega < \omega_o \end{cases} \quad \text{(D5/60)}$$

Omawiany przypadek zilustrowano na rys. D5/6c. Zazwyczaj oba przypadki zapisuje się za pomocą jednego wzoru

$$z_{SSB\text{-}SC}(t) = [a(t) \pm j\hat{a}(t)]e^{j\omega_o t} \tag{D5/61}$$

lub

$$u_{SSB\text{-}SC}(t) = a(t)\cos\omega_o t \mp \hat{a}(t)\sin\omega_o t \tag{D5/62}$$

przy czym górny znak w obu wyrażeniach dotyczy przypadku, gdy istnieją tylko górne wstęgi boczne, a dolny — gdy istnieją tylko dolne wstęgi boczne.

Wzór (D5/62) można także przekształcić do postaci

$$u_{SSB\text{-}SC}(t) = \sqrt{a^2(t)+\hat{a}^2(t)}\ \cos\left[\omega_o t \pm \operatorname{arctg}\frac{\hat{a}(t)}{a(t)}\right] \tag{D5/63}$$

z której widać, że sygnał *SSB-SC* jest sygnałem zmodulowanym zarówno amplitudowo, jak i kątowo.

Sygnał jednowstęgowy z nośną — SSB

Sygnał *SSB* otrzymujemy zakładając $a = 1$ oraz $b = c = 1$ (wstęga górna) lub $b = -c = 1$ (wstęga dolna).
Wówczas

$$\begin{aligned} z_{SSB}(t) &= U_o[1+mf(t) \pm jm\hat{f}(t)]e^{j\omega_o t} = \\ &= [U_o+a(t) \pm j\hat{a}(t)]e^{j\omega_o t} \end{aligned} \tag{D5/64}$$

oraz

$$u_{SSB}(t) = U_o\cos\omega_o t + a(t)\cos\omega_o t \mp \hat{a}(t)\sin\omega_o t \tag{D5/65}$$

lub

$$u_{SSB}(t) = \sqrt{[U_o+a(t)]^2+\hat{a}^2(t)}\ \cos\left[\omega_o t \pm \operatorname{arctg}\frac{\hat{a}(t)}{U_o+a(t)}\right] \tag{D5/66}$$

Jak można łatwo sprawdzić, widmo sygnału *SSB* różni się od widma sygnału *SSB-SC* tylko tym, że występuje w nim składnik dystrybucyjny $\delta(\omega)$ reprezentujący nośną.

Zależności energetyczne

Obliczymy teraz moc średnią przenoszoną przez sygnał zmodulowany amplitudowo i zbadamy związek między tą mocą a mocą średnią sygnału modulującego. Założymy, tak jak poprzednio, że sygnał modulujący jest sygnałem dolnopasmowym o widmie ograniczonym do ω_M (przy czym $\omega_M < \omega_o$) i skończonej mocy średniej.

Jako pierwszy rozważymy sygnał *AM*. Oznaczmy gęstość widmową mocy $a(t)$ przez $\psi_a(\omega)$. Można pokazać, np. [D5.5, D5.7], że $\psi_u(\omega)$ dla sygnału $u_{AM}(t)$ określonego wzorem (D5/40) będzie się składać — przy spełnieniu założenia $\omega_M < \omega_o$ — z dwu widm rozszczepionych, nie zachodzących na siebie

$$\psi_u(\omega) = \frac{1}{4}[\psi_a(\omega+\omega_o)+\psi_a(\omega-\omega_o)] \tag{D5/67}$$

Z zależności (D5/41) widać jednak, że

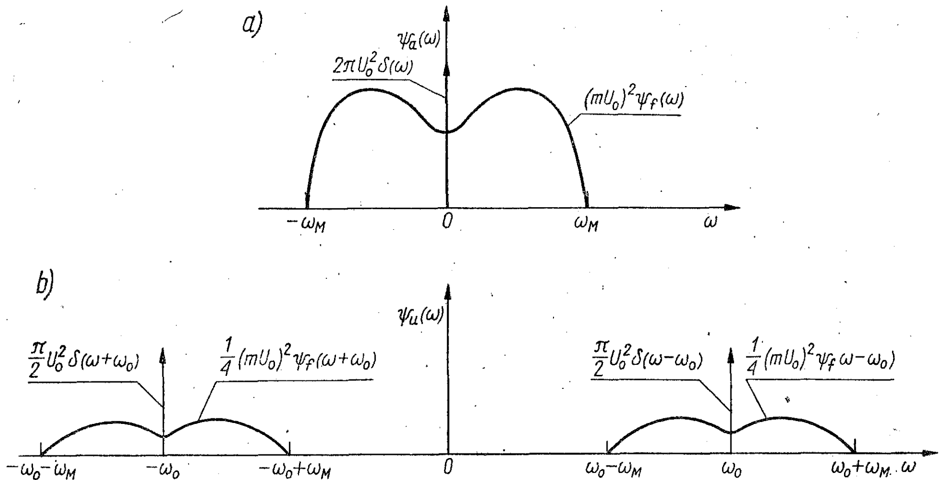
$$\psi_a(\omega) = 2\pi U_o^2\,\delta(\omega) + (mU_o)^2 \psi_f(\omega) \tag{D5/68}$$

gdzie $\psi_f(\omega)$ oznacza gęstość widmową mocy unormowanego sygnału modulującego $f(t)$[1].

Wobec powyższego $\psi_u(\omega)$ można zapisać następująco:

$$\psi_u(\omega) = \frac{1}{4}\,[2\pi U_o^2\,\delta(\omega+\omega_o) + (mU_o)^2 \psi_f(\omega+\omega_o)] +$$

$$+\frac{1}{4}\,[2\pi U_o^2\,\delta(\omega-\omega_o) + (mU_o)^2 \psi_f(\omega-\omega_o)] \tag{D5/69}$$



D5/7 Widmo gęstości mocy sygnału modulującego (a) oraz widmo gęstości mocy sygnału zmodulowanego *AM* (b)

Przykładowe rozkłady widmowe $\psi_a(\omega)$ oraz $\psi_u(\omega)$ pokazano na rys. D5/7. Zatem średnia moc sygnału *AM*

$$P_u = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\omega_o-\omega_M}^{\omega_o+\omega_M} \psi_u(\omega)\,d\omega \tag{D5/70}$$

Z rysunku D5/7 widać, że całkę tę można przedstawić w postaci sumy dwu następujących całek:

$$P_u = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\omega_o-\omega_M}^{-\omega_o+\omega_M} \frac{1}{4}\,[2\pi U_o^2\,\delta(\omega+\omega_o) + (mU_o)^2 \psi_f(\omega+\omega_o)]\,d\omega +$$

$$+\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega_o-\omega_M}^{\omega_o+\omega_M} \frac{1}{4}\,[2\pi U_o^2\,\delta(\omega-\omega_o) + (mU_o)^2 \psi_f(\omega-\omega_o)]\,d\omega \tag{D5/71}$$

---

[1] Zauważmy, że występujący we wzorze (D5/41) sygnał modulujący ma postać nieunormowaną $mU_o f(t)$, a więc odpowiada mu gęstość widmowa mocy równa $(mU_o)^2\psi_f(\omega)$.

Po dokonaniu w obu całkach zmiany zmiennych ($\omega+\omega_o = \omega'$ oraz $\omega-\omega_o = \omega''$) wyrażenie (D5/71) można sprowadzić do postaci

$$P_u = \frac{U_o^2}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_M}^{\omega_M}\frac{1}{2}(mU_o)^2\psi_f(\omega)\,d\omega = P_n+P_b \tag{D5/72}$$

gdzie $P_n = U_o^2/2$ stanowi moc średnią harmonicznej nośnej, a całka reprezentuje moc obu wstęg bocznych. Zauważmy jednak, że

$$P_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_M}^{\omega_M}(mU_o)^2\psi_f(\omega)\,d\omega \tag{D5/73}$$

jest mocą średnią sygnału modulującego $mU_o f(t)$, a więc całkowita moc sygnału *AM* (wydzielana na oporze 1 Ω) może być zapisana również tak

$$P_u = P_n+\frac{1}{2}P_m \tag{D5/74}$$

Współczynnik sprawności energetycznej sygnału *AM* definiuje się jako

$$\eta_{AM} = \frac{P_b}{P_u} = \frac{P_b}{P_n+P_b} = \frac{P_m/2}{P_n+P_m/2} \tag{D5/75}$$

gdyż moc użyteczna, niezbędna do przesłania informacji zawartej w sygnale modulującym, jest związana tylko z mocą wstęg bocznych. Z zależności (D5/75) widać, że współczynnik η_{AM} jest zawsze mniejszy od 100%.

Dla ilustracji rozważmy przypadek szczególny, gdy $f(t) = \cos\omega_m t$. Wówczas

$$\psi_f(\omega) = \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_m)+\delta(\omega-\omega_m)]$$

Na podstawie zależności (D5/72) i (D5/73) otrzymujemy, że $P_m = (mU_o)^2/2$ (D5/75) przyjmuje postać

$$\eta_{AM} = \frac{(mU_o)^2/4}{U_o^2/2+(mU_o)^2/2} = \frac{m^2}{2+m^2} \tag{D5/76}$$

Widzimy, że przy największej dopuszczalnej dla sygnału *AM* głębości modulacji $m = 1$ współczynnik η_{AM} wynosi w omawianym przypadku 33%.

Sygnał *AM-SC* nie zawiera nośnej, a więc $P_n = 0$ i z zależności (D5/72) oraz (D5/74) otrzymujemy

$$P_u = P_b = P_m/2 \tag{D5/77}$$

Moc średnia sygnału *AM-SC* jest zatem równa połowie mocy średniej sygnału modulującego, a współczynnik sprawności energetycznej w rozumieniu definicji (D5/75) wynosi 100%.

Postępując analogicznie otrzymamy, że sprawność systemu jednowstęgowego bez nośnej (*SSB-SC*) jest równa także 100%, natomiast sprawność systemu jednowstęgowego z nośną (*SSB*) będzie zależeć od zastosowanego poziomu fali nośnej (może to być na przykład tzw. sygnał pilotujący czyli nośna na małym

poziomie mocy, służąca tylko do synchronizacji generatora lokalnego w odbiorniku).

Porównanie właściwości widmowych

Z porównania widm czterech podstawowych rodzajów sygnałów z modulacją amplitudową widać, że do sygnału z modulacją dwuwstęgową (*AM* i *AM-SC*) przenosi się widmo sygnału rzeczywistego $a(t)$, natomiast do sygnału jednowstęgowego (*SSB* i *SSB-SC*) widmo zespolonego sygnału analitycznego $[a(t) \pm j\hat{a}(t)]$. W związku z tym pasmo zajęte przez sygnał dwuwstęgowy wynosi $2\omega_M$, podczas gdy sygnał jednowstęgowy zajmuje pasmo dwukrotnie mniejsze, tj. ω_M.

D5.3 SYGNAŁY ZMODULOWANE KĄTOWO

Obecnie rozpatrzymy takie systemy modulacji, w których amplituda harmonicznej fali nośnej pozostaje stała w czasie, a zmianom w takt sygnału modulującego ulega tylko jej kąt. Modulacje kątowe nie spełniają warunku (D5/32), należą więc do klasy modulacji nieliniowych.

Istnieją dwa klasyczne rodzaje modulacji kąta, które można zdefiniować na podstawie zależności (D5/33).

Modulację fazy, PM (ang. *Phase Modulation*), otrzymujemy wówczas, gdy

$$\mathscr{L}[s(t)] = \varphi(t) = k_p s(t) \tag{D5/78}$$

gdzie k_p jest liczbą rzeczywistą. Jak widać, faza chwilowa $\varphi(t)$ sygnału *PM* zmienia się proporcjonalnie do sygnału modulującego.

Jeśli przyjmiemy natomiast, że

$$\mathscr{L}[s(t)] = \varphi(t) = k_f \int_0^t s(\tau) d\tau \tag{D5/79}$$

gdzie k_f jest rzeczywistym współczynnikiem proporcjonalności, to dostajemy *modulację częstotliwości, FM* (ang.: *Frequency Modulation*). Faza chwilowa sygnału *FM* zmienia się zatem proporcjonalnie do całki z sygnału modulującego.

Dla ułatwienia rozważań i bez zmniejszania ich ogólności przyjęliśmy w (D5/78) oraz (D5/79) zerową wartość fazy początkowej $\varphi_o = 0$.

Analityczną postać sygnałów *PM* i *FM* możemy więc zapisać następująco:

$$z_{PM}(t) = U_o e^{j[\omega_o t + k_p s(t)]} \tag{D5/80}$$

$$z_{FM}(t) = U_o e^{j[\omega_o t + k_f \int_0^t s(\tau) d\tau]} \tag{D5/81}$$

gdzie U_o oznacza amplitudę sygnału, która nie ulega zmianie i jest równa amplitudzie nośnej niemodulowanej.

Podstawowymi parametrami charakteryzującymi sygnał zmodulowany kątowo są *dewiacja fazy* i *dewiacja pulsacji* (lub *dewiacja częstotliwości*). *Dewiację*

fazy definiuje się, jako maksymalne bezwzględne odchylenie kąta sygnału od liniowej zmiany tego kąta

$$\Delta\phi = |\phi(t)-\omega_o t|_{max} \tag{D5/82}$$

Dewiacja pulsacji jest zdefiniowana jako maksymalne bezwzględne odchylenie pulsacji chwilowej sygnału od pulsacji nośnej

$$\Delta\omega = |\omega_i(t)-\omega_o|_{max} \tag{D5/83}$$

Niekiedy użyteczna jest także tzw. *dewiacja względna* definiowana jako stosunek maksymalnej odchyłki pulsacji chwilowej do pulsacji nośnej

$$D = \frac{\Delta\omega}{\omega_o} \tag{D5/84}$$

Oczywiste jest, że na to, aby pulsacja chwilowa była zawsze dodatnia musi zachodzić nierówność $D < 1$.

Wyrażenia na pulsacje chwilowe sygnałów *PM* i *FM* otrzymujemy różniczkując odpowiednio równania (D5/78) i (D5/79)

$$\omega_{i\,PM}(t) = \omega_o + k_p \frac{ds(t)}{dt} \tag{D5/85}$$

$$\omega_{i\,FM}(t) = \omega_o + k_f s(t) \tag{D5/86}$$

Wykorzystując powyższe związki oraz (D5/78) i (D5/79) otrzymujemy, że

$$\Delta\phi_{PM} = k_p|s(t)|_{max}; \quad \Delta\omega_{PM} = k_p\left|\frac{ds(t)}{dt}\right|_{max} \tag{D5/87}$$

$$\Delta\phi_{FM} = k_f\left|\int_0^t s(\tau)d\tau\right|_{max}; \quad \Delta\omega_{FM} = k_f|s(t)|_{max} \tag{D5/88}$$

Dla wygody wprowadzimy, tak jak poprzednio, unormowany sygnał modulujący $f(t)$ o zerowej wartości średniej, tj.

$$f(t) = \frac{s(t)}{|s(t)|_{max}} \tag{D5/89}$$

gdzie

$$|f(t)|_{max} = 1 \quad \text{oraz} \quad \overline{f(t)} = 0$$

Będziemy zakładać ponadto, że $f(t)$ jest sygnałem dolnopasmowym, o widmie ograniczonym do ω_M.

Z zależności (D5/87) i (D5/88) widać, iż sygnały analityczne $z_{PM}(t)$ i $z_{FM}(t)$ oraz odpowiadające im sygnały rzeczywiste można teraz zapisać następująco:

$$z_{PM}(t) = U_o e^{j[\omega_o t+\Delta\phi f(t)]} \tag{D5/90}$$

$$u_{PM}(t) = \text{Re}\, z_{PM}(t) = U_o \cos[\omega_o t+\Delta\phi f(t)] \tag{D5/91}$$

oraz

$$z_{FM}(t) = U_o e^{j[\omega_o t+\Delta\omega \int_0^t f(\tau)d\tau]} \tag{D5/92}$$

$$u_{FM}(t) = \mathrm{Re}\, z_{FM}(t) = U_o \cos\left[\omega_o t + \Delta\omega \int_0^t f(\tau) f\tau\right] \qquad \text{(D5/93)}$$

We wzorach (D5/90)...(D5/93) pominęliśmy dla uproszczenia zapisu indeksy przy $\Delta\phi$ i $\Delta\omega$. Będziemy tak postępować także w dalszych rozważaniach, jeśli pominięcie indeksów nie naruszy jednoznaczności zapisu.

Zauważmy, że pulsacja chwilowa sygnału *FM* zmienia się wokół ω_o proporcjonalnie do sygnału modulującego, a pulsacja chwilowa sygnału *PM* proporcjonalnie do pochodnej sygnału modulującego. Z zależności (D5/78) i (D5/79) oraz (D5/85) i (D5/86) widać, że sygnał *PM* zmodulowany sygnałem $s(t)$ jest równoważny sygnałowi *FM* zmodulowanemu przez $\mathrm{d}s(t)/\mathrm{d}t$ i podobnie, sygnał *FM* zmodulowany sygnałem $s(t)$ jest równoważny sygnałowi *PM* zmodulowanemu przez $\int s(t)\,\mathrm{d}t$. Dlatego bardziej szczegółowo omówimy tylko jeden z sygnałów, *FM*, a właściwości drugiego z nich podamy jedynie skrótowo.

Sygnał zmodulowany częstotliwościowo — FM

Omówimy najpierw przypadek szczególny jakim jest sygnał wąskopasmowy *FM*.

Załóżmy, że jest spełniony warunek

$$\left|\Delta\omega \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right|_{\max} \ll 1 \qquad \text{(D5/94)}$$

Można wówczas przyjąć, iż

$$e^{\mathrm{j}\Delta\omega \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau} \approx 1 + \mathrm{j}\Delta\omega \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{(D5/95)}$$

i zależności (D5/92) oraz (D5/93) uproszczą się do postaci

$$z_{FM}(t) \approx U_o[1 + \mathrm{j}a(t)]\,e^{\mathrm{j}\omega_o t} \qquad \text{(D5/96)}$$

$$u_{FM}(t) = \mathrm{Re}\, z_{FM}(t) \approx U_o[\cos\omega_o t - a(t)\sin\omega_o t] \qquad \text{(D5/97)}$$

gdzie

$$a(t) = \Delta\omega \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{(D5/98)}$$

Po obliczeniu $\mathscr{F}$-transformat $z_{FM}(t)$ oraz $u_{FM}(t)$ otrzymamy:

$$Z_{FM}(\omega) = 2\pi U_o \delta(\omega - \omega_o) + \mathrm{j}U_o A(\omega - \omega_o) \qquad \text{(D5/99)}$$

$$U_{FM}(\omega) = \pi U_o[\delta(\omega + \omega_o) + \delta(\omega - \omega_o)] + \\ + \mathrm{j}\frac{U_o}{2}[A(\omega - \omega_o) - A(\omega + \omega_o)] \qquad \text{(D5/100)}$$

Z porównania tych rozkładów widmowych z widmami (D5/43) i (D5/46) sygnału *AM* widać, że przy spełnieniu warunku (D5/94) sygnał *FM* różni się od sygnału

AM jedynie fazą składowych wstęg bocznych. W szczególności, pasmo częstotliwości zajęte przez waskopasmowy sygnał *FM* wynosi w przybliżeniu $2\omega_M$, a więc jest takie samo, jak dla sygnału *AM*.

Jeśli warunek (D5/94) nie jest spełniony, to wyznaczenie rozkładu widmowego sygnału zmodulowanego częstotliwościowo jest na ogół zadaniem trudnym. Tylko w szczególnych przypadkach widmo to można wyznaczyć lub oszacować w sposób analityczny. Dostateczny wgląd we właściwości sygnału szerokopasmowego daje jednak analiza sygnału zmodulowanego przebiegiem sinusoidalnym i tym przypadkiem zajmiemy się bardziej szczegółowo.

Przyjmijmy, że $s(t) = U_m \cos\omega_m t$, a zatem $|s(t)|_{\max} = U_m$ oraz $f(t) = \cos\omega_m t$. Wówczas na podstawie zależności (D5/88) otrzymujemy

$$\Delta\omega = k_f U_m \qquad \text{(D5/101)}$$

oraz

$$\Delta\phi = k_f \frac{U_m}{\omega_m} = \frac{\Delta\omega}{\omega_m} = \beta \qquad \text{(D5/102)}$$

Stosunek $\Delta\omega/\omega_m$ jest nazywany *indeksem modulacji* i oznaczany najczęściej przez β.

Podstawiając powyższe wielkości do zależności (D5/86) i (D5/92) otrzymamy wyrażenia na pulsację chwilową oraz analityczną postać sygnału *FM*

$$\omega_i(t) = \omega_o + k_f U_m \cos\omega_m t = \omega_o + \Delta\omega \cos\omega_m t \qquad \text{(D5/103)}$$

$$z_{FM}(t) = U_o e^{j\omega_o t} e^{j\beta \sin\omega_m t} \qquad \text{(D5/104)}$$

Drugi czynnik we wzorze (D5/104) jest funkcją okresową o okresie $T_m = 2\pi/\omega_m$, można go więc rozwinąć w szereg Fouriera

$$e^{j\beta \sin\omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_m t} \qquad \text{(D5/105)}$$

gdzie

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(\beta \sin\omega_m t - n\omega_m t)} dt \qquad \text{(D5/106)}$$

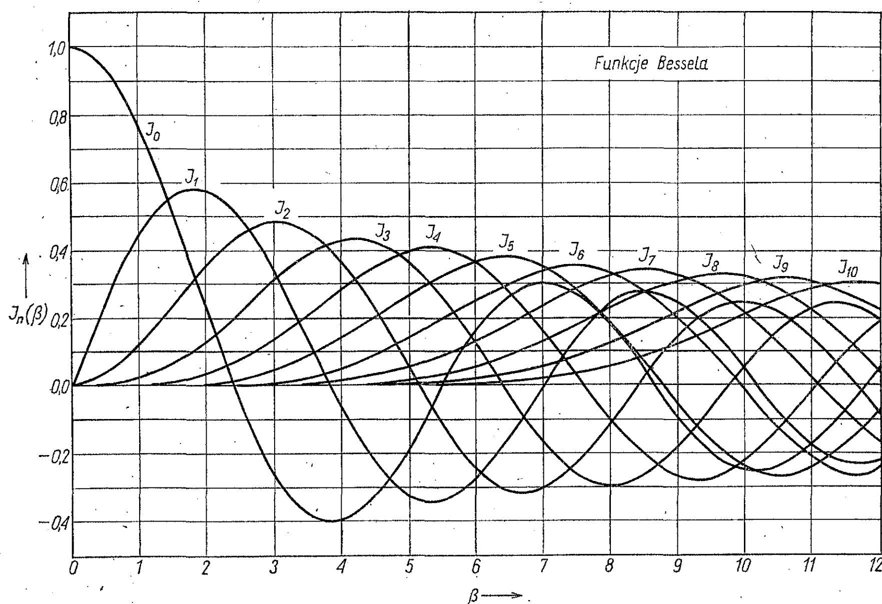
Po wprowadzeniu zmiennej $x = \omega_m t$ powyższą całkę można sprowadzić do postaci, która w literaturze nosi nazwę funkcji Bessela pierwszego rodzaju rzędu n

$$J_n(\beta) \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \sin x - nx)} dx \qquad \text{(D5/107)}$$

Funkcje te są stabelaryzowane, a ich wykresy podano na rys. D5/8.

Stosując teraz oznaczenie $F_n = J_n(\beta)$ i podstawiając zależność (D5/105) do (D5/104), otrzymamy

$$z_{FM}(t) = U_o \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j(\omega_o + n\omega_m)t} \qquad \text{(D5/108)}$$



D5/8 Funkcje Bessela pierwszego rodzaju

Podobnie

$$u_{FM}(t) = \mathrm{Re}\, z_{FM}(t) = U_o \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos(\omega_o + n\omega_m)t \tag{D5/109}$$

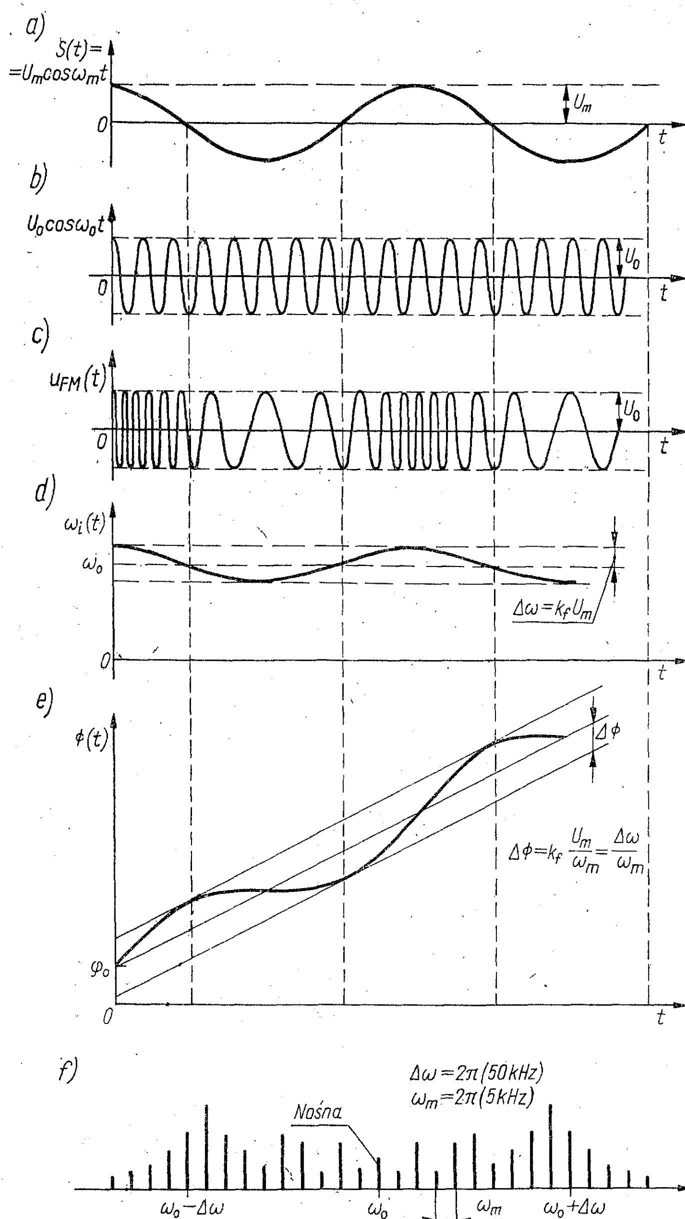
Ponieważ dla n parzystego $J_n(\beta) = J_{-n}(\beta)$, a dla n nieparzystego $J_n(\beta) = -J_{-n}(\beta)$, ostatni wzór można zapisać również tak

$$\begin{aligned} u_{FM}(t) = U_o \{ & J_0(\beta)\cos\omega_o t + J_1(\beta)[\cos(\omega_o+\omega_m)t - \cos(\omega_o-\omega_m)t] + \\ & + J_2(\beta)[\cos(\omega_o+2\omega_m)t + \cos(\omega_o-2\omega_m)t] + \\ & + J_3(\beta)[\cos(\omega_o+3\omega_m)t - \cos(\omega_o-3\omega_m)t] + \ldots \} \end{aligned} \tag{D5/110}$$

Z postaci (D5/110) wynika, że widmo szerokopasmowego sygnału *FM* zajmuje nieograniczone pasmo częstotliwości. W rozważanym przypadku modulacji jednym tonem harmonicznym składa się ono z prążka nośnej oraz nieskończonej liczby przebiegów harmonicznych o pulsacjach $\omega_o + n\omega_m$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, tworzących wstęgi boczne. Warto zauważyć, że ze względu na oscylacyjny charakter zmian funkcji Bessela zarówno nośna, jak i amplitudy poszczególnych składowych wstęg bocznych mogą przyjmować wartości zerowe dla szczególnych wartości β.

Przebieg sygnału $u_{FM}(t)$ dla modulacji jednym tonem harmonicznym, zmiany $\omega_i(t)$ oraz $\phi(t)$, a także przykładowy rozkład widmowy pokazano na rys. D5/9.

Z wykresu $J_n(\beta)$ na rys. D5/8 widać, że dla ustalonej wartości β, amplitudy składowych w szeregu $u_{FM}(t)$ maleją wraz ze wzrostem wskaźnika n, zawsze więc



D5/9 Sygnał modulujący (a), przebieg nośny (b), sygnał zmodulowany częstotliwościowo (c), pulsacja chwilowa (d), faza chwilowa (e) oraz widmo sygnału *FM* (f)

istnieje taki wskaźnik N, że dla $n > N$ amplitudy prążków są mniejsze od założonej umownie wartości. Prowadzi to do wniosku, że aczkolwiek z formalnego punktu widzenia pasmo zajęte przez sygnał jest nieograniczone, to większość mocy sygnału jest skupiona w nośnej oraz części wstęg bocznych leżących w pobliżu pulsacji ω_0. Z energetycznego punktu widzenia można więc zdefiniować

tzw. *techniczną* (*efektywną*) *szerokość pasma* zajętego przez sygnał *FM*, jako przedział częstotliwości, w którym mieści się określona część mocy całkowitej sygnału.

Z twierdzenia Parsevala dla sygnałów prawie okresowych — a do takiej klasy należy sygnał opisany równaniem (D5/109) — wynika, że całkowita moc średnia $u_{FM}(t)$ wynosi

$$P_u = \frac{U_o^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) \tag{D5/111}$$

W teorii funkcji Bessala dowodzi się jednak, że dla dowolnego β słuszna jest równość

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1 \tag{D5/112}$$

Zatem moc sygnału opisanego zależnością (D5/109) jest równa mocy średniej nośnej niemodulowanej

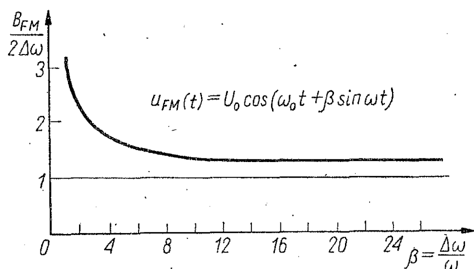
$$P_u = \frac{U_o^2}{2} \tag{D5/113}$$

Jeśli teraz weźmiemy taką najmniejszą liczbę N, dla której zachodzi

$$\frac{1}{U_o^2/2} \frac{U_o^2}{2} \sum_{n=-N}^{N} J_n^2(\beta) = \sum_{n=-N}^{N} J_n^2(\beta) \geqslant \varepsilon \tag{D5/114}$$

gdzie $0 < \varepsilon < 1$, to długość przedziału $(\omega_o - N\omega,\ \omega_o + N\omega)$, w którym mieści się ε — część mocy całkowitej sygnału określi nam szerokość zajętego pasma. Liczbę ε dobiera się arbitralnie; w zależności od potrzeb może to być np. 0,99 czy 0,999.

Inny sposób określenia technicznej szerokości pasma sygnału *FM* opiera się na założeniu, że można pominąć wszystkie prążki boczne, których amplitudy są mniejsze od 1% amplitudy nośnej niemodulowanej ($< 0{,}01\,U_o$). Na rysunku D5/10 przedstawiono zależność tak zdefiniowanej szerokości pasma, B_{FM}, unormowanej względem $2\Delta\omega$, w zależności od indeksu modulacji β. Krzywa stanowi interpolację punktów otrzymanych z analizy numerycznej.



D5/10 Wykres unormowanego pasma sygnału *FM* w zależności od indeksu modulacji

W literaturze technicznej podaje się zależności, pozwalające oszacować szerokość pasma sygnału *FM*. Dla niezbyt dużych indeksów modulacji ($\beta > 0{,}5$) mamy

$$B_{FM} \approx 2(\Delta\omega + \omega_m) \qquad \text{(D5/115)}$$

natomiast dla $\beta > 10$ lepszy jest wzór

$$B_{FM} \approx 2\Delta\omega \qquad \text{(D5/116)}$$

Z wykresu na rys. D5/10 widać, że istotnie, jeśli $\beta \to \infty$, to $B_{FM} \to 2\Delta\omega$. Zauważmy także, że gdy $\Delta\omega = \text{const}$, to $\beta = \Delta\omega/\omega_m \to \infty$ oznacza, iż pulsacja chwilowa zmienia się bardzo wolno.

Dla szerokopasmowego sygnału *FM* zmodulowanego dowolnym sygnałem (t) zagadnienie oszacowania efektywnej szerokości pasma staje się trudne. Jeśli jednak sygnał modulujący ma widmo ograniczone do ω_M, to pasmo zajmowane przez sygnał zmodulowany powinno być nie większe, niż w przypadku modulacji jednym tonem harmonicznym o pulsacji ω_M, w pierwszej sytuacji bowiem moc sygnału modulującego jest rozłożona w całym przedziale $(0, \omega_M)$ a w drugiej moc ta jest skupiona na krańcu przedziału, w punkcie odpowiadającym największej pulsacji, tj. ω_M. Istotnie, do oszacowania pasma sygnału *FM* zmodulowanego dowolnym sygnałem o widmie ograniczonym do ω_M stosuje się wzór Carsona

$$B_{FM} \approx 2(\Delta\omega + \omega_M) \qquad \text{(D5/117)}$$

Dla dostatecznie dużych dewiacji pulsacji można przyjąć oszacowanie

$$B_{FM} \approx 2\Delta\omega \qquad \text{(D5/118)}$$

Sygnał zmodulowany fazowo — PM

Wąskopasmową modulację *PM* otrzymujemy, gdy spełniony jest warunek

$$\Delta\phi \ll 1 \qquad \text{(D5/119)}$$

Wówczas

$$e^{j\Delta\phi f(t)} \approx 1 + j\Delta\phi f(t) \qquad \text{(D5/120)}$$

i zależności (D5/90) oraz (D5/91) można sprowadzić do postaci

$$z_{PM}(t) = U_o[1 + ja(t)]e^{j\omega_o t} \qquad \text{(D5/121)}$$

$$u_{PM}(t) = \operatorname{Re} z_{PM}(t) = U_o \cos\omega_o t - a(t)\sin\omega_o t \qquad \text{(D5/122)}$$

gdzie

$$a(t) = \Delta\phi f(t) \qquad \text{(D5/123)}$$

Otrzymujemy w tym przypadku analogiczny rozkład widmowy i szerokość zajmowanego pasma, jak dla wąskopasmowego sygnału *FM*.

Gdy

$$s(t) = U_m \sin\omega_m t$$

to

$$\Delta\phi = k_p U_m \tag{D5/124}$$

$$\Delta\omega = k_p U_m \omega_m = \Delta\phi\omega_m \tag{D5/125}$$

oraz

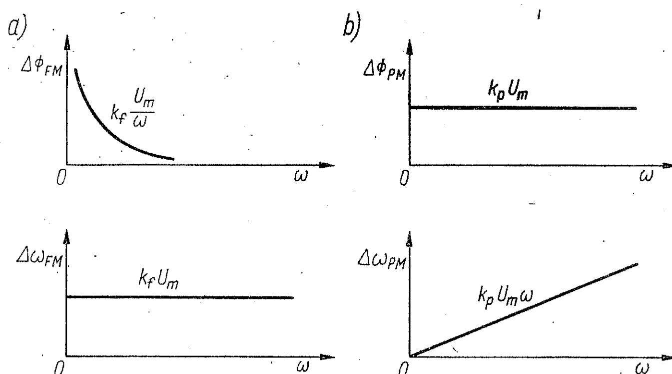
$$z_{PM}(t) = U_o e^{j\omega_o t} e^{j\Delta\phi \sin \omega_m t} \tag{D5/126}$$

Sygnał $z_{PM}(t)$ można rozwinąć w szereg Fouriera o tej samej postaci, co (D5/108)

$$z_{PM}(t) = U_o \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\Delta\phi) e^{j(\omega_o + n\omega_m)t} \tag{D5/127}$$

przy czym zamiast indeksu modulacji β występuje tu dewiacja fazy $\Delta\phi$.

Z porównania wzorów (D5/101) i (D5/102) z (D5/124) i (D5/125) widać, że zależność dewiacji fazy i dewiacji pulsacji dla sygnałów *FM* i *PM* od pulsacji sygnału modulującego, ma dla każdego z tych sygnałów inny charakter, co pokazano na rys. D5/11.



D5/11 Wykresy dewiacji fazy i dewiacji pulsacji sygnałów *FM* (a) i *PM* (b) zmodulowanych jednym tonem harmonicznym, w funkcji pulsacji sygnału modulującego

Badanie właściwości widmowych szerokopasmowego sygnału *PM* zmodulowanego dowolnym sygnałem, jest równie trudne jak dla sygnału *FM*. Techniczną szerokość pasma zajmowanego przez sygnał *PM* można jednak oszacować w analogiczny sposób.

Jeśli więc sygnał modulujący ma widmo ograniczone do ω_M, to dla $\Delta\phi > 0{,}5$

$$B_{PM} \approx 2(\Delta\phi + 2)\omega_M \tag{D5/128}$$

a dla $\Delta\phi > 10$ można przyjąć

$$B_{PM} \approx 2\Delta\phi\omega_M \tag{D5/129}$$

Z porównania wzorów (D5/115) i (D5/116) z (D5/128) i (D5/129) widać istotną różnicę między właściwościami widmowymi sygnałów *FM* i *PM*. Przy stałej dewiacji $\Delta\phi$ szerokość pasma zajmowanego przez sygnał *PM* wzrasta

proporcjonalnie do wzrostu maksymalnej pulsacji w widmie sygnału modulującego. Szerokość ta jest zatem różna dla różnych sygnałów modulujących. Wady tej nie ma system *FM*, w którym dla stałej dewiacji $\Delta\omega$ szerokość zajętego pasma jest niezależna od ω_M[1]. Można więc w tym systemie rezerwować w kanale transmisyjnym stałe pasmo, niezależne od przesyłanego sygnału informacyjnego.

Na zakończenie zrobimy jeszcze jedno porównanie. Rozważmy przypadek, gdy sygnały *AM* i *FM* są zmodulowane tym samym sygnałem informacyjnym. Pasmo zajęte przez sygnał *AM* $B_{AM} = 2\omega_M$, a przez sygnał *FM* $B_{FM} \approx 2(\Delta\omega + \omega_M)$. Ponieważ zawsze zachodzi nierówność $\Delta\omega \gg \omega_M$ (z uwagi na odporność na zakłócenia stosuje się sygnały szerokopasmowe), pasmo sygnału *FM* jest znacznie szersze, niż pasmo sygnału *AM*.

Literatura

D5.1. Baghdady E. J.: *Lectures on Communication System Theory*. McGraw-Hill, New York 1961.
D5.2. Bracewell R.: *Przekształcenie Fouriera i jego zastosowania*. WNT, Warszawa 1968.
D5.3. Franks L. E.: *Teoria sygnałów*. WNT, Warszawa 1975.
D5.4. Gregg W. D.: *Podstawy telekomunikacji analogowej i cyfrowej*. WNT, Warszawa 1983.
D5.5. Lathi B. P.: *Systemy telekomunikacyjne*. WNT, Warszawa 1972.
D5.6. Panter P. F.: *Modulation, Noise, and Spectral Analysis*. McGraw-Hill, New York 1965.
D5.7. Szabatin J.: *Podstawy teorii sygnałów*. WKŁ, Warszawa 1982.
D5.8. Voelker H.: *Toward a Unified Theory of Modulation*. Pts. 1 and 2, *Proc. IEEE*, vol. 54, no 3 and 5, 1966.
D5.9. Wojnar A.: *Teoria sygnałów*. WNT, Warszawa 1980.

---

[1] Przy założeniu, oczywiście, że dewiacja $\Delta\omega$ jest dostatecznie duża.

DODATEK **6**

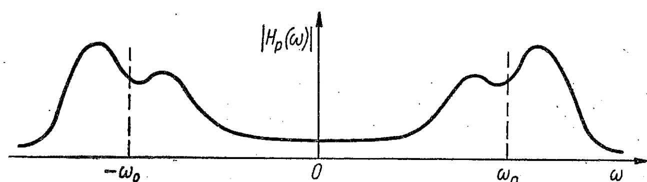
FILTRACJA PASMOWA SYGNAŁÓW ZMODULOWANYCH

W niniejszym dodatku przedstawimy metodę wyznaczania odpowiedzi filtrów środkowoprzepustowych na pobudzenia w postaci sygnałów zmodulowanych, których widma są, jak wiemy, środkowopasmowe. Posłużymy się do tego celu zapisem analitycznym sygnałów zmodulowanych, wprowadzonym w dodatku D5, gdyż ta forma, a w szczególności związane z nią pojęcie obwiedni zespolonej, pozwala na uzyskanie wyników dokładnych, bez uproszczeń jakie pociąga za sobą tzw. przybliżenie wąskopasmowe.

Przyjmijmy, że mamy filtr środkowoprzepustowy o charakterystyce amplitudowo-fazowej $H_p(\omega)$, która spełnia oczywisty warunek

$$H_p(\omega) = H_p^*(-\omega) \qquad \text{(D6/1)}$$

Przykładowy przebieg charakterystyki amplitudowej takiego filtru pokazano na rys. D6/1.



D6/1 Charakterystyka amplitudowa filtru środkowoprzepustowego

Zapiszmy części charakterystyki $H_p(\omega)$, określone odpowiednio dla pulsacji dodatnich i pulsacji ujemnych, w następujący sposób:

$$H_p(\omega)\mathbf{1}(\omega) = H_d(\omega-\omega_0) \qquad \omega > 0$$

$$H_p(\omega)\mathbf{1}(-\omega) = H_p^*(-\omega)\mathbf{1}(-\omega) = H_d^*(-\omega-\omega_0) \qquad \omega < 0 \qquad \text{(D6/2)}$$

gdzie ω_o jest pulsacją umownie przyjętą jako pulsacja środkowa pasma przenoszenia filtru (przy pobudzeniu układu sygnałem zmodulowanym przyjmować będziemy, że ω_o jest pulsacją nośną tego sygnału). Wykorzystując zależność (D6/2), możemy napisać, że

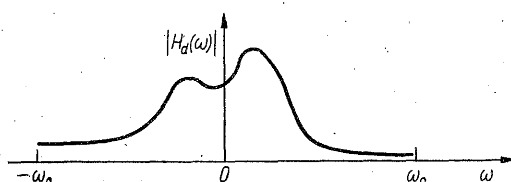
$$H_p(\omega) = H_d(\omega-\omega_o)+H_d^*(-\omega-\omega_o) \qquad \text{(D6/3)}$$

Wyznaczmy teraz odpowiedź impulsową filtru pasmowego, $h_p(t)$, dokonując transformacji odwrotnej wyrażenia (D6/3)

$$h_p(t) = \mathscr{F}^{-1}[H_p(\omega)] = \mathscr{F}^{-1}[H_d(\omega-\omega_o)]+\mathscr{F}^{-1}[H_d^*(-\omega-\omega_o)] \qquad \text{(D6/4)}$$

Po podstawieniu odpowiednio $\omega' = \omega-\omega_o$ i $\omega' = \omega+\omega_o$ oraz po wykorzystaniu twierdzenia o przesunięciu (opuszczając znaki „prim") otrzymamy

$$h_p(t) = e^{j\omega_o t}\mathscr{F}^{-1}[H_d(\omega)]+e^{-j\omega_o t}\mathscr{F}^{-1}[H_d^*(-\omega)] \qquad \text{(D6/5)}$$



D6/2 Charakterystyka amplitudowa filtru dolnoprzepustowego, uzyskana przez przesunięcie prawostronnej części charakterystyki z rys. D6/1 o wartość ω_o w kierunku początku układu odniesienia

Na rysunku D6/2 pokazano $|H_d(\omega)|$. Jak widać $H_d(\omega)$ jest charakterystyką dolnoprzepustową, nie spełniającą jednak warunku (D6/1). Wynika stąd, że odpowiedź impulsowa układu o takiej charakterystyce

$$h_d(t) = \mathscr{F}^{-1}[H_d(\omega)] \qquad \text{(D6/6)}$$

nie jest rzeczywistą funkcją czasu, ale funkcją zespoloną. Po wprowadzeniu oznaczenia (D6/6) do wyrażenia (D6/5), przybiera ono formę

$$h_p(t) = h_d(t)e^{j\omega_o t}+h_d^*(t)e^{-j\omega_o t} = \mathrm{Re}[2h_d(t)e^{j\omega_o t}] \qquad \text{(D6/7)}$$

Widać stąd, że $h_d(t)$ stanowi obwiednię zespoloną odpowiedzi impulsowej filtru pasmowego $h_p(t)$. Zapiszmy $h_d(t)$ w postaci (D5/18), tzn.

$$h_d(t) = h_{dI}(t)+ jh_{dQ}(t) \qquad \text{(D6/8)}$$

gdzie $h_{dI}(t)$ oraz $h_{dQ}(t)$ stanowią odpowiednio składową synfazową i składową kwadraturową. Wówczas

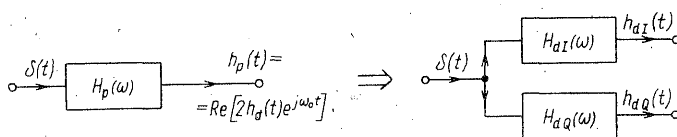
$$h_p(t) = \mathrm{Re}[2h_d(t)e^{j\omega_o t}] = 2h_{dI}(t)\cos\omega_o t-2h_{dQ}(t)\sin\omega_o t \qquad \text{(D6/9)}$$

Jak podano w dodatku D5 — wzory (D5/28) i (D5/29) — $\mathscr{F}$-transformaty składowej synfazowej i składowej kwadraturowej obwiedni zespolonej stanowią odpowiednio część symetryczną sprzężoną oraz część antysymetryczną sprzężoną jej transformaty. Zgodnie z zależnościami (D6/6) i (D6/8) możemy więc napisać, iż

$$\mathscr{F}[h_{dI}(t)] = H_{dI}(\omega) = \frac{1}{2}[H_d(\omega)+H_d^*(-\omega)] \tag{D6/10}$$

$$\mathscr{F}[h_{dQ}(t)] = H_{dQ}(\omega) = \frac{1}{2j}[H_d(\omega)-H_d^*(-\omega)] \tag{D6/11}$$

Rozważaniom naszym możemy nadać następującą interpretację. Przy obliczaniu odpowiedzi impulsowej filtru środkowoprzepustowego, filtr taki, mający jedno wejście i jedno wyjście, został zastąpiony filtrem dolnoprzepustowym o jednym wejściu i dwóch wyjściach, przy czym sygnały wyjściowe poszczególnych członów filtru o charakterystykach $H_{dI}(\omega)$ i $H_{dQ}(\omega)$ stanowią odpowiedno $h_{dI}(t)$ oraz $h_{dQ}(t)$. Sytuację tę zilustrowano na rys. D6/3. Warto tu jeszcze dodać, że



D6/3 Schematy blokowe ilustrujące sposób wyznaczania odpowiedzi impulsowej filtru środkowoprzepustowego

$(H_{dI}\omega)$ i $H_{dQ}(\omega)$ spełniają warunek (D6/1), który musi spełniać charakterystyka filtru realizowalnego, w przeciwieństwie do $H_d(\omega)$, opisującej filtr nierealizowalny o zespolonej odpowiedzi impulsowej.

Rozważmy teraz przypadek, gdy filtr pasmowy zostaje pobudzony sygnałem zmodulowanym o postaci

$$u_i(t) = \mathrm{Re}[v_i(t)e^{j\omega_o t}] = \frac{1}{2}v_i(t)e^{j\omega_o t}+\frac{1}{2}v_i^*(t)e^{-j\omega_o t} \tag{D6/12}$$

Wykorzystując twierdzenie o przesunięciu, $\mathscr{F}$-transformatę $u_i(t)$ można zapisać jako

$$\mathscr{F}[u_i(t)] = U_i(\omega) = \frac{1}{2}V_i(\omega-\omega_o)+\frac{1}{2}V_i^*(-\omega-\omega_o) \tag{D6/13}$$

gdzie

$$V_i(\omega) = \mathscr{F}[v_i(t)] \tag{D6/14}$$

stanowi transformatę obwiedni zespolonej. Należy zauważyć, że $V_i(\omega-\omega_o)$ jest widmem jednostronnym, różnym od zera dla $\omega > 0$, natomiast $V_i^*(-\omega-\omega_o)$ ma z kolei wartości różne od zera tylko dla $\omega < 0$.

Sygnał wyjściowy $u_o(t)$ wyznaczymy z zależności

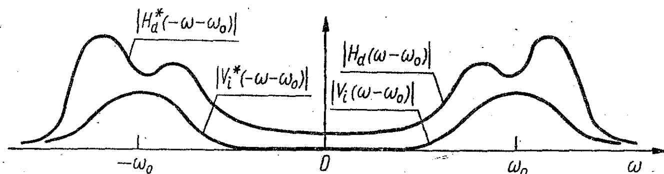
$$u_o(t) = \mathscr{F}^{-1}[U_o(\omega)] = \mathscr{F}^{-1}[H_p(\omega)U_i(\omega)] \tag{D6/15}$$

Na podstawie zależności (D6/3) i (D6/13) otrzymujemy, że

$$U_o(\omega) = \frac{1}{2}[V_i(\omega-\omega_o)+V_i^*(-\omega-\omega_o)][H_d(\omega-\omega_o)+H_d^*(-\omega-\omega_o)] \tag{D6/16}$$

Z uwagi na jednostronny charakter poszczególnych widm i charakterystyk, występujących we wzorze (D6/16), widoczny na rys. D6/4, różne od zera będą tylko dwa iloczyny, tj.

$$U_o(\omega) = \frac{1}{2}V_i(\omega-\omega_o)H_d(\omega-\omega_o)+\frac{1}{2}V_i^*(-\omega-\omega_o)H_d^*(-\omega-\omega_o) \qquad \text{(D6/17)}$$



D6/4 Charakterystyka amplitudowa filtru środkowoprzepustowego oraz widmo amplitudowe zmodulowanego sygnału pobudzającego

Po wprowadzeniu zmiany zmiennych takiej, jak we wzorze (D6/4), otrzymujemy

$$u_o(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega_o t}\mathscr{F}^{-1}[V_i(\omega)H_d(\omega)]+\frac{1}{2}e^{-j\omega_o t}\mathscr{F}^{-1}[V_i^*(-\omega)H_d^*(-\omega)] =$$

$$= \frac{1}{2}e^{j\omega_o t}\mathscr{F}^{-1}[V_o(\omega)]+\frac{1}{2}e^{-j\omega_o t}\mathscr{F}^{-1}[V_o^*(-\omega)] \qquad \text{(D6/18)}$$

gdzie

$$V_o(\omega) = V_i(\omega)H_d(\omega) \qquad \text{(D6/19)}$$

jest transformatą obwiedni zespolonej sygnału wyjściowego, zatem

$$u_o(t) = \frac{1}{2}v_o(t)e^{j\omega_o t}+\frac{1}{2}v_o^*(t)e^{-j\omega_o t} = \mathrm{Re}[v_o(t)e^{j\omega_o t}] \qquad \text{(D6/20)}$$

gdzie

$$v_o(t) = \mathscr{F}^{-1}[V_o(\omega)] \qquad \text{(D6/21)}$$

Z zależności (D6/19) i (D6/21) widać, że

$$v_o(t) = \mathscr{F}^{-1}[V_i(\omega)H_d(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} v_i(\tau)h_d(t-\tau)\mathrm{d}\tau \qquad \text{(D6/22)}$$

a więc obwiednia zespolona sygnału wyjściowego jest splotem obwiedni zespolonej sygnału wejściowego oraz obwiedni zespolonej odpowiedzi impulsowej filtru pasmowego (lub inaczej, odpowiedzi impulsowej równoważnego filtru dolnoprzepustowego).

Jeśli wielkości zespolone występujące w zależności (D6/22) wyrazimy za pomocą ich składowych synfazowych i kwadraturowych, a więc zapiszemy tę zależność w postaci

$$v_o(t) = v_{oI}(t)+ jv_{oQ}(t) = [v_{iI}(t)+jv_{iQ}(t)] * [h_{dI}(t)+ jh_{dQ}(t)] \qquad \text{(D6/23)}$$

to po uporządkowaniu wyrazów otrzymamy odpowiednio:

$$v_{oI}(t) = v_{iI}(t) * h_{dI}(t) - v_{iQ}(t) * h_{dQ}(t) \tag{D6/24}$$

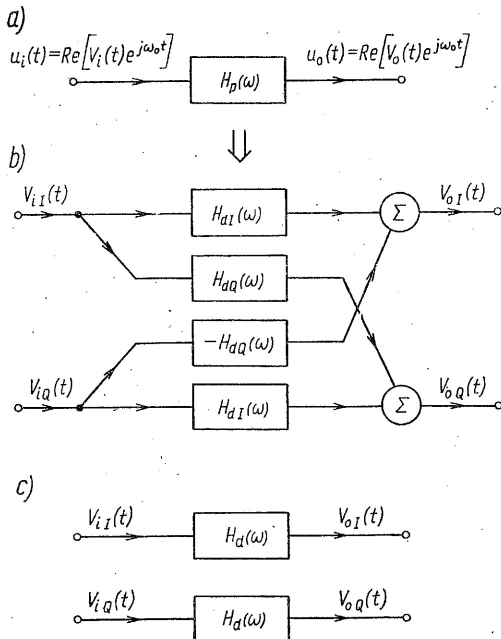
$$v_{oQ}(t) = v_{iQ}(t) * h_{dI}(t) + v_{iI}(t) * h_{dQ}(t) \tag{D6/25}$$

W dziedzinie transformat związki te przyjmują postać:

$$V_{oI}(\omega) = V_{iI}(\omega) H_{dI}(\omega) - V_{iQ}(\omega) H_{dQ}(\omega) \tag{D6/26}$$

$$V_{oQ}(\omega) = V_{iQ}(\omega) H_{dI}(\omega) + V_{iI}(\omega) H_{dQ}(\omega) \tag{D6/27}$$

Komentując uzyskane rezultaty można powiedzieć, że w procesie wyznaczania odpowiedzi układu środkowoprzepustowego na sygnał zmodulowany, filtr pasmowy o jednym wejściu i jednym wyjściu został zastąpiony przez filtr dolnoprzepustowy o dwóch wejściach i dwóch wyjściach, do przenoszenia odpowiednio składowej synfazowej i składowej kwadraturowej obwiedni zespolonej sygnału wejściowego. Widać to ze schematu funkcjonalnego, odpowiadającego równaniom (D6/24) i (D6/25) oraz (D6/26) i (D6/27), który podano na rys. D6/5a i b.



D6/5 Schematy blokowe ilustrujące sposób wyznaczania odpowiedzi filtru środkowoprzepustowego na pobudzenie sygnałem zmodulowanym

Przyjmijmy teraz, że charakterystyka amplitudowa filtru pasmowego $|H_p(\omega)|$ wykazuje symetrię parzystą, a charakterystyka fazowa $\arg H_p(\omega)$ symetrię nieparzystą względem pulsacji ω_0. Założenie to oznacza, że charakterystyka filtru dolnoprzepustowego $H_d(\omega)$, którą otrzymujemy przesuwając $H_p(\omega)$ o wartość ω_0, do początku układu współrzędnych (rys. D6/2), spełnia warunek

$$H_d(\omega) = H_d^*(-\omega) \tag{D6/28}$$

Z zależności (D6/11) widać natychmiast, że $H_{dQ}(\omega) = 0$, co w konsekwencji daje także $h_{dQ}(t) = 0$. Wynika stąd, iż odpowiedź impulsowa filtru dolnoprzepustowego jest rzeczywista i $h_p(t)$ dane wzorem (D6/9) upraszcza się do postaci

$$h_p(t) = 2h_d(t)\cos\omega_o t \tag{D6/29}$$

Przy podanych założeniach wyprowadzone zależności ogólne (D6/24)...(D6/27) ulegają uproszczeniu, otrzymujemy bowiem

$$v_{oI}(t) = v_{iI}(t) * h_d(t) \tag{D6/30}$$

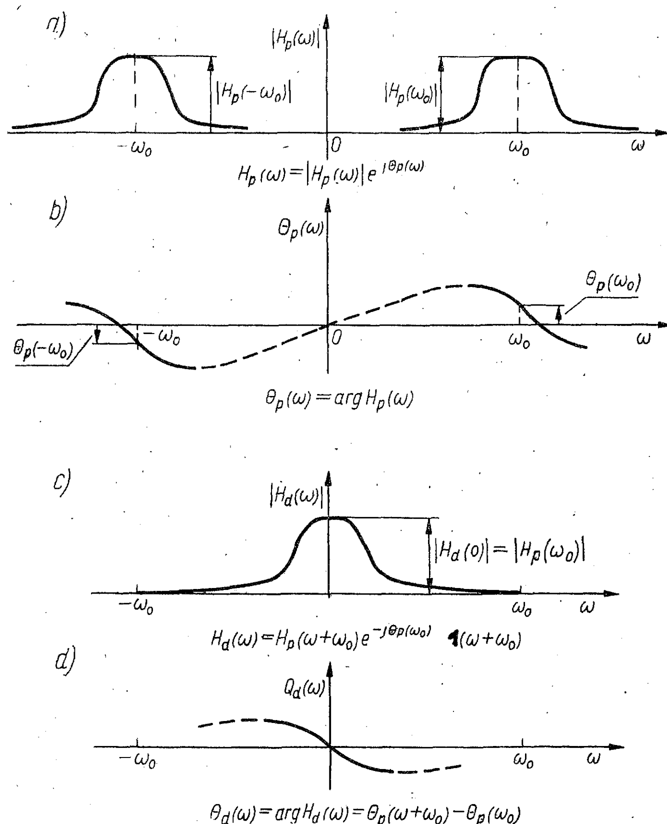
$$v_{oQ}(t) = v_{iQ}(t) * h_d(t) \tag{D6/31}$$

oraz

$$V_{oI}(\omega) = V_{iI}(\omega)H_d(\omega) \tag{D6/32}$$

$$V_{oQ}(\omega) = V_{iQ}(\omega)H_d(\omega) \tag{D6/33}$$

Upraszcza się także schemat funkcjonalny filtru dolnoprzepustowego, gdyż nie występują skrośne sprzężenia pomiędzy składową synfazową i kwadraturową, co pokazano na rys. D6/5c. Jest to sytuacja z technicznego punktu widzenia



D6/6 Charakterystyka amplitudowa (a) i charakterystyka fazowa (b) filtru środkowoprzepustowego oraz charakterystyka amplitudowa (c) i charakterystyka fazowa (d) równoważnego filtru dolnoprzepustowego

bardzo pożądana, gdyż nie ma wówczas wpływu modulacji amplitudy sygnału pasmowego na modulację jego częstotliwości czy fazy.

Omówiony przypadek uzupełnimy przez rozważenie filtru środkowoprzepustowego, którego charakterystyki amplitudowa i fazowa są pokazane odpowiednio na rys. D6/6a i b. Zauważmy, że $\theta_p(\omega_o) \neq 0$, co się często zdarza w układach pasmowych. Aby charakterystyka częstotliwościowa równoważnego filtru dolnoprzepustowego spełniała warunek (D6/28), jego charakterystyka fazowa musi mieć postać podaną na rys. D6/6d, tzn.

$$\theta_d(\omega) = \theta_p(\omega+\omega_o)-\theta_p(\omega_o) \tag{D6/34}$$

gdyż wówczas spełnia warunek nieparzystości

$$\theta_d(\omega) = -\theta_d(-\omega)$$

przechodząc dla $\omega = 0$ przez zero oraz zachowuje ten sam kształt, co $\theta_p(\omega)$. Oczywiście charakterystyka amplitudowa $|H_d(\omega)|$ jest tylko przesuniętą do początku układu współrzędnych repliką $|H_p(\omega)|$, co pokazano na rys. D6/6c. Uwzględniając przesunięcie wzdłuż osi rzędnych charakterystyki fazowej, za które jest odpowiedzialny w równaniu (D6/34) wyraz $\theta_p(\omega_o)$, możemy zamiast zależności (D6/3) napisać

$$H_p(\omega) = H_d(\omega-\omega_o)e^{j\theta_p(\omega_o)}+H_d^*(-\omega-\omega_o)e^{-j\theta_p(\omega_o)} \tag{D6/35}$$

Wykorzystując powyższą równość oraz podane poprzednio wyprowadzenia, łatwo jest pokazać, że teraz

$$h_p(t) = \mathrm{Re}\{2h_d(t)e^{j[\omega_o t+\theta_p(\omega_o)]}\} = 2h_d(t)\cos[\omega_o t+\theta_p(\omega_o)] \tag{D6/36}$$

natomiast zależność (D6/20) przyjmuje postać

$$u_o(t) = \mathrm{Re}\{v_o(t)e^{j[\omega_o t+\theta_p(\omega_o)]}\} \tag{D6/37}$$

Formy pozostałych zależności nie ulegają zmianie.

Na zakończenie wykorzystamy wyprowadzone ogólne zależności do wyznaczenia odpowiedzi filtru pasmowego, którego charakterystyki zostały podane na rys. D6/6a i b, na wymuszenie w postaci sygnałów zmodulowanych amplitudowo. Jak wiemy z dodatku D5, sygnały *AM* i *AM-SC* można zapisać w postaci

$$u_i(t) = \mathrm{Re}[a_i(t)e^{j\omega_o t}] = a_i(t)\cos\omega_o t$$

gdzie $a_i(t)$ jest dane odpowiednio wzorami (D5/41) oraz (D5/49). W obu przypadkach $a_i(t)$ jest rzeczywistą funkcją czasu, a więc

$$v_i(t) = a_i(t) \tag{D6/38}$$

W związku z tym obwiednia sygnału wyjściowego $v_o(t)$ jest także rzeczywista i zgodnie z równaniem (D6/30) ma postać

$$v_o(t) = v_i(t) * h_d(t) = a_i(t) * h_d(t) \tag{D6/39}$$

Z zależności (D6/37) wynika zatem, iż

$$\begin{aligned} u_o(t) &= \mathrm{Re}\{[a_i(t) * h_d(t)]e^{j[\omega_o t+\theta_p(\omega_o)]}\} = \\ &= [a_i(t) * h_d(t)]\cos[\omega_o t+\theta_p(\omega_o)] \end{aligned} \tag{D6/40}$$

Postać sygnału *SSB-SC*, zgodnie z zależnością (D5/61), jest następująca:

$$u_{i\,SSB\text{-}SC}(t) = \mathrm{Re}\{[a_i(t) \pm \mathrm{j}\hat{a}_i(t)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_o t}\}$$

Obwiednia zespolona jest sygnałem analitycznym, a jej składowe synfazowa i kwadraturowa

$$v_{iI}(t) = a_i(t)$$
$$v_{iQ}(t) = \hat{a}_i(t)$$

Na podstawie zależności (D6/30), (D6/31) oraz (D6/37)

$$\begin{aligned} u_o(t) &= \mathrm{Re}\{[a_i(t) * h_d(t) \pm \mathrm{j}\hat{a}_i(t) * h_d(t)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega_o t+\theta_p(\omega_o)]}\} = \\ &= [a_i(t) * h_d(t)]\cos[\omega_o t+\theta_p(\omega_o)] \\ &\mp [\hat{a}_i(t) * h_d(t)]\sin[\omega_o t+\theta_p(\omega_o)] \end{aligned} \qquad \text{(D6/41)}$$

Przypadek, gdy sygnały pobudzające są zmodulowane kątowo jest znacznie bardziej złożony i wymaga specjalnego ujęcia analitycznego. Dlatego poświęcono mu odrębny dodatek (D7).

Literatura

D6.1. Baghdady E. J.: *Lectures on Communication System Theory*. McGraw-Hill, New York 1961.

D6.2. Franks L. E.: *Teoria sygnałów*. PWN, Warszawa 1975.

DODATEK 7

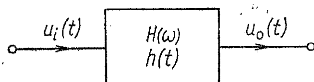
PRZENOSZENIE SYGNAŁÓW ZMODULOWANYCH KĄTOWO PRZEZ UKŁADY LINIOWE

Wyznaczenie odpowiedzi układu liniowego na pobudzenie sygnałem zmodulowanym kątowo jest zagadnieniem wyjątkowo złożonym. Skuteczność opracowanych dotychczas metod zależy w istotny sposób od spełnienia silnych warunków ograniczających, nakładanych na sygnał pobudzający oraz/lub układ liniowy, którego odpowiedź chcemy obliczyć.

Z uwagi na zakres zagadnień prezentowanych w podręczniku ograniczymy się tutaj do omówienia tylko dwóch przypadków, których znajomość jest czytelnikowi potrzebna.

D7.1 ODPOWIEDŹ UKŁADU NA POBUDZENIE SYGNAŁEM O WOLNO—ZMIENNEJ CZĘSTOTLIWOŚCI CHWILOWEJ

Rozważmy układ podany na rys. D7/1. Założymy, że jest to układ stabilny, spełniający podstawowy warunek realizowalności fizycznej, to znaczy jego odpowiedź impulsowa $h(t) = 0$ dla $t < 0$. Układ ten zostaje pobudzony sygnałem



D7/1 Rozpatrywany układ liniowy i stosowane oznaczenia

zmodulowanym kątowo. Dla ustalenia uwagi przyjmiemy, że jest to sygnał z modulacją częstotliwości i zgodnie z zależnościami (D5/92) oraz (D5/93) można go zapisać w postaci

$$u_i(t) = U_i \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = \mathrm{Re}\, z_i(t) = \mathrm{Re}[U_i e^{j\omega_0 t} e^{j\varphi(t)}] \qquad \text{(D7/1)}$$

gdzie $z_i(t)$ oznacza sygnał analityczny, a

$$\varphi(t) = \Delta\omega \int_0^t f(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \qquad (D7/2)$$

Pulsacja chwilowa sygnału wyraża się wzorem

$$\omega_i(t) = \omega_o + \dot{\varphi}(t) = \omega_o + \Delta\omega f(t) \qquad (D7/3)$$

Dla wygody zapisu pochodną względem czasu oznaczono kropką.

Do wyznaczenia odpowiedzi zastosujemy splot

$$u_o(t) = \int_0^t h(\tau) u_i(t-\tau)\mathrm{d}\tau = U_i \operatorname{Re}\left[\int_0^t h(\tau) e^{j\omega_o(t-\tau)} e^{j\varphi(t-\tau)} \mathrm{d}\tau\right] =$$

$$= U_i \operatorname{Re}\left[e^{j\omega_o t} \int_0^t h(\tau) e^{-j\omega_o \tau} e^{j\varphi(t-\tau)} \mathrm{d}\tau\right] \qquad (D7/4)$$

Rozwińmy $\varphi(t-\tau)$ w szereg potęgowy względem $-\tau$

$$\varphi(t-\tau) = \varphi(t) - \dot{\varphi}(t)\tau + \frac{1}{2!}\ddot{\varphi}(t)\tau^2 + \ldots \qquad (D7/5)$$

czyli

$$e^{j\varphi(t-\tau)} = e^{j\varphi(t)} e^{-j\dot{\varphi}(t)\tau} e^{j\left[\frac{1}{2!}\ddot{\varphi}(t)\tau^2 + \ldots\right]} \qquad (D7/6)$$

Przyjmijmy teraz, że odpowiedź impulsowa układu zanika na tyle szybko, iż jedynie w skończonym przedziale, $0 < \tau < \tau_o$ jej wartość można uznać za różną od zera. Jeżeli zatem zostanie spełniona nierówność

$$\frac{1}{2}|\varphi(t)|\tau_o^2 \ll |\dot{\varphi}(t)|\tau_o \qquad (D7/7)$$

to w rozwinięciu (D7/5) można pominąć wszystkie wyrazy, za wyjątkiem dwóch pierwszych, czyli można przyjąć, że

$$\varphi(t-\tau) \approx \varphi(t) - \dot{\varphi}(t)\tau \qquad (D7/8)$$

Nierówność (D7/7) oznacza, że zmiana pulsacji chwilowej ($\ddot{\varphi}(t) = \dot{\omega}_i(t)$) w przedziale $(0, \tau_o)$ powinna być mała. Jeśli na przykład przyjmiemy, że mamy modulację jednym tonem harmonicznym o pulsacji równej maksymalnej pulsacji w widmie sygnału modulującego, tzn. $f(t) = \cos\omega_M t$, to zgodnie z równaniem (D7/3)

$$|\dot{\varphi}(t)|_{\max} = \Delta\omega \quad \text{oraz} \quad |\ddot{\varphi}(t)|_{\max} = \Delta\omega\omega_M$$

i (D7/7) upraszcza się do postaci

$$\omega_M \ll \frac{1}{\tau_o} \qquad (D7/9)$$

Zatem okres $2\pi/\omega_M$ składowej o największej pulsacji w widmie sygnału modulującego powinien być znacznie większy od efektywnego czasu trwania odpowiedzi impulsowej układu.

W wyniku podstawienia zależności (D7/8) do (D7/4) otrzymujemy

$$u_o(t) = U_i \mathrm{Re}\left\{ e^{j[\omega_o t+\varphi(t)]} \int_0^\infty h(\tau) e^{-j[\omega_o+\dot{\varphi}(t)]\tau} d\tau \right\} \qquad \text{(D7/10)}$$

Z uwagi na założenie o skończonym czasie trwania odpowiedzi impulsowej wprowadziliśmy niewłaściwą granicę całkowania, gdyż nie zmienia to wyniku operacji.

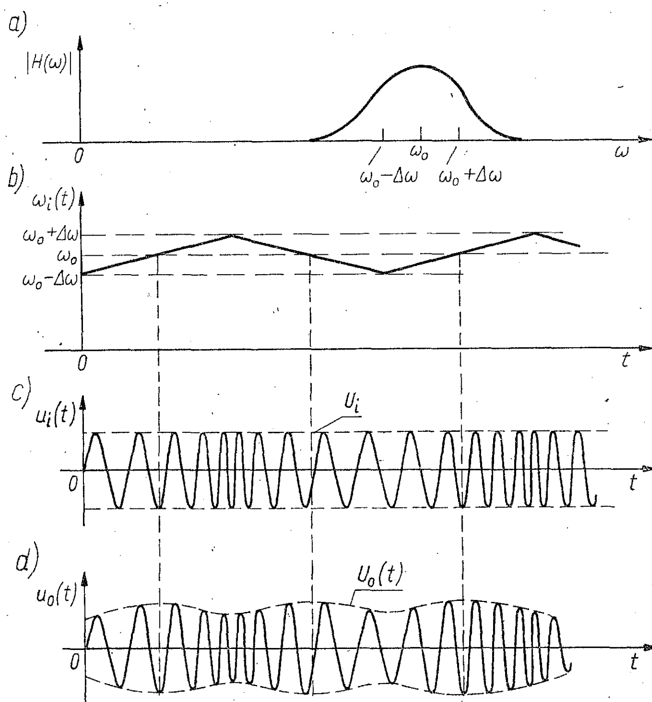
Przez analogię do definicji $H(\omega)$ jako $\mathscr{F}$-transformaty $h(t)$ wprowadzimy oznaczenie

$$H[\omega_i(t)] = \int_0^\infty h(\tau) e^{-j\omega_i(t)\tau} d\tau \qquad \text{(D7/11)}$$

Wówczas

$$u_o(t) = U_i \mathrm{Re}\{H[\omega_i(t)] e^{j[\omega_o t+\varphi(t)]}\} = U_i |H[\omega_i(t)]| \cos\{\omega_o t+\varphi(t)+ +\arg H[\omega_i(t)]\} = U_o(t)\cos\{\omega_o t+\varphi(t)+\arg H[\omega_i(t)]\} \qquad \text{(D7/12)}$$

Jak widać, sygnał wyjściowy jest sygnałem zmodulowanym zarówno kątowo, jak i amplitudowo. Mówimy, że zachodzi w układzie konwersja *FM/AM*, gdyż $U_o(t)$ zmienia się w takt zmian pulsacji chwilowej sygnału wejściowego. Kształt $U_o(t)$ jest repliką charakterystyki amplitudowej układu z przedziału zmienności $\omega_i(t)$, co pokazano na rys. D7/2. Konwersja *FM/AM* może być wprowadzana



D7/2 Wyznaczanie odpowiedzi układu metodą quasi-stacjonarną: a) charakterystyka amplitudowa układu; b) zmiany pulsacji chwilowej sygnału wejściowego; c) sygnał wejściowy; d) sygnał wyjściowy

i wykorzystywana celowo, jak to ma miejsce w niektórych rodzajach demodulatorów częstotliwości, lub też występować jako zjawisko niepożądane, wprowadzające zniekształcenia, z czym mamy do czynienia przy filtracji sygnałów z modulacją kątową.

Należy również zauważyć, że fazą chwilowa sygnału wyjściowego różni się od fazy chwilowej sygnału wymuszającego wskutek istnienia wyrazu $\arg H[\omega_i(t)]$, który wprowadza zniekształcenia modulacji.

Przedstawiona tu metoda analizy nosi nazwę *quasi-stacjonarnej*, gdyż przy wyznaczaniu odpowiedzi układu wolno zmieniającą się pulsację chwilową traktuje się tak, jak stałą pulsację wymuszenia harmonicznego.

Zbadamy teraz bliżej od czego zależy błąd, jaki popełniamy, stosując przybliżenie (D7/8). Rozwińmy ostatni czynnik w wyrażeniu (D7/6) w szereg potęgowy, zachowując tylko pierwszy wyraz rozwinięcia. Wówczas

$$e^{j\varphi(t-\tau)} = e^{j\varphi(t)}e^{-j\dot{\varphi}(t)\tau}\left[1+j\frac{\varphi(t)\,\tau^2}{2!}-j\frac{\dddot{\varphi}(t)\,\tau^3}{31}+\ldots\right] \tag{D7/13}$$

Jeśli przyjmiemy, że dla małych wartości τ_o o błędzie decyduje drugi z wyrazów występujących w nawiasie (co jest na ogół uzasadnione w praktyce), to po uwzględnieniu tego wyrazu zamiast (D7/10) otrzymamy

$$u_o(t) = U_i \operatorname{Re}\left\{e^{j[\omega_o t+\varphi(t)]}\left[\int_0^\infty h(\tau)e^{-j[\omega_o+\dot{\varphi}(t)]\tau}d\tau+\right.\right.$$

$$\left.\left.+j\frac{\ddot{\varphi}(t)}{2}\int_0^\infty \tau^2 h(\tau)e^{-j[\omega_o+\dot{\varphi}(t)]\tau}d\tau\right]\right\} \tag{D7/14}$$

Z właściwości przekształcenia Fouriera wiadomo jednak, że

$$\mathscr{F}^{-1}[\tau^2 h(\tau)] = -\frac{d^2H(\omega)}{d\omega^2} \tag{D7/15}$$

Zatem zależność (D7/14) można zapisać następująco:

$$u_o(t) = U_i \operatorname{Re}\left\{e^{j[\omega_o t+\varphi(t)]}H[\omega_i(t)]\left[1-j\frac{\ddot{\varphi}(t)}{2}\frac{\frac{d^2H(\omega_i)}{d\omega_i^2}}{H(\omega_i)}\right]\right\} \tag{D7/16}$$

Wyrażenie to redukuje się do (D7/12), jeśli

$$\left|\frac{\ddot{\varphi}(t)}{2}\frac{\frac{d^2H(\omega_i)}{d\omega_i^2}}{H(\omega_i)}\right|_{max} \ll 1 \tag{D7/17}$$

Jak łatwo zauważyć, maksymalna wartość lewej strony nierówności będzie zależeć od lokalizacji pulsacji nośnej ω_o i zakresu zmian ω_i względem charakterystyki $H(\omega)$. Może się zdarzyć, że maksymalna szybkość zmian pulsacji chwilowej, $\ddot{\varphi}(t) = \dot{\omega}_i(t)$ wystąpi wówczas, gdy drugi czynnik również osiąga wartość

maksymalną. Dla takiego przypadku nierówność (D7/17) można zastąpić nierównością silniejszą

$$\left|\frac{\ddot{\varphi}(t)}{2}\right|_{max}\left|\frac{\frac{d^2H(\omega)}{d\omega^2}}{H(\omega)}\right|_{max} \ll 1 \tag{D7/18}$$

Należy zauważyć, że w nierówności (D7/18) nie występuje ω_i tylko ω, a więc maksymalna wartość drugiego czynnika jest wyznaczana nie w przedziale zmienności pulsacji chwilowej, ale dla $\omega \in (0, \infty)$. W konkretnych układach można obliczyć stosunek $d^2H(\omega)/d\omega^2/H(\omega)$ w zależności od ω, a następnie dla ustalonej wartości ω_o i przyjętego zakresu zmian ω_i, stosować w nierówności (D8/18) właściwą wartość tego stosunku.

Uwzględniając dalsze wyrazy w rozwinięciu potęgowym $\varphi(t)$, można uzyskać zależności umożliwiające wyznaczanie wnoszonych przez układ zniekształceń, gdy pulsacja chwilowa sygnału nie zmienia się wystarczająco wolno, aby można było stosować analizę quasi-stacjonarną. Sprawą tą nie będziemy się tutaj zajmować; szczegółowe rozważania można znaleźć np. w [D7.1], [D7.2].

D7.2 ODPOWIEDŹ UKŁADU O LINIOWYCH CHARAKTERYSTYKACH AMPLITUDOWEJ I FAZOWEJ NA POBUDZENIE SYGNAŁEM ZMODULOWANYM KĄTOWO

Rozważmy teraz szczególny przypadek układu, który w ograniczonym pasmie częstotliwości zajętym przez sygnał pobudzający ma liniową charakterystykę amplitudową oraz liniową charakterystykę fazową, jak to pokazano na rys. D7/3. Zgodnie z podanymi tam oznaczeniami

$$H(\omega) = |K(\omega-\omega_1)|\, e^{j[(\omega_o-\omega)t_o+\theta(\omega_o)]} \tag{D7/19}$$

Jako sygnał pobudzający przyjmiemy, tak jak poprzednio, sygnał o postaci (D7/1), a odpowiedź układu znajdziemy z zależności

$$u_o(t) = \mathrm{Re}\{\mathscr{F}^{-1}[H(\omega)Z_i(\omega)]\} \tag{D7/20}$$

gdzie

$$Z_i(\omega) = \mathscr{F}[z_i(t)] \tag{D7/21}$$

i jest, jak wiemy z dodatku D5, widmem prawostronnym. Zobaczymy dalej, że znajomość $Z_i(\omega)$ nie będzie nam potrzebna.

Dla $\omega > \omega_1$ iloczyn transformat występujący w zależności (D7/20) możemy, po uporządkowaniu wyrazów, zapisać następująco:

$$\begin{aligned} H(\omega)Z_i(\omega) &= K(\omega-\omega_1)e^{j[(\omega_o-\omega)t_o+\theta(\omega_o)]}Z_i(\omega) = \\ &= Ke^{j\omega_o t_o}e^{j\theta(\omega_o)}[\omega e^{-j\omega t_o}Z_i(\omega)-\omega_1 e^{-j\omega t_o}Z_i(\omega)] \end{aligned} \tag{D7/22}$$

Z właściwości przekształcenia Fouriera dla przesunięcia i różniczkowania w dziedzinie czasu wynika, że

$$\mathscr{F}^{-1}[\omega_1 e^{-j\omega t_o}Z_i(\omega)] = U_i\omega_1 e^{j[\omega_o(t-t_o)+\varphi(t-t_o)]} \tag{D7/23}$$

oraz

$$\mathscr{F}^{-1}[\omega e^{-j\omega t_o} Z_i(\omega)] = \frac{d}{j\,dt} U_i e^{j[\omega_o(t-t_o)+\varphi(t-t_o)]} =$$

$$= U_i[\omega_o + \dot{\varphi}(t-t_o)] e^{j[\omega_o(t-t_o)+\varphi(t-t_o)]} \qquad \text{(D7/24)}$$

Po wykorzystaniu zależności (D7/23) i (D7/24), zamiast (D7/20) otrzymujemy

$$u_o(t) = \mathrm{Re}\{|U_i K[\omega_o + \dot{\varphi}(t-t_o) - \omega_1]| e^{j[\omega_o t + \varphi(t-t_o)+\theta(\omega_o)]}\} =$$

$$= U_i |K[\omega_i(t-t_o) - \omega_1]| \cos[\omega_o t + \varphi((t-t_o) + \theta(\omega_o)] \qquad \text{(D7/25)}$$

a po zapisaniu w postaci analogicznej do (D7/12)

$$u_o(t) = U_o(t)\cos[\omega_o t + \varphi(t-t_o) + \theta(\omega_o)] \qquad \text{(D7/26)}$$

przy czym $U_o(t)$ i $\varphi(t-t_o)$ możemy na podstawie zależności (D7/19) oraz (D7/2) wyrazić w następujący sposób:

$$U_o(t) = H[\omega_i(t-t_o)]\, U_i \qquad \text{(D7/27)}$$

$$\varphi(t-t_o) = \Delta\omega \int_0^{t-t_o} f(\vartheta)\, d\vartheta \qquad \text{(D7/28)}$$

Jak widać, w rozważanym przypadku występuje również konwersja *FM/AM*, ale w odróżnieniu od sytuacji omówionej w p. D7.1, $U_o(t)$ jest teraz liniowo zależne od $\omega_i(t-t_o)$, co oznacza, że przebieg (kształt) $U_o(t)$ jest — za wyjątkiem opóźnienia t_o — dokładną, niezniekształconą repliką przebiegu pulsacji chwilowej $\omega_i(t)$, a więc i sygnału modulującego $f(t)$. Fakt ten ma istotne znaczenie i jest wykorzystywany w niektórych rodzajach demodulatorów częstotliwości. Również modulacja częstotliwości sygnału nie ulega zniekształceniu przez układ, gdyż sygnał wyjściowy jest zmodulowany tym samym sygnałem modulującym, co sygnał wejściowy, tylko opóźnionym o t_o.

Zauważmy jeszcze, że w procesie wyprowadzania wyniku (D7/26) nie nałożyliśmy żadnych ograniczeń na szybkość zmian pulsacji chwilowej. Można to łatwo zinterpretować na podstawie nierówności (D7/8). Przy liniowych charakterystykach amplitudowej i fazowej drugi czynnik jest równy zeru, a więc nierówność ta jest spełniona przy dowolnej szybkości zmian pulsacji $\omega_i(t)$.

Porównując zależność (D7/26) z (D7/12) otrzymaną metodą quasi-stacjonarną, widzimy, iż różnią się one między innymi tym, że w (D7/26) występuje opóźnienie t_o. Zbadajmy, kiedy ta różnica ma istotne znaczenie. Pulsację chwilową $\omega_i(t-t_o)$ można zgodnie z (D7/3) zapisać tak

$$\omega_i(t-t_o) = \omega_o + \Delta\omega f(t-t_o) \qquad \text{(D7/29)}$$

Rozwińmy $f(t-t_o)$ w szereg potęgowy o postaci (D7/5), zachowując tylko pierwsze dwa wyrazy

$$f(t-t_o) \approx f(t) - \dot{f}(t)\, t_o \qquad \text{(D7/30)}$$

Biorąc $\mathscr{F}$-transformatę tego wyrażenia otrzymamy

$$\mathscr{F}[f(t-t_o)] \approx F(\omega) - j\omega F(\omega)\, t_o = F(\omega)[1 - j\omega t_o] \qquad \text{(D7/31)}$$

W zastosowaniach praktycznych widmo sygnału modulującego jest zawsze ograniczone. Przyjmijmy więc, że $F(\omega) \neq 0$ tylko dla $\omega \leqslant \omega_M$. Wynika z tego natychmiast, że jeśli zostanie spełniona nierówność

$$\omega_M t_o \ll 1 \tag{D7/32}$$

to (D7/31) uprościć można do postaci

$$\mathscr{F}[f(t-t_o)] \approx F(\omega) \quad \text{czyli} \quad f(t-t_o) \approx f(t) \tag{D7/33}$$

Wprowadzając to przybliżenie do (D7/27) i wykorzystując fakt, że przy warunku (D7/32) możemy także napisać

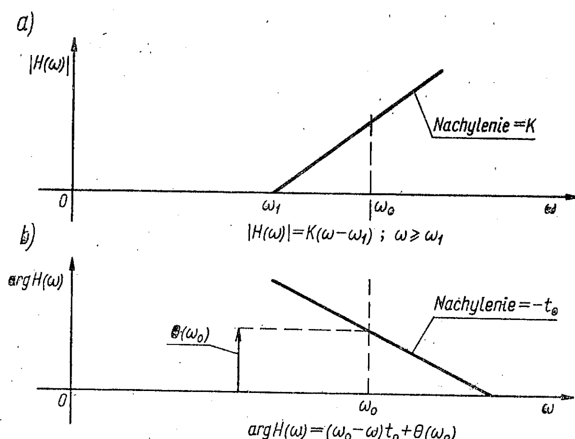
$$\varphi(t-t_o) \approx \varphi(t) \tag{D7/34}$$

zamiast zależności (D7/25) otrzymujemy

$$u_o(t) = U_i|H[\omega_i(t)]|\cos[\omega_o t+\varphi(t)+\theta(\omega_o)] \tag{D7/35}$$

Zwróćmy uwagę na jeszcze jeden fakt. Pochodna sygnału zmodulowanego kątowo, określonego wzorem (D7/1), ma postać

$$\frac{du_i(t)}{dt} = -U_i\omega_i(t)\sin[\omega_o t+\varphi(t)] \tag{D7/36}$$



D7/3 Charakterystyka amplitudowa (a) i charakterystyka fazowa (b) układu pasmowego

Łatwo zauważyć, że jeśli w (D7/35) przyjmiemy $\theta(\omega_o) = \pm\pi/2$, to wyrażenie to uzyska tę samą formę, co (D7/36). Jak widać, w obu przypadkach amplitudy chwilowe sygnałów zależą liniowo od pulsacji $\omega_i(t)$. Ponieważ w sygnale wyjściowym $u_o(t)$, określonym zależnością (D7/35), jest to wynikiem specyficznego kształtu charakterystyk częstotliwościowych układu mówimy, że układ o charakterystykach z rys. D7/3 dokonuje różniczkowania w dziedzinie częstotliwości.

Na zakończenie przyjmijmy jeszcze, że mamy układ o liniowej charakterystyce fazowej, takiej jak na rys. D7/36, ale o stałej charakterystyce amplitudowej, tj.

$$|H(\omega)| = K = \text{const} \tag{D7/37}$$

Wprowadzając te założenia do zależności (D7/20) otrzymujemy

$$u_o(t) = U_o \cos\left[\omega_o t + \Delta\omega \int_0^{t-t_o} f(\vartheta)\,d\vartheta + \theta(\omega_o)\right] \tag{D7/38}$$

gdzie

$$U_o = KU_i = \mathrm{const} \tag{D7/39}$$

Jak widać z uzyskanego rezultatu, układ taki jest *pasmowym układem opóźniającym*. Opóźnia on sygnał modulujący o t_o oraz przesuwa fazę nośnej o $\theta(\omega_o)$.

Literatura

D7.1. Baghdady E. J.: *Lectures on Communication System Theory.* McGraw-Hill, New York 1961.

D7.2. Panter P. F.: *Modulation, Noise and Spectral Analysis.* McGraw-Hill, New York 1965.

DODATEK **8**

PRZENOSZENIE SYGNAŁÓW ZMODULOWANYCH KĄTOWO PRZEZ BEZINERCYJNE UKŁADY NIELINIOWE

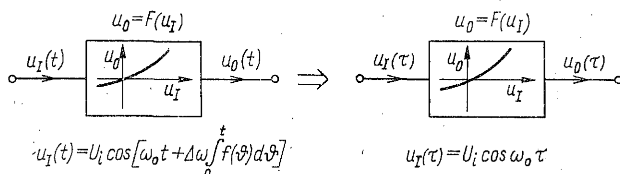
Niech dany będzie nieliniowy, bezinercyjny układ transmisyjny (rys. D8/1), w którym związek pomiędzy sygnałem wejściowym i sygnałem wyjściowym jest opisany zależnością

$$u_O = F(u_I) \tag{D8/1}$$

gdzie $F(u_I)$ stanowi jednowartościową funkcję swego argumentu. Rozważmy sytuację, gdy pobudzenie $u_I(t)$ jest sygnałem zmodulowanym częstotliwościowo o postaci (D5/3)

$$u_I(t) = U_i \cos \omega_o t + \Delta\omega \int_0^t f(\vartheta)\, d\vartheta \tag{D8/2}$$

wyznaczmy odpowiedź $u_O(t)$.



D8/1 Nieliniowy układ bezinercyjny pobudzony sygnałem *FM*

Jak pokazaliśmy w dodatku D5 struktura sygnału *FM*, nawet w przypadku modulacji sygnałem deterministycznym, jest bardzo złożona. Tylko przy modulacji jednym tonem harmonicznym otrzymujemy sygnał prawie okresowy, którego widmo można wyznaczyć w stosunkowo prosty sposób. W przypadku bezinercyjnego układu nieliniowego istnieje jednakże możliwość uzyskania ogólnego rozwiązania postawionego zadania przez zastosowanie odpowiedniego podstawienia.

Wprowadźmy w zależności (D5/2) następującą zmianę zmiennych:

$$\tau(t) \doteq t + \frac{\Delta\omega}{\omega_o}\int_0^t f(\vartheta)\,d\vartheta \tag{D8/3}$$

Wówczas $u_I(t)$ można zapisać w postaci

$$u_I(\tau) = U_i \cos\omega_o\tau \tag{D8/4}$$

Jak widać, sygnał $u_I(\tau)$ jest okresowy względem nowej zmiennej τ z okresem $2\pi/\omega_o$.

Odpowiedź rozważanego układu nieliniowego na wymuszenie (D8/4) ma charakter okresowy, a wobec założenia jednowartościowości funkcji $F(\cdot)$ przebieg wyjściowy będzie parzysty, czyli jego szereg Fouriera przyjmie następującą prostą formę:

$$u_O(\tau) = U_{o0} + \sum_{n=1}^{\infty} U_{on} \cos n\omega_o\tau \tag{D8/5}$$

gdzie

$$U_{on} = a\frac{\omega_o}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_o}^{\pi/\omega_o} F(U_i\cos\omega_o\tau)\cos n\omega_o\tau\,d\tau \tag{D8/6}$$

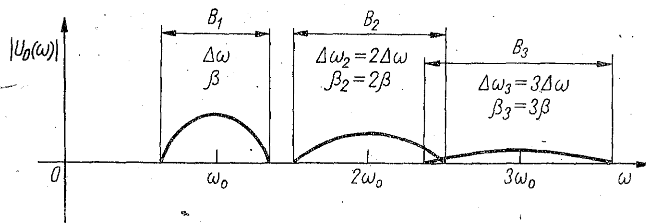
przy czym $a = 1$ dla $n = 0$ oraz $a = 2$ dla $n \geqslant 1$.

Powracając, zgodnie z zależnością (D8/3), do zmiennej t otrzymujemy ostatecznie, że

$$u_O(t) = U_{o0} + \sum_{n=1}^{\infty} U_{on} \cos\left[n\omega_o t + n\Delta\omega\int_0^t f(\vartheta)\,d\vartheta\right] \tag{D8/7}$$

Sygnał wyjściowy $u_O(t)$ wyraża się zatem szeregiem, którego kolejne wyrazy są sygnałami *FM* zmodulowanymi tym samym sygnałem informacyjnym, co sygnał wejściowy, ale o n-krotnie zwiększonej dewiacji i pulsacji nośnej.

Należy zauważyć (D5), że pasma częstotliwości zajmowane przez poszczególne sygnały składowe są tym szersze, im większy jest wskaźnik n. Przy odpowiednio dużej dewiacji $\Delta\omega$ widma poszczególnych sygnałów mogą więc zachodzić na siebie, a wówczas nie będzie możliwe wydzielenie wybranego sygnału przez filtrację.



D8/2 Widma trzech kolejnych sygnałów składowych odpowiedzi bezinercyjnego układu nieliniowego na pobudzenie sygnałem *FM*

Zjawisko to prześledzimy na przykładzie sygnału zmodulowanego jednym tonem harmonicznym. Rozważmy sytuację przedstawioną na rys. D8/2, gdzie pokazano widma trzech kolejnych składników sygnału $u_O(t)$, o pulsacjach nośnych ω_o, $2\omega_o$ i $3\omega_o$. Jak widać, na to aby można było oddzielić przez filtrację sygnał składowy o pulsacji ω_o od sygnału o pulsacji $2\omega_o$ musi zostać spełniona nierówność

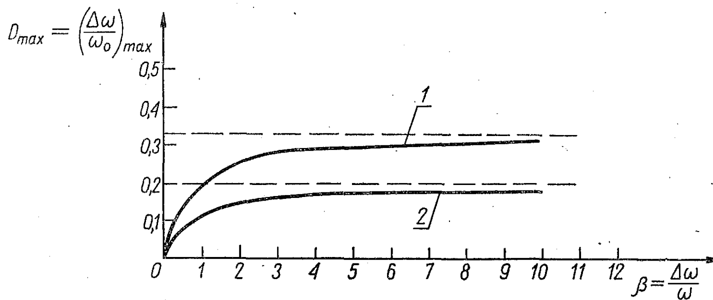
$$\frac{B_1}{2}+\frac{B_2}{2} \leqslant \omega_o \tag{D8/8}$$

Wprowadzając oznaczenia podane na rys. D8/2 można tę nierówność sprowadzić do postaci

$$D = \frac{\Delta\omega}{\omega_o} \leqslant \frac{1}{\dfrac{B_1}{2\Delta\omega}+2\dfrac{B_2}{2\Delta\omega_2}} \tag{D8/9}$$

gdzie D oznacza dewiację względną sygnału wejściowego. Wykorzystując wykres z rys. D5/10 oraz przyjmując, że znakowi równości w (D8/9) odpowiada wartość D_{max}, można wyznaczyć D_{max} jako funkcję indeksu modulacji β. Z rysunku D5/10 widać, że dla $\beta \to \infty$ względna szerokość zajmowanego pasma $B/2\Delta\omega \to 1$. Stąd otrzymujemy, że

$$\lim_{\beta\to\infty} D_{max} = \frac{1}{3} \tag{D8/10}$$



D8/3 Wykres maksymalnej dewiacji względnej przy której: *1* — można jeszcze wydzielić sygnał składowy o pulsacji nośnej ω_o oraz *2* — można jeszcze wydzielić sygnał składowy o pulsacji nośnej $2\omega_o$

Charakter zależności $D_{max} = f(\beta)$ ilustruje na rys. D8/3 krzywa *1*. Pokazano tam również asymptotę (D8/10). Dla wszystkich punktów o współrzędnych (D, β), które leżą poniżej krzywej *1*, badane widma nie będą zachodzić na siebie.

W analogiczny sposób można formułować warunki rozłączności widm innych sygnałów składowych z szeregu (D8/7). Na przykład, jeśli chcemy za pomocą filtru pasmowego wydzielić sygnał o pulsacji nośnej $2\omega_o$, to widmo tego sygnału nie może mieć obszarów wspólnych ani z widmem skoncentrowanym

wokół ω_o, ani też z widmem skupionym wokół $3\omega_o$. Oprócz nierówności (D8/9) musi więc być spełniona także nierówność

$$\frac{B_2}{2}+\frac{B_3}{2} \leqslant \omega_o \tag{D8/11}$$

lub równoważna

$$D = \frac{\Delta\omega}{\omega_o} \leqslant \frac{1}{2\frac{B_2}{2\Delta\omega_2}+3\frac{B_3}{2\Delta\omega_3}} \tag{D8/12}$$

Łatwo zauważyć, że ostatnia nierówność stanowi ostrzejsze ograniczenie, niż (D8/9), ponieważ

$$\lim_{\beta\to\infty} D_{max} = \frac{1}{5} \tag{D8/11}$$

Przypadek ten ilustruje na rys. D8/3 krzywa *2* oraz odpowiadająca jej asymptota.

Omówione wyżej ograniczenia na maksymalną dewiację względną sygnału wejściowego, przy których nie występuje zjawisko zachodzenia na siebie widm interesujących nas składowych sygnału wyjściowego, pozostają słuszne również dla przypadku modulacji dowolnym sygnałem informacyjnym o pasmie ograniczonym do ω_M. Nierówności typu (D8/9), czy (D8/12) należy wówczas badać przyjmując, że harmoniczny sygnał modulujący ma pulsację równą ω_M.

Należy jeszcze dodać, że warunek niezachodzenia widm składowych na siebie jest warunkiem granicznym. Przy zastosowaniu filtrów o charakterystykach odbiegających od idealnej charakterystyki prostokątnej, dopuszczalna dewiacja względna sygnału wejściowego musi być znacznie mniejsza od D_{max}. Dla sygnałów zmodulowanych fazowo sposób postępowania jest analogiczny.

Literatura

D8.1. Clarke K. K., Hess D. T.: *Communication Circuits: Analysis and Design*. Addison-Wesley, New York 1971.

SKOROWIDZ